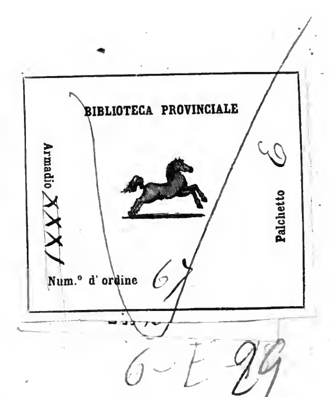
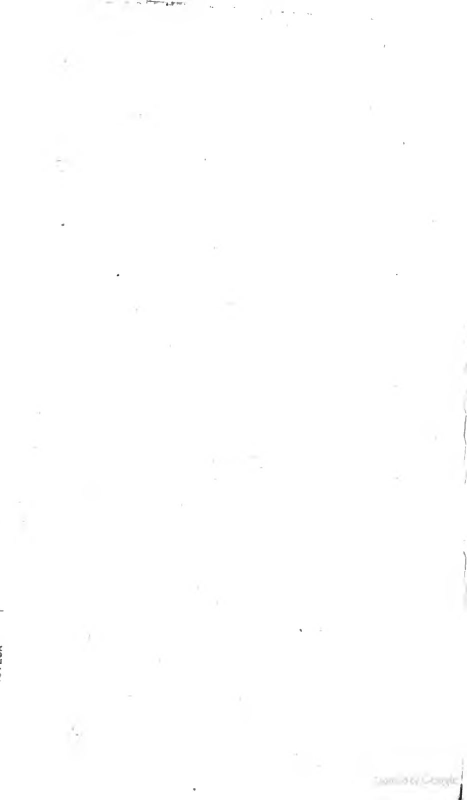



FONDO PIZZOFALCONE


BIBLIOTECA PROVINCIALE
Armadio XXXI
Palchetto 6
Num.° d' ordine 67





MANUEL

DES ASPIRANTS

AU BACCALAURÉAT

ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ÈS-SCIENCES PHYSIQUES.

MANUEL

DES ASPIRANTS

AU BACCALAURÉAT

ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ÈS-SCIENCES PHYSIQUES;

RÉDIGÉ

D'APRÈS LE PROGRAMME OFFICIEL.



Paris,

CHEZ L. HACHETTE,

LIBRAIRE DE L'UNIVERSITÉ ROYALE DE FRANCE,

RUE PIERRE-SARRAZIN, N° 12.

1837.

IMPRIMERIE DE J. GRATIOT,
Rue du Foin Saint-Jacques, Maison de la Reine Blanche.

AVIS DE L'EDITEUR.

La publication de cet ouvrage ne sera pas, je l'espère, sans utilité pour les jeunes gens auxquels il est destiné. Ce serait une erreur de croire qu'en feuilletant pendant quelques jours un Manuel de ce genre, on puisse acquérir les connaissances exigées pour l'examen. Mais, assurément, un jeune homme qui aura suivi les cours de sciences, trouvera dans ce volume un résumé clair et commode de toutes les choses qu'il doit savoir, et sur lesquelles il pourra être interrogé.

Il est dans les éléments des sciences un grand nombre de faits et de démonstrations, que l'on saisit rapidement et que l'on oublie plus vite encore. Le *Manuel des Aspirants au Baccalauréat ès-sciences* remettra sous les yeux des élèves toutes les notions qu'ils doivent posséder.

Le programme officiel ne contient point l'indication détaillée des matières exigées en mathématiques. Il a donc fallu faire un choix, sans cependant rien omettre d'important. Il sera commode pour les candidats qui se préparent, de pouvoir concentrer leur attention sur les points fondamentaux de l'examen.

Au contraire, toutes les questions de physique, de chimie et d'histoire naturelle étant spécifiées d'une manière précise, on a dû se renfermer dans les limites prescrites, sans ajouter d'autres développements que ceux nécessaires pour la liaison des idées.

La plus grande partie des matières étant commune aux deux examens, l'Éditeur a jugé convenable de ne publier qu'un seul ouvrage dans lequel toutefois, on a eu soin

d'indiquer les parties relatives seulement à l'un ou à l'autre des deux baccalauréats.

M. Sonnet, ancien élève de l'École normale et agrégé des sciences, a développé la partie *mathématique* du Manuel.

M. Saigey, auteur connu de plusieurs ouvrages élémentaires, a traité la partie qui comprend la *physique* et la *chimie*.

M. Delafosse, Maître de conférences à l'École normale, et auteur de plusieurs ouvrages adoptés pour l'enseignement dans les colléges et les écoles, a rédigé la *zoologie* et la *minéralogie*.

ORDONNANCE DU ROI

RELATIVE AU BACCALAURÉAT ÈS-SCIENCES.

LOUIS-PHILIPPE, Roi des Français;

A tous présents et à venir, salut :

Vu le décret du 17 mars 1808 et les ordonnances des 5 juillet 1820, 13 juin 1830 et 18 janvier 1831 ;

Notre Conseil royal de l'Instruction publique entendu; sur le rapport de notre Ministre secrétaire d'État au département de l'Instruction publique,

Nous avons ordonné et ordonnons ce qui suit :

Art. 1er. A partir du 1er novembre 1836, nul ne pourra être admis à prendre sa première inscription dans une faculté, à quelque titre que ce soit, s'il ne justifie du diplôme de bachelier ès-lettres; sont exceptées les inscriptions dites de capacité.

Art. 2. A partir du 1er novembre 1837, nul ne pourra être admis à soutenir son premier examen dans une faculté de médecine, s'il ne justifie du diplôme de bachelier ès-sciences, dont les frais seront déduits au profit de l'élève sur le prix des inscriptions qui lui restent à prendre.

Art. 3. Seront dispensés de l'obligation du baccalauréat ès-sciences, les étudiants en médecine qui, en prenant leur cinquième inscription, déclareraient n'aspirer qu'au titre d'officier de santé; mais la dite inscription, et celles qu'ils continueront de prendre dans le même but ne seront, dans aucun cas, admises à leur compter pour le doctorat en médecine.

Art. 4. Les inscriptions, quel qu'en soit le nombre, prises dans une école secondaire de médecine, ne pourront être échangées, jusqu'à concurrence de quatre inscriptions ou plus, pour le doctorat dans la faculté de médecine, qu'autant que l'étudiant justifierait des diplômes de bachelier ès-sciences.

Pour obtenir, par voie d'échange, moins de quatre inscriptions dans une faculté de médecine, il suffira du diplôme de bachelier ès-lettres.

Art. 5. Les dispositions contraires des ordonnances antérieures sont et demeurent rapportées.

Art. 6. Notre Ministre-secrétaire d'État au département de l'Instruction publique, est chargé de l'exécution de la présente ordonnance.

Donné au palais de Neuilly, le 9 août 1836.

LOUIS-PHILIPPE.

Par le Roi :

Le Ministre secrétaire-d'État de l'Instruction publique,

PELET DE LA LOZÈRE.

EXTRAIT

DES DIFFÉRENTS STATUTS UNIVERSITAIRES CONCERNANT L'EXAMEN DU BACCALAURÉAT ÈS-SCIENCES.

Pour être admis à l'examen du baccalauréat ès-sciences mathématiques et du baccalauréat ès-sciences physiques, il suffit de justifier du titre de bachelier ès-lettres (statut du 16 février 1810). L'inscription pour les deux baccalauréats se prend au secrétariat des facultés des sciences.

Le droit d'examen et de diplôme est de soixante francs. Les candidats paient deux francs en sus pour le droit de l'appariteur. Le versement de ces soixante-deux francs s'opère entre les mains du secrétaire de la faculté, lequel en délivre gratuitement une reconnaissance.

Le candidat qui se représente après avoir été refusé, paie de nouveau le droit d'examen qui est de vingt-quatre francs, plus deux francs pour le droit de l'appariteur. Il ne peut se représenter qu'après un intervalle de trois mois, à moins qu'il n'obtienne une autorisation du Ministre.

Les candidats sont interrogés sur les matières déterminées par l'arrêté du conseil royal de l'instruction publique, en date du 3 février 1837.

Toutefois, ceux d'entre eux qui se destinent à l'enseignement de la philosophie, sont dispensés de répondre sur la partie du programme relative à la chimie et à l'histoire naturelle.

Les diplômes qui sont délivrés dans ce cas, font mention de cette dispense et de la destination à laquelle ils sont exclusivement applicables.

L'examen des deux baccalauréats consiste dans une interrogation dont la durée est fixée à une heure au moins pour le baccalauréat ès-sciences mathématiques et à trois quarts d'heure au moins pour le baccalauréat ès-sciences physiques.

ARRÊTÉ

DU CONSEIL ROYAL DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE,

EN DATE DU 3 FÉVRIER 1837,

RÉGLANT LES MATIÈRES SUR LESQUELLES SERONT INTERROGÉS LES ASPIRANTS AUX GRADES DE BACHELIER ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES ET DE BACHELIER ÈS-SCIENCES PHYSIQUES.

LE CONSEIL ROYAL DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE,

Vu l'ordonnance du 9 août 1836, relative aux grades dont devront justifier les étudiants des facultés;

Voulant régler les matières sur lesquelles les aspirants aux grades de bachelier ès-sciences mathématiques et de bachelier ès-sciences physiques seront interrogés,

A ARRÊTÉ CE QUI SUIT :

Art. 1er.

L'examen des aspirants au grade de bachelier ès-sciences mathématiques aura pour objet :

° L'arithmétique, la géométrie, la trigonométrie rectiligne, la trigonométrie sphérique, l'algèbre, comprenant la formule du binome et la résolution des équations numériques, l'application de l'algèbre à la géométrie, et les éléments de statique (1);

2° Les éléments de physique et de chimie, exigés des apirants au baccalauréat ès-sciences physiques.

Art. 2.

Les candidats au baccalauréat ès-sciences physiques devront répondre :

1° Sur l'arithmétique, la géométrie élémentaire, l'algèbre, comprenant les problèmes qui dépendent des équations du premier degré à une ou plusieurs inconnues; sur les machines simples et la partie des éléments de statique qui s'y rapportent (2);

(1) L'arrêté du Conseil royal ne donnant que l'énoncé sommaire des diverses parties des mathématiques exigées pour les deux baccalauréats, nous avons pensé qu'il serait utile et commode pour les aspirants, de trouver un programme développé des questions comprises dans cet énoncé.

(2) Ces matières, sauf les notions sur les machines simples et la partie des éléments de statique qui s'y rapportent, forment le programme de mathématiques pour la première année de philosophie dans les colléges royaux.

2° Les éléments de physique, de chimie et d'histoire naturelle, d'après les programmes ci-joints.

Art. 3.

La durée de l'examen, pour le grade de bachelier ès-sciences mathématiques, sera d'une heure au moins;
Celle de l'examen pour le grade de bachelier ès-sciences physiques devra être au moins de trois quarts d'heure.

Le Conseiller, vice-président,

Signé : VILLEMAIN.

Le Conseiller, exerçant les fonctions de secrétaire,

Signé : COUSIN.

Approuvé conformément à l'article 21 de l'ordonnance royale du 26 mars 1829.

Le Ministre de l'Instruction publique,

Signé : GUIZOT.

Pour copie conforme :

L'Inspecteur général chargé de l'administration
de l'Académie de Paris,

ROUSSELLE.

PROGRAMME DÉVELOPPÉ

DES

QUESTIONS DE MATHÉMATIQUES

sur lesquelles seront examinés les Aspirants au baccalauréat ès-sciences mathématiques et les Aspirants au baccalauréat ès-sciences physiques.

ARITHMÉTIQUE.

1. Qu'appelle-t-on *quantité*, *unité*, *nombre*, nombre *concret*, nombre *abstrait?*

2-5. *Numération.* Comment écrit-on un nombre énoncé? Comment énonce-t-on un nombre écrit?

6-8. *Addition.* Preuve de l'addition.

9-11. *Soustraction.* Preuve de la soustraction.

12-17. *Multiplication.*

18-19. Un produit ne change pas quand on change l'ordre de ses facteurs. Preuve de la multiplication.

20. Multiples des nombres.

21-26. *Division.* Preuve de la division.

27. *Signes abréviatifs.* Puissances des nombres.

28-31. *Divisibilité des nombres.* Propriétés des diviseurs communs,

32-36. A quoi reconnaît-on qu'un nombre est divisible par 2, 3, 5, 9, ou 11?

37. Preuve par 9, de la multiplication et de la division.

38-39. Nombres premiers.

40-43. Recherche du plus grand commun diviseur.

44-47. Propriétés des nombres premiers entre eux.

48-50. Décomposition des nombres en facteurs premiers.

51-52. Recherche des diviseurs des nombres.

53-57. *Des fractions.* Changements qu'elles éprouvent quand on fait varier leurs termes. Fractions irréductibles.

58-59. Nombres fractionnaires.

60-62. Addition des fractions.

63-65. Soustraction des fractions.

66-68. Multiplication des fractions.

69-72. Division des fractions. Remarques diverses.

73-74. *Fractions décimales.* Nombres décimaux.

75-79. Addition, soustraction, multiplication et division des nombres décimaux.

80-81. Réduction des fractions ordinaires en fractions décimales.

82-87. Fractions périodiques. Approximations.

88-95. *Nombres complexes.* Addition, soustraction, multiplication et division de ces nombres. Méthode des parties aliquotes.

96-102. *Système métrique.*

103-107. Comparaison des mesures anciennes et nouvelles.

108-114. *Des carrés et de la racine carrée.* Quantités incommensurables. Racine carrée des fractions.

115-121. *Des cubes et de la racine cubique.* Racine cubique des fractions.

122-124. *Proportions arithmétiques.* Moyenne arithmétique entre deux nombres.

125-128. Progressions arithmétiques. Comment insère-t-on des moyens arithmétiques entre deux nombres.

129-137. *Proportions géométriques.* Leurs diverses propriétés. Moyenne géométrique.

138-141. Progressions géométriques Comment insère-t-on des moyennes géométriques entre deux nombres.

142-147. *Des logarithmes.* Logarithme d'un produit, d'un quotient, d'une puissance, d'une racine.

148-150. Logarithmes négatifs.

151-154. Usage des tables de logarithmes. Compléments arithmétiques.

155-158. *Règles de trois,* de société, de mélange et d'alliage, d'escompte et d'intérêts simples et composés.

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Géométrie plane.

1-2. Qu'appelle-t-on *volume, aire, ligne, ligne droite, ligne brisée, ligne courbe, surface plane* ou plan, *surface courbe*, etc.?

3-4. *De la ligne droite.*

5-13. Des angles. Propriétés des angles droits, adjacents, opposés au sommet; angles aigus, obtus; compléments, suppléments.

14-17. Perpendiculaires et obliques.

Géométrie dans l'espace.

199-200. *Angles polyèdres;* propriété générale.

201-205. *Des prismes.*

206-208. *Du cylindre.*

209-210. *Du parallélépipède.*

211-213. *Des pyramides;* du tronc de pyramide.

214-216. *Du cône;* du tronc de cône.

217. *Des polyèdres en général.*

218-224. *De la sphère.* Grands cercles, petits cercles, pôles; calotte, segment, zone, tranche, fuseau, coin sphérique; triangles sphériques; triangles polaires.

225-226. *Similitude* des pyramides, des polyèdres.

227-234. *Des aires.* Surface latérale du prisme régulier, du cylindre, de la pyramide régulière, du cône, du tronc de pyramide, du tronc de cône.

235. Aire de la sphère; aire de la calotte et de la zone sphériques.

236. Aire du cylindre circonscrit à la sphère.

237-242. *Des volumes.* Volume du parallélépipède.

243-245. Volume du prisme et du cylindre.

246-248. Volume de la pyramide et du cône.

249-251. Volume des polyèdres quelconques. Volume de la sphère, du secteur et de la tranche sphériques.

252-263. Comparaison des volumes des pyramides et des polyèdres semblables.

254. Volume du cylindre circonscrit à la sphère.

ALGÈBRE.

(L'emploi des formules algébriques étant indispensable à l'étude de la trigonométrie, nous l'avons renvoyée après l'algèbre, page 128 et suivantes.)

Première partie.

1-2. But de l'algèbre.

3-8. Quantités littérales ou algébriques, polynomes, termes, monomes, termes positifs ou négatifs, degré de chaque terme; polynomes homogènes. Coefficient. Réduction des termes semblables; ce que c'est qu'ordonner un polynome.

9-10. *De l'addition algébrique.*

11-13. *De la soustraction algébrique.*

14-20. *De la multiplication algébrique.*

21-24. Carré d'une somme; carré d'une différence. Produit d'une somme de deux quantités par leur différence. Décomposition d'un polynome en facteurs.

Seconde partie.

(Non exigée des aspirants au baccalauréat ès-sciences physiques.)

115. De l'élimination.

116. De l'équation aux carrés des différences.

TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE.

1-2. Qu'appelle-t-on *sinus, tangente, sécante, cosinus, cotangente, cosécante?*

3. Les lignes trigonométriques d'un arc quelconque peuvent être ramenées à celles d'un arc plus petit qu'un quadrant.

4. Comment ces lignes varient quand l'arc varie.

5. Les lignes trigonométriques n'expriment que des rapports.

6-7. *Formules trigonométriques.* Relation entre les lignes trigonométriques d'un même arc.

8. Relations entre les sinus et cosinus de deux arcs et les sinus et cosinus de la somme ou de la différence de ces arcs,

9-10. Sinus et cosinus du double d'un arc, ou de sa moitié.

11-16. Formules usitées qui se déduisent des précédentes.

17-20. Construction et usage des tables trigonométriques.

21-24. Relation entre les côtés d'un triangle et les lignes trigonométriques de ses angles.

25-28. *Résolution des triangles rectangles.*

29-32. *Résolution des triangles obliquangles.*

33-35. Applications. Calculer la hauteur d'un édifice, une distance inaccessible, etc.

Trigonométrie sphérique.

36. Propriétés des triangles sphériques. Triangles sphériques rectangles birectangles, trirectangles.

37-41. Formules fondamentales.

42-43. Résolution des triangles sphériques rectangles.

44-46. Résolution des triangles sphériques quelconques. Analogies de Neper.

47-48. Applications. Réduire un angle à l'horizon, connaissant les latitudes et les longitudes de deux points du globe, calculer la distance de ces points.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

1. But de la géométrie analytique.

2-14. *Construction géométrique des formules d'algèbre.*

15-16. *Problèmes déterminés.*

17. *Problèmes indéterminés.* Lieux géométriques.

18-19. Coordonnées. Toute équation entre les coordonnées représente un lieu géométrique.

20-21. Transformation des coordonnées.

22-24. *Lignes du 1er degré.* Ce sont des lignes droites.

25-30. Équation d'une droite, d'après diverses conditions. Intersection de deux droites; distance de deux points; distance d'un point à une droite.

31-33. *Courbes du second degré.* Discussion de l'équation générale. Ellipses, hyperboles, paraboles.

34-37. Simplification de l'équation générale.

38-39. *Du cercle.* Démonstration analytique de diverses propriétés connues.

40-42. Tangente et normale au cercle.

43-46. *De l'ellipse.* Son centre, ses axes. Comparaison avec le cercle qui a le grand axe pour diamètre.

47-50. Des foyers et des directrices. Propriétés des rayons vecteurs. Comment on décrit l'ellipse d'un mouvement continu.

51-55. Tangente et normale à l'ellipse. Angles qu'elles forment avec les rayons vecteurs. Construction géométrique de la tangente.

56-58. Des diamètres. Diamètres conjugués.

59-60. Cordes supplémentaires; leurs relations avec les diamètres conjugués.

61. Autre moyen de mener une tangente.

62. Tracer deux diamètres conjugués, qui fassent entre eux un angle donné.

63. Énoncé de deux théoremes relatifs à l'ellipse.

64-65. *De l'hyperbole.* Premier axe, second axe, hyperbole équilatère.

66-68. Des foyers et des directrices. Propriétés des rayons vecteurs. Comment on décrit l'hyperbole d'un mouvement continu.

69-72. Tangente et normale à l'hyperbole. Angles qu'elles forment avec les rayons vecteurs.

73-74. Diamètres et cordes supplémentaires.

75-79. Des asymptotes. Équation de l'hyperbole rapportée à ces lignes. Les portions d'une sécante comprises entre la courbe et ses asymptotes sont égales. Conséquences de cette propriété.

80-81. *De la parabole.* Son sommet; son axe.

82. Du foyer et de la directrice. Comment on décrit la parabole d'un mouvement continu.

83-87. Tangente et normale à la parabole. Angles qu'elles forment avec l'axe et le rayon vecteur. Divers moyens de mener une tangente.

88. Diamètres de la parabole.

89-94. *Des coordonnées polaires.* Équations polaires des courbes du second degré.

STATIQUE.

1-2. Qu'entend-on par forces? Comment représente-t-on les forces? Forces égales et directement opposées.

3-6. *Composition et décomposition des forces.* Résultante; composantes. Résultante de plusieurs forces de même direction.

7-12. Composition des forces parallèles; couples; centre des forces parallèles.

13-16. Parallélogramme des forces. Résultante d'un nombre quelconque de forces appliquées en un même point.

17-21. *Composition et décomposition des couples.*

22-24. *Conditions générales de l'équilibre.* Cas où il y a dans le système un point fixe ou un axe fixe.

25-28. *Du centre de gravité.*

29. *Des machines simples.*

30-32. Le levier, la balance, la poulie.

33. Le tour.

34-35. Le plan incliné, le coin.

36-40. *Des machines composées.* La vis, le polygone funiculaire, les mouffles, les roues dentées.

PHYSIQUE.

Propriétés générales des corps.

1. Étendue. — *Impénétrabilité.* — Porosité. — Divisibilité. — Corps solides. — Liquides. — Gazeux.

2. Inertie. — Mobilité. — Forces. — Composition des forces. — Considérations générales sur l'équilibre et le mouvement. — Mouvement uniforme. — Vitesse: — mouvement uniformément varié. — Vitesse. — Mouvement relatif. — Mouvement absolu. — Quantités de mouvement. — Communication du mouvement entre des masses *non élastiques.*

Pesanteur.

3. Direction de la pesanteur. — Lois de la chute des corps démontrée par le plan incliné et par la machine d'Atwood.

4. Poids. — Centre de gravité. — Définition de la masse et de la densité. — Balances.

5. Mouvement de rotation. — Expériences sur la force centrifuge.

6. Lois des oscillations du pendule. — Application du pendule à la détermination de l'intensité de la pesanteur, et de la figure de la terre.

Hydrostatique.

7. Principe d'égalité de pression. — Conditions d'équilibre des liquides. — Pressions verticales et latérales — Équilibre des liquides homogènes ou hétérogènes dans les vases communiquants. — Presse hydraulique. — Superposition de plusieurs liquides de densités différentes.

8. Principe d'Archimède démontré par le raisonnement et par l'expérience. — Détermination des densités des corps solides et liquides. — Aréomètres à volumes constants et à poids constants. Usages des tables des pesanteurs spécifiques.

9. Fluides élastiques. — Pesanteur de l'air démontrée par l'expérience. — Baromètre. — Loi de Mariotte. — Manomètres. — Machine pneumatique. Machine de compression. — Fusil à vent. — Fontaines de compression. — Application du principe d'Archimède aux fluides élastiques. — Mongolfières. — Ballons. — Mélange des fluides élastiques.

10. Enoncé du théorème de Toricelli sur l'écoulement des liquides; moyen de le vérifier par expérience, en ayant égard à la contraction de la veine. — Vase de Mariotte. — Siphon. — Siphon intermittent. — Fontaine intermittente. — Pompes aspirantes et foulantes.

Chaleur.

11. Dilatation des corps par la chaleur. — Construction des thermomètres. — Mesure des dilatations des solides, des liquides et des gaz. — Détermination de la densité des gaz.

12. Chaleur rayonnante. — Sa réflexion. — Sa transmission au travers de différents corps. — Pouvoirs émissifs, absorbants et réfléchissants. — Equilibre mobile de température. — Réflexion apparente du froid.

13. Conductibilité des corps pour la chaleur.

14. Passage de l'état solide à l'état liquide, et passage inverse de l'état liquide à l'état solide. — Chaleur latente. — Mélanges réfrigérants.

15. Détermination des capacités par la méthode des mélanges et par la fusion de la glace.

16. Passage de l'état liquide à l'état de vapeur. — Formation des vapeurs dans le vide. — Maximum de leur force élastique. — Mesure de la force élastique maximum à diverses températures. — Ébullition, *chaleur latente.* — Condensation. — Idée des principes sur lesquels repose la construction des machines à vapeur.

17. Dans le mélange des vapeurs avec les gaz, les forces élastiques s'ajoutent. — Hygrométrie. — Sources de chaleur et de froid.

Électricité.

18. Développement de l'électricité par le frottement. Corps conducteurs et non conducteurs. — Expériences sur lesquelles est fondée l'hypothèse de deux fluides.

19. Électricité par influence. — Electroscopes. — Électrophore. — Machines électriques.

20. Loi des attractions et des répulsions électriques. — Distribution de l'électricité sur des corps conducteurs. — Pouvoir des pointes.

21. Électricités dissimulées. — Condensateurs. — Bouteille de Leyde. — Batteries électriques.

Galvanisme.

22. Développement de l'électricité par le contact. — Principes sur les-

quels repose la construction de la pile voltaïque. — Modification de cet appareil. — Effets qu'il produit.

Magnétisme.

23. Attraction qui s'exerce entre l'aimant et le fer. — Expériences par lesquelles on reconnait qu'il y a toujours au moins deux pôles dans un aimant. — Expériences sur lesquelles est fondée l'hypothèse de deux fluides magnétiques.

24. Définir la déclinaison et l'inclinaison, et donner une idée des boussoles de déclinaison et d'inclinaison.

25. Procédés d'aimantation.

Électro-magnétisme.

26. Expériences qui constatent l'action des courants sur les aimants, et l'action des courants sur les courants.

27. Construction et usage du multiplicateur.

28. Moyens de produire les courants thermo-électriques. — Description du thermo-multiplicateur.

Actions moléculaires.

29. Capillarité. — Ascension ou dépression des liquides dans les tubes capillaires, et autres effets de la capillarité.

30. Élasticité. — Compressibilité des liquides. — Compressibilité des solides. — Élasticité de tension et de torsion. — Ténacité.

Acoustique.

31. De la production du son et de sa vitesse de transmission dans l'air atmosphérique.

32. Lois des vibrations des cordes. — Évaluation numérique des sons. — Sons graves et aigus.

Optique.

33. Propagation de la lumière dans un milieu homogène. — Moyen de déterminer le temps qu'elle met pour venir du soleil à la terre.

34. Réflexion. — Lois de la réflexion: — Effets des miroirs plans et des miroirs sphériques, concaves et convexes:

35. Réfraction. — Lois de la réfraction: — Effets des prismes, considérés par rapport à la déviation seulement. — Effets des lentilles concaves et convexes.

36. Décomposition et recomposition de la lumière.

37. Structure de l'œil et vision.

38. Donner une idée des instruments d'optique les plus simples, tels que : la chambre claire. — La chambre noire. — La loupe. — Le microscope simple. — Le miscroscope solaire. — La lunette de Galilée. — La lunette astronomique. — Les télescopes.

Météorologie.

39. Moyenne hauteur annuelle du baromètre en différents lieux: — Li-

mites des oscillations extrêmes. — Variations horaires à diverses latitudes.

40. Températures moyennes annuelles à la surface du sol à diverses latitudes. — Climats tempérés. — Climats excessifs. — Températures à diverses profondeurs.

41. Quantité de pluie à diverses hauteurs et en différents lieux. — Formation de la rosée, de la gelée blanche, du verglas, etc.

42. Électricité atmosphérique. — Effet de la foudre. — Construction des paratonnerres.

CHIMIE.

1° Considérations générales sur la nature des corps, et sur la force qui unit leurs parties constituantes.

2° Nomenclature chimique; ordre d'après lequel les corps doivent être étudiés.

Dans l'étude des corps, s'attacher à leurs principales propriétés physiques, à leurs propriétés chimiques caractérisques, à leur préparation et à leur composition; ne pas négliger toutefois de parler de leur état naturel et de leurs principaux usages.

3° Notions sur la chaleur et l'électricité (celles qui sont nécessaires pour l'intelligence des phénomènes chimiques.)

4° Lois suivant lesquelles les corps se combinent; nombres proportionnels.

Corps simples non métalliques.

5° Oxigène; définition et cause de la combustion; flamme.

6° Hydrogène; carbone; phosphore.

7° Soufre; chlore; azote.

8° Air atmosphérique.

Composés combustibles non métalliques.

9° Hydrogène proto et bicarboné; hydrogène phosphoré.

Des oxides et acides non métalliques.

10° De l'eau.

11° De l'oxide de carbone; de l'acide carbonique; de l'oxide de phosphore et des acides hypophosphorique et phosphorique.

12° Des acides sulfureux et sulfurique.

13° Des oxides d'azote, et des acides azoteux et azotique.

14° Des acides chlorhydrique; fluorhydrique; sulfhydrique.

Des métaux.

15° et 16° *Étude générale.* Classification des métaux; leurs propriétés physiques; action qu'exercent sur eux la chaleur, l'électricité, le fluide magnétique, l'oxigène, l'air, les corps combustibles (carbone, phosphore, soufre, chlore); l'eau, les acides sulfurique, azotique, chlorhydrique.

Notions sur l'état naturel des métaux, et la préparation des plus importants; étain, fer, cuivre, plomb, mercure, argent, or et platine.

Des alliages.

17° *Étude générale.* Insister sur la dureté que prennent les métaux en s'alliant; sur la décomposition des alliages par la chaleur, lorsqu'ils sont formés de métaux fixes et de métaux volatils, ou de métaux dont les degrés de fusion sont très différents; sur les phénomènes que présentent les alliages dans leur contact avec l'air à une température élevée; enfin, sur la propriété que possèdent les métaux de s'unir en toutes proportions. Indiquer ensuite la composition ou la nature des amalgames, du bronze, du métal des cloches, du tamtam, de l'étamage, du fer-blanc, du moiré, de la soudure des plombiers, des cararactères d'imprimerie, du cuivre jaune, des monnaies d'argent, d'or, de billon; de l'alliage fusible dans l'eau bouillante.

Des oxides métalliques.

18°, 19° et 20° *Étude générale.* Classification; principales propriétés physiques des oxides; action qu'exercent sur eux la chaleur, l'électricité, le fluide magnétique, l'hydrogène, le carbone, le chlore, le potassium, l'eau, les acides.

Rappeler les lois de leur composition, donner une idée de la préparation de la plupart des oxides, en faisant voir comment on peut se les procurer, soit en combinant le métal à l'oxigène, soit en les extrayant des sels par les bases, ou des azotates ou des carbonates par la chaleur.

Étude particulière. Potasse, soude, baryte, chaux, magnésie, alumine, ammoniaque.

Des sels.

21° et 22° *Étude générale.* Nature des sels; leur division en familles, genres et espèces. Propriétés qu'ont les oxides de s'unir en diverses proportions avec le même acide. Lois auxquelles les sels sont soumis dans leur composition; conséquences importantes qu'on en tire pour l'analyse.

Action de l'eau, de la glace sur les sels. — Froids artificiels. — *Action hygrométrique de l'air; sels efflorescents, déliquescents.*

Action du feu et de la pile sur les sels; précipitation des métaux des dissolutions salines par d'autres métaux. Prouver ainsi que dans les sels de même genre, et au même état de saturation, les quantités d'acides sont proportionnelles à la quantité d'oxigène des oxides. Faire voir que les bases et les acides tendent à décomposer les sels, savoir : les bases, en s'emparant des acides, et les acides en s'emparant des bases des sels; citer les bases et les acides les plus énergiques.

Décomposition réciproque de deux sels solubles qui peuvent former un sel soluble et un sel insoluble.

Citer les principaux sels doubles.

23° Caractères génériques des carbonates; carbonate de chaux; carbonate

de potasse; potasse du commerce; carbonate de soude; soude du commerce; carbonate d'ammoniaque.

24° et 25° Caractères génériques des phosphates; phosphate de chaux; phosphate d'ammoniaque : s'en servir pour rendre incombustibles les tissus les plus inflammables.

Caractères génériques des sulfates; sulfates de chaux, de soude, de magnésie; alun; sulfates de fer, de cuivre.

26° Caractères génériques des azotates; azotate de potasse, poudre.

Caractères génériques des chlorates; chlorate de potasse; poudres fulminantes.

27° et 28° Caractères génériques des chlorures; chlorures de sodium, de baryum; bichlorure d'étain, protochlorure d'antimoine; chlorures de mercure, d'or, de platine; chlorure de cobalt; encres sympatiques.

29° Chlorhydrate d'ammoniaque; silicates, verres, poteries, mortiers et mastics; pierres précieuses.

30° et 31° Généralités sur les matières végétales et animales.

ZOOLOGIE.

Questions générales.

1. Définition générale des corps organisés animaux, par comparaison avec les corps organisés végétaux, et avec les corps inorganisés, en ayant successivement égard :

1° A la composition chimique ou moléculaire;

2° A la structure anatomique ou textulaire;

3° A la forme considérée d'une manière générale, et aux limites dont elle est susceptible;

4° A l'origine, à la formation ou naissance;

5° Au mode d'accroissement, par suite de la nutrition;

6° Au mode de destruction, de décomposition, par suite de la mort.

2. Définition de ce que l'on entend par *caractères* en général et par caractères *naturels, artificiels, positifs, négatifs*, et par *subordination de caractères,* pour parvenir à la conception et à l'établissement d'une disposition méthodique des animaux.

3. Exposition des principes des différentes sortes de distribution méthodique des animaux, connues sous le nom de *systèmes*, de *méthode systématique, dichotomique*, de *méthode naturelle*, et, par suite, de ce qu'on entend, ou doit entendre, par *individu, variété, genre, famille, ordre, classe, embranchement, type* et *règne*.

4. Donner la définition et les principes de la *nomenclature*, appliquée à la dénomination et à la classification méthodique des animaux.

5. Donner une idée générale de ce que l'on entend par distribution *géographique des animaux* à la surface de la terre, ou de la *géographie zoologique*.

Questions spéciales.

6. Quelles sont les différences principales que présentent les animaux, considérés sous le rapport de la forme générale et du volume?

7. Quels sont les éléments anatomiques qui entrent dans la composition des animaux, et qu'entend on par *solides*, *liquides*, *produits?* Qu'est-ce qu'une *fibre*, un *tissu?* Combien distingue-t-on de tissus dans les animaux? et dans quel ordre doivent-ils être classés?

Qu'est-ce qu'un *parenchyme?*

Qu'est-ce qu'un *organe?*

Qu'est-ce qu'un *appareil?*

8. Quels sont les principaux appareils qui constituent la machine animale, et quelles sont les fonctions qu'ils exécutent?

9. Qu'entend-on par fonctions et appareils de la *vie animale* et de la *vie organique?* Donner un exemple en définissant comparativement ce que c'est que l'*absorption*, l'*exhalation*, la *sécrétion*, la *sensation*, la *locomotion.*

10. Donner l'analyse de quelques-uns des appareils et de leurs fonctions, comme de celui de la *vision* et de l'*audition*, dans le système sensorial; de *la production de la voix,* de la *marche*, du *vol*, de la *natation*, dans le système locomoteur; de la *digestion*, de la *respiration*, de la *circulation*, dans le grand appareil de la *nutrition.*

11. Qu'entend on par *série* ou *échelle animale?*

12. Analyser les principaux systèmes de zoologie et les principes sur les quels ils reposent.

13. Faire connaître les principales différences extérieures et intérieures qui distinguent les grandes divisions du règne animal, *mammifères*, *oiseaux*, *reptiles*, *amphibiens*, *poissons*, *insectes*, *mollusques* et *zoophytes*, et les principes de distribution systématique des espèces qu'elles renferment.

14. Donner enfin quelques exemples de l'emploi de la méthode naturelle appliquée à la distribution géographique des animaux, et à l'économie domestique.

BOTANIQUE.

1. Qu'est-ce que le VÉGÉTAL? Qu'a-t-il de commun avec l'ANIMAL et le MINÉRAL? En quoi diffère-t-il de l'un et de l'autre?

2. Nommer, définir, décrire, selon l'ordre de leur apparition, les organes simples ou composés de la végétation et de la reproduction.

3. Ce qu'on entend par ces mots : *tissu végétal.* Faire connaître la forme primitive de ce tissu et les principales modifications que souvent il éprouve en vieillissant.

4. Comment, dans la généralité des espèces, il existe un certain accord plus ou moins sensible, entre la répartition des diverses modifications du tissu, et les trois grandes divisions admises par tous les phytologistes, de végétaux acotylédonés, monocotylédonés et dicotylédonés, de sorte que, pour l'ordinaire, on peut reconnaître à laquelle des trois divisions appartient une espèce, par la seule inspection de sa structure interne.

5. Dire ce qu'on sait touchant les principaux phénomènes de la vie végétale, tels que l'absorption, la transpiration, la respiration, le mouvement et l'élaboration des fluides, la nutrition, l'accroissement des parties anciennes, l'apparition de parties nouvelles, la formation des ovules avec ou sans le concours de la fécondation, la gestation durant laquelle l'ovule fécondé passe à l'état de graine, la germination, la tendance des racines vers le centre de la terre et des tiges vers le ciel, les maladies, la mort, etc.

6. Décrire les mouvements particuliers qui se manifestent à l'extérieur dans plusieurs organes, et discuter les hypothèses par lesquelles on a essayé de les expliquer.

7. Montrer la parfaite convenance de certaines dispositions organiques pour l'accomplissement des phénomènes de l'absorption, de la transpiration, de la respiration, etc., et indiquer, autant que le permettent les progrès de la science, l'influence qu'exercent sur ces phénomènes, les agents extérieurs pondérables ou impondérables.

8. Que doit-on entendre par ces mots : *Caractères botaniques*? D'après quelles données est-on convenu de mesurer l'importance relative de ces caractères, et, par conséquent, de les subordonner les uns aux autres? Appréciation des résultats plus ou moins satisfaisants obtenus par ce procédé.

9. Définir, d'après les auteurs les plus accrédités, l'individu, l'espèce, la variété, le genre, la famille, et mettre en lumière, à l'aide de quelques exemples bien choisis, ce qu'il y a de positif ou d'hypothétique dans les définitions.

10. Qu'est-ce que les classifications botaniques, dites *méthodes* ou *systèmes*, considérées sous le point de vue le plus général?

11. Dans l'état actuel de la phytologie, peut-on, comme on le fait souvent en zoologie, démontrer la nécessité de la coexistence des principaux caractères employés comme base des Méthodes?

12. Donner l'analyse des Méthodes de Tournefort, de Linnée, de Jussieu, et en montrer l'utilité pratique.

13. Indiquer sommairement la distribution des races végétales à la surface du globe, et les principales causes qui président à cet arrangement.

14. Enfin, donner des notions générales sur l'emploi des végétaux pour les besoins et les jouissances de l'espèce humaine.

MINÉRALOGIE.

1. Quelles sont les différences générales qu'on observe entre les corps bruts et les corps organisés?

2. Quelles sont les formes essentielles des corps bruts?

3. Quelles sont les différences principales des six groupes auxquels on peut rapporter toutes les formes cristallines?

4. Qu'entend-on par clivage ou structure régulière?

5. En quoi consistent les structures irrégulières?

6. Quelles sont les autres propriétés physiques que présentent les minéraux?

7. De combien de manières les corps bruts peuvent-ils différer les uns des autres sous le rapport de la composition?

8. Comment s'établissent les différences entre des corps qui sont formés des mêmes éléments ?

9. L'analyse seule suffit-elle toujours pour établir clairement la différence que les corps présentent ?

10. Lorsqu'elle ne suffit pas, comment y supplée-t-on ?

11. Quels sont les degrés relatifs d'importance qu'on peut attribuer aux diverses propriétés des minéraux ?

12. Quelles sont celles de ces propriétés qu'on peut plus particulièrement employer, comme caractères ?

13. Définition de l'espèce minérale.

14. Que doit-on entendre par genre en minéralogie ?

15. Peut-on former quelques autres groupes naturels de minéraux ?

16. Quels sont les principaux minéraux qui composent les formations cristallines du globe, et ceux qui se trouvent dans les formations sédimentaires ?

17. Quelles sont les principales applications des minéraux aux besoins de la société ?

GÉOLOGIE.

1. Quelle est la forme de la terre ?

2. Quelles conséquences générales peut-on tirer du degré d'aplatissement de la terre à ses pôles ?

3. Quelle est à peu près l'épaisseur de la partie extérieure connue du globe terrestre, relativement au diamètre de celui-ci ?

4. Qu'entend-on par *roche*, *dépôt*, *stratification*, *superposition*, par *fossiles*, *formation*, *terrain*, *sol ?*

5. En comparant les *roches* aux produits actuellement formés par les eaux et par les volcans, peut-on les distinguer en roches de *formation aqueuse* et roches de *formation ignée ?*

6. Quels sont les caractères particuliers de ces deux modes de formation ?

7. Comment reconnaît-on l'âge relatif des divers dépôts formés par les eaux?

8. Les mêmes moyens peuvent-ils servir pour classer dans l'ordre de leur ancienneté, les dépôts d'origine ignée ?

9. Donner une idée de la composition et de la structure du *terrain* qui renferme la *houille*.

10. Indiquer les principales conditions de composition et de structure du sol, favorables à la recherche et à la découverte des sources et des eaux jaillissantes.

11. Dire dans quelles formations et dans quels terrains se rencontrent les divers minerais métalliques, les dépôts charbonneux, les marbres, le sel gemme, le gypse, les pierres lithographiques, les pierres à chaux hydraulique, les argiles à porcelaine et à poterie, les marnes à amender.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

ERRATA.

Page 27, ligne 29, $= 0{,}46$, *lisez* : $= 0{,}45$.

32, $\frac{7}{2^2 \times 5^3}$, *lisez* : $\frac{7}{2 \times 5^3}$.

39, 15, $= \frac{}{12 - 4}\frac{5}{}$, *lisez* : $= \frac{15 - 5}{12 - 5}$.

17, $= \frac{12^3}{3^3}$, *lisez* : $= \frac{12^3}{4^3}$.

49, 6 (en bas), KBKA, *lisez* : KB<KA.

89, 19, $\frac{a-b}{2} + b =$, *lisez* : $\frac{a-}{2}\frac{b}{} + b =$.

97, 16, $+ a^{m-2} a^{m-3} b + b^2$, *lisez* : $+ a^{m-2}b + a^{m-3}b^2$.

103, 8 (en bas), $+ 10 a^2 + ca^4 bc$, *lisez* : $+ 10a^2c + a^4bc$.

111, 16, $+ 4 a^2c_2 + 6 abc$, *lisez* : $+ 4 a^2c^2 + 6 ab^2c$.

114, 17,, 22 et 28, au lieu de $(m-n)$, *lisez* : $(m-n+1)$.

121, 19, $K\frac{x \quad ^{m+n+1-1}}{x-1}$, *lisez* : $K\frac{x^{m-n+1} - 1}{x-1}$.

125, 14, qR_n *lisez* : QR_n.

15, q, *lisez* : p'.

126, 12 et 14, *même correction*.

132, 12, sin. $(a+b)$, *lisez* : cos. $(a+b)$.

133, 13, cos. a, *lisez* : cos. b.

136, 28, B$=$, *lisez* : AB$=$.

146, 2 (en bas), $= \frac{yc}{n}$, *lisez* : $z = \frac{yc}{n}$.

147, 12, *supprimez* le premier d.

149, 11 (en bas), ah, *lisez* : a^2h^2.

160, 3, *supprimez* le premier 2.

5 (en bas), α et les..., *lisez* : α et β les...

dernière, $r^2y'^2$ *lisez* : r^2y'.

163, 6 (en bas), $\frac{a+cx'}{a}$, *lisez* : $\frac{a^2+cx'}{a}$

169, 18, $-\frac{x'x''}{m^2}$, *lisez* : $-\frac{m^2}{x'x''}$.

171, 22, y^2, *lisez* : y'^2.

^2p, *lisez* : $2p$.

200, 15, *rétablissez le signe* $=$ *après* g.

248, 3, *lisez* $^5/_3$ *au lieu de* $^5/_5$.

272, 33, *lisez* sulfurique, *au lieu de* phosphorique.

MANUEL
DES ASPIRANTS
AU BACCALAURÉAT
ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES
ET
AU BACCALAURÉAT ÈS-SCIENCES PHYSIQUES.

ARITHMÉTIQUE.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

1. L'arithmétique est la partie des mathématiques qui traite spécialement des *nombres*.

On appelle *nombre* la collection de plusieurs *unités*. On nomme *unité* une *quantité* qui sert de terme de comparaison entre des quantités de même espèce. On entend par *quantité* tout ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution.

Un nombre est *concret* quand l'espèce de ses unités est désignée; un nombre est *abstrait* quand on fait abstraction de l'espèce de ses unités.

DE LA NUMÉRATION.

2. La *numération* enseigne à former les nombres et à les représenter, soit par des mots, soit par des caractères écrits.

Pour former les nombres, on part de l'unité, à laquelle on réunit une autre unité, puis une autre, puis encore une autre, et ainsi de suite.

Numération parlée.

3. Les noms des premiers nombres sont: *un, deux, trois, quatre,*

cinq, six, sept, huit, neuf, dix. On considère la réunion de *dix* unités, comme une nouvelle espèce d'unité que l'on nomme *dizaine*, et l'on compte par dizaines comme par unités. Les noms des dix premières dizaines sont : *dix, vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, soixante-dix, quatre-vingt, quatre-vingt-dix* et *cent*. Au lieu de *soixante-dix*, *quatre-vingt*, *quatre-vingt-dix*, on disait autrefois *septante, octante* et *nonante*. Pour désigner les nombres compris entre dix et vingt, entre vingt et trente, entre trente et quarante, entre quarante et cinquante, entre cinquante et soixante, on ajoute aux mots, dix, vingt, trente, quarante et cinquante les noms des neufs premiers nombres. Seulement, au lieu de *dix-un, dix-deux, dix-trois, dix-quatre, dix-cinq, dix-six*, on dit *onze, douze, treize, quatorze, quinze* et *seize*. Pour désigner les nombres compris entre soixante et quatre-vingt, entre quatre-vingt et cent, on ajoute aux mots soixante, quatre-vingt, les noms des dix-neuf premiers nombres.

On considère la réunion de *dix dizaines*, ou *cent*, comme une nouvelle espèce d'unité que l'on nomme *centaine*, et l'on compte par centaines comme par unités, en disant : *cent, deux cents, trois cents, quatre cents, etc.* Pour désigner les nombres compris entre cent et deux cents, entre deux cents et trois cents, entre trois cents et quatre cents, etc., on ajoute aux mots cent, deux cents, trois cents, etc. les noms des quatre-vingt-dix-neuf premiers nombres.

On considère la réunion de *dix centaines* comme une nouvelle espèce d'unité *principale*, que l'on nomme *mille*, et l'on compte par mille comme par unités, depuis un mille jusqu'à neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille. Pour désigner les nombres compris entre mille et deux mille, entre deux mille et trois mille, entre trois mille et quatre mille, ect. on ajoute aux mots mille, deux mille, trois mille, etc., les noms des neuf cent quatre-vingt-dix-neuf premiers nombres.

On considère la réunion de *mille mille* comme une nouvelle espèce d'unité principale, que l'on nomme *million*, et l'on compte par millions comme par unités, depuis un million jusqu'à neuf cent quatre-vingt-dix-neuf millions.

On considère la réunion de *mille millions* comme une nouvelle espèce d'unité principale, que l'on nomme *billion*, ou milliard; la réunion de mille billions se nomme *trillion*; et ainsi de suite.

Les *unités, dizaines, centaines, mille, dizaines de mille, centaines de mille, millions, dizaines de millions, etc.* contenus dans un nombre, se nomment les différents *ordres* d'unités de ce nombre. Les *unités, dizaines, centaines*, forment la première *classe*, ou la classe des unités simples ; les *mille*, *dizaines de mille*, *centaines de mille*, forment la seconde classe, ou la classe des mille ; les *millions, dizaines de millions*, *centaines de millions*, forment la troisième classe, ou la classe des millions ; et ainsi de suite.

Numération écrite.

4. On représente les *neuf* premiers nombres par les caractères 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9 nommés *chiffres*. On se sert des mêmes chiffres pour représenter les dizaines, les centaines, les mille, les dizaines de mille, etc.; mais on convient que la première place à droite sera occupée par le chiffre des unités, la seconde par celui des dizaines, la troisième par celui des centaines, et ainsi de suite. Afin de conserver à chaque chiffre le rang qui lui convient, on remplace par le caractère 0, nommé *zéro*, chaque ordre d'unités qui manque.

Pour écrire en chiffres un nombre énoncé, on place successivement, de gauche à droite, les chiffres qui représentent les centaines, dizaines et unités de chaque classe, en commençant par la plus élevée; et l'on remplace par un zéro chaque ordre d'unité qui manque. Ainsi, le nombre *trente billions, vingt-cinq millions, sept cent huit mille, neuf*, s'écrit 30025708009.

Pour énoncer un nombre écrit, on le partage en tranches de trois chiffres, à partir de la droite, la dernière tranche à gauche pouvant toutefois avoir moins de trois chiffres. On énonce alors chaque tranche séparément, à partir de la gauche, en nommant successivement les centaines, les dizaines et les unités de chacune, et en donnant à ces unités le nom de l'unité principale qu'elles représentent. Ainsi, le nombre 259,085,704 s'énonce *deux cent cinquante-neuf millions, quatre-vingt-cinq mille, sept cent quatre unités*.

5. La valeur d'un même chiffre est de dix en dix fois plus grande, à mesure qu'il avance d'un rang vers la gauche; en mettant par conséquent un zéro, deux zéros, trois zéros, etc. à la droite d'un nombre, on rend ce nombre, dix fois, cent fois, mille fois, etc. plus grand. Les zéros placés à la gauche d'un nombre ne changent pas sa valeur, puisque le rang de chaque chiffre se compte à partir de la droite.

DE L'ADDITION.

6. L'*addition* est une opération par laquelle on réunit plusieurs nombres en un seul, nommé *somme* ou *total*.

La numération suffirait pour faire la somme de deux nombres, car on n'aurait qu'à ajouter successivement au premier toutes les unités du second; c'est ainsi que l'on compte sur ses doigts. Mais, quand on sait additionner de mémoire les nombres d'un seul chiffre, on emploie, pour les nombres plus grands, un autre procédé.

7. Pour additionner plusieurs nombres quelconques, on les écrit les uns sous les autres, de manière que les chiffres de même rang soient dans une même colonne; et l'on tire un trait sous le dernier nombre pour le séparer du résultat. On fait la

somme de la colonne des unités; si cette somme ne dépasse pas 9, on l'écrit telle qu'on l'a trouvée, sous la colonne des unités; si cette somme contient des dizaines et des unités, on n'écrit que les unités sous la colonne des unités, et l'on retient les dizaines pour les joindre à la colonne des dizaines. On opère sur la colonne des dizaines, et sur les suivantes, comme on a opéré sur la colonne des unités; et l'on écrit la somme fournie par la dernière colonne à gauche, au-dessous de cette colonne, telle qu'on l'a trouvée.

D'après cela l'addition des nombres :

$$\begin{array}{r} 5329 \\ 307 \\ 9218 \\ 17049 \\ \hline 31803 \end{array}$$

donnera pour somme 31803

8. Si l'on commençait l'opération par la gauche, comme l'addition de chaque colonne peut fournir des unités de l'ordre immédiatement supérieur, on serait exposé, après avoir additionné chaque colonne, à corriger le résultat fourni par la colonne précédente.

On additionne ordinairement chaque colonne de haut en bas; quand l'opération est terminée, on peut, pour la vérifier, la recommencer en additionnant de bas en haut; si l'on obtient le même résultat, il est probable qu'on a opéré exactement. C'est ce qu'on appelle faire la *preuve* de l'addition.

DE LA SOUSTRACTION.

9. La *soustraction* est une opération par laquelle, connaissant la somme de deux nombres et l'un de ces deux nombres, on se propose de retrouver l'autre, qui prend les noms de *reste*, *excès* ou *différence*.

Quand on sait additionner deux nombres d'un seul chiffre, on soustrait facilement un nombre d'un seul chiffre d'un nombre moindre que 18, qui est la somme de 9 et 9. Il suffit, pour avoir la différence, de chercher ce qu'il faut ajouter au plus petit nombre pour obtenir le plus grand : ainsi, pour avoir la différence de 7 et de 15, on cherche ce qu'il faut ajouter à 7 pour faire 15, et l'on trouve 8 : le nombre 8 est donc la différence des nombres 7 et 15.

10. Pour soustraire l'un de l'autre deux nombres quelconques, on écrit le plus petit sous le plus grand, de manière que les chiffres de même rang se correspondent, et l'on tire un trait sous le plus petit nombre pour le séparer de la différence. On opère d'abord sur les unités : si le chiffre inférieur est plus petit que le chiffre supérieur, on soustrait le plus petit du plus grand, et l'on écrit la différence au-dessous du trait dans la même colonne; si le chiffre inférieur est plus grand que le chiffre supérieur, pour rendre la soustraction possible, on augmente de *dix* unités le chiffre supérieur; mais, pour ne pas

altérer la différence, on a soin, en passant à la colonne suivante, d'augmenter d'*une* unité le chiffre inférieur. On opère successivement sur chaque colonne comme on a opéré sur la première.

On trouvera d'après cela que la différence des nombres :

$$\begin{array}{r} 190642 \\ 38597 \\ \hline 152045 \end{array}$$

est 152045

11. L'opération précédente est fondée sur ce principe évident : que la différence de deux nombres ne change pas, quand ils augmentent tous les deux d'une même quantité.

D'après la définition même de la soustraction, le plus grand nombre est égal à la somme du plus petit et de la différence : on se sert de cette observation pour faire la *preuve* de la soustraction.

DE LA MULTIPLICATION.

12. La *multiplication* est une opération par laquelle on répète un nombre nommé *multiplicande*, autant de fois qu'il y a d'unités dans un autre nombre nommé *multiplicateur;* le résultat de l'opération se nomme *produit;* le multiplicande et le multiplicateur sont les *facteurs* du produit.

L'addition suffirait pour obtenir le produit de deux nombres : on n'aurait qu'à écrire le multiplicande autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur, et à faire la somme.

Tous les produits de deux nombres d'un seul chiffre sont réunis dans la table suivante, nommée *table de multiplication* ou *table de Pythagore*.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

La première ligne renferme les 9 premiers nombres; on forme la seconde ligne en ajoutant à lui-même chaque nombre de la première; on forme la troisième ligne en ajoutant à chaque nombre de la première celui qui est au-dessous dans la seconde; on forme la quatrième ligne en ajoutant à chaque nombre de la première celui qui est au-dessous dans la troisième; et ainsi de suite.

Le produit de deux nombres d'un seul chiffre se trouve, dans cette table, à la rencontre de la ligne verticale et de la ligne horizontale qui commencent par chacun des deux facteurs.

13. Sachant trouver le produit de deux nombres d'un seul chiffre, on obtient facilement celui d'un nombre quelconque par un nombre d'un seul chiffre. Pour multiplier, par exemple, 365 par 9, on observe que cela revient à répéter 9 fois les unités, les dizaines et les centaines du multiplicande. On place donc le multiplicateur 9 sous le multiplicande 365; on tire un trait sous le multiplicateur pour le séparer du produit; on multiplie successivement par le multiplicateur les unités, les dizaines, les centaines du multiplicande, en ne posant sous le trait que les unités de chaque produit, et retenant des dizaines pour les joindre au produit suivant. On trouve ainsi pour

$$\begin{array}{lr} & 365 \\ & 9 \\ \hline \text{produit} & 3285 \end{array}$$

14. *Pour multiplier un nombre par le produit de deux facteurs, il suffit de multiplier successivement par ces deux facteurs :* par exemple, multiplier 365 par 28, qui est le produit de 7 par 4, ou multiplier 365 par 7 et répéter 4 fois le produit, donnent un même résultat. Car pour multiplier 365 par 28 on pourrait écrire 28 fois le nombre 365 et faire la somme. Mais comme 28 vaut 4 fois 7, on pourrait partager cette colonne de 28 nombres égaux, en 4 groupes contenant 7 nombres chacun; la somme des 7 nombres qui composeraient un de ces groupes serait le produit de 365 par 7, et la somme des 4 groupes serait le produit de ce produit par 4.

15. Nous avons vu (5) qu'on rend un nombre 10, 100, 1000 fois plus grand en mettant un, deux, trois zéros à sa droite, et ainsi de suite. Il suit de là et du principe précédent, que multiplier un nombre par 80, qui vaut 10 fois 8, revient à le multiplier par 8 et à mettre un zéro à la droite du produit; que multiplier un nombre par 800, qui vaut 100 fois 8, revient à le multiplier par 8 et à mettre deux zéros à la droite du produit; etc. En général, quand le multiplicateur n'a qu'un chiffre significatif suivi de zéros, il suffit de multiplier le multiplicande par ce chiffre significatif et de mettre à la droite du produit autant de zéros qu'il y en a au multiplicateur. Ainsi le produit de 365 par 9000 serait 3285000.

16. On tire de là le moyen d'obtenir le produit de deux nom-

bres quelconques. Par exemple, pour multiplier 365 par 739, on observera que cela revient à répéter le multiplicande 9 fois, puis 30 fois, puis 700 fois, c'est-à-dire à multiplier d'abord le multiplicande par 9, puis par 3 en mettant un zéro à la droite du produit, puis par 7 en mettant deux zéros à la droite du produit, puis à faire la somme de ces divers produits. Mais, comme les zéros mis à la droite des produits partiels n'influent pas sur la somme de ces produits, on peut les supprimer, pourvu que l'on conserve à chaque chiffre le rang qu'il doit occuper. On est conduit alors à la règle suivante.

Pour multiplier l'un par l'autre deux nombres quelconques, on écrit le multiplicateur sous le multiplicande; on tire un trait sous le multiplicateur pour le séparer des produits partiels. On multiplie successivement le multiplicande par les unités, dizaines, centaines, etc., du multiplicateur, en ayant soin de placer le premier chiffre à droite de chaque produit partiel sous le chiffre du multiplicateur par lequel on multiplie. On tire un trait sous le dernier produit partiel pour le séparer du produit total, que l'on obtient en faisant la somme des produits partiels.

On trouvera ainsi que le produit de 365
par 739
3285
1095
2555
est 269735

17. Quand il y a des zéros au milieu des chiffres significatifs du multiplicateur, on peut en faire abstraction en multipliant, pourvu qu'on ait toujours soin de placer le premier chiffre à droite de chaque produit partiel sous le chiffre du multiplicateur par lequel on multiplie.

Quand le multiplicande et le multiplicateur sont terminés par des zéros, on multiplie sans y avoir égard, afin d'abréger l'opération, et on met ensuite à la droite du produit autant de zéros qu'il y en a à la fois au multiplicateur et au multiplicande. Ainsi, le produit de 36500 par 9000 serait de 328500000.

18. *Un produit de deux facteurs ne change pas, dans quelque ordre qu'on les multiplie.* En effet, pour obtenir, par exemple, le produit des deux facteurs 3 et 5, on peut écrire trois rangées de cinq unités chacune :

1, 1, 1, 1, 1
1, 1, 1, 1, 1
1, 1, 1, 1, 1

Mais ce tableau forme aussi cinq colonnes de trois unités chacune; la somme totale de ces unités est donc indifféremment le

produit de 5 par 3, ou le produit de 3 par 5. On raisonnerait de même pour tout autre facteur.

On se sert de cette observation pour faire la *preuve* de la multiplication. On s'en sert aussi lorsque le multiplicande a moins de chiffres que le multiplicateur ; en changeant l'ordre des facteurs, on a moins de produits partiels à faire.

19. Pour multiplier entre eux trois, quatre, ou un plus grand nombre de facteurs, on multiplie le premier par le second; puis on multiplie ce produit par le troisième, et ainsi de suite. Le produit est le même, dans quelque ordre qu'on multiplie les facteurs. En effet, multiplier, par exemple, 3 par 7 et par 4 revient, comme on l'a vu (**14**), à multiplier 3 par le produit des nombres 7 et 4, qui est aussi celui des nombres 4 et 7 (**18**); le produit cherché peut donc s'obtenir en multipliant 3 par 4 et par 7; mais multiplier 3 par 4 et par 7 revient à multiplier par 7 le produit des nombres 3 et 4, qui est aussi celui des nombres 4 et 3; le produit cherché peut donc s'obtenir en multipliant 4 par 3 et par 7. On voit qu'on a fait occuper successivement au chiffre 4 chacune des trois places; et, comme on en pourrait faire autant des autres facteurs, il s'ensuit que le *produit de trois facteurs ne change pas dans quelque ordre qu'on les multiplie.*

Le principe étant démontré pour trois facteurs, on l'étend, d'une manière analogue, à quatre ou à un plus grand nombre de facteurs.

20. Les divers produits qu'on obtient en multipliant un même nombre par 2, par 3, par 4, etc., se nomment les *multiples* de ce nombre. Les produits renfermés dans une même ligne, horizontale ou verticale, de la table de multiplication, sont des multiples du nombre par lequel cette ligne commence.

DE LA DIVISION.

21. La *division* est une opération par laquelle, connaissant un produit, nommé *dividende*, et l'un de ses facteurs, nommé *diviseur*, on se propose de trouver l'autre facteur, nommé *quotient*.

Le dividende étant le produit du diviseur par le quotient, on peut dire aussi que la division a pour but de chercher combien de fois le dividende contient le diviseur, ou encore, de partager le dividende en autant de parties égales qu'il y a d'unités dans le diviseur.

La soustraction suffirait pour trouver combien de fois le dividende contient le diviseur; mais cette manière d'opérer serait trop longue.

22. Supposons d'abord que le diviseur n'ait qu'un chiffre, et proposons-nous de diviser 3213 par 7. Les plus hautes unités du quotient seront les centaines; car un seul mille, multiplié par le

diviseur, donnerait pour produit sept mille, nombre plus grand que le dividende. — Le dividende contient 32 centaines, qui se composent du produit des centaines du quotient par le diviseur, plus de la retenue de centaines, qui peut provenir du produit des dizaines et des unités du quotient par le diviseur. Or, le quotient ne peut avoir plus de 9 dizaines et de 9 unités, c'est à-dire de 99 unités, dont le prodnit par le diviseur est nécessairement moindre qu'une centaine multipliée par ce diviseur, c'est-à-dire moindre que 7 centaines. La retenue de centaines, qui entre dans les 32 centaines du dividende, est donc moindre que le diviseur : le produit des centaines du quotient par le diviseur est donc le plus grand multiple du diviseur qui soit contenu dans les 32 centaines du dividende. Or, ce plus grand multiple est 28, produit de 7 par 4 ; le chiffre des centaines du quotient est donc 4, et, en retranchant du dividende le produit des 4 centaines du quotient par le diviseur, le reste 413 ne contiendra plus que les produits des dizaines et des unités du quotient par le diviseur. On pourra obtenir le chiffre des dizaines du quotient et celui des unités, comme on a obtenu celui des centaines, et l'on est ainsi conduit à la règle suivante :

Pour diviser un nombre quelconque par uu nombre d'un seul chiffre, on place le diviseur à la droite du dividende ; on les sépare par un trait, et l'on tire un second trait au-dessous du diviseur pour le séparer du quotient ; on prend sur la gauche du dividende assez de chiffres pour former un premier dividende partiel qui contienne le diviseur ; on cherche le plus grand multiple du diviseur contenu dans ce dividende partiel ; on divise ce multiple par le diviseur ; on obtient ainsi le chiffre des plus hautes unités du quotient ; on multiplie le diviseur par ce chiffre, et l'on retranche le produit du dividende partiel ; à côté du reste, on abaisse le chiffre suivant du dividende. On opère snr ce second dividende partiel, comme on a opéré sur le premier, et l'on obtient le chiffre suivant du quotient. On continue ainsi jusqu'à ce qu'on ait épuisé tous les chiffres du dividende.

En appliquant cette règle aux nombres précédents, on trouvera :

```
3213 | 7
28   |----
---    459
 41
 35
 ---
  63
  63
  --
   0
```

Le quotient est donc 459

Lorsqu'un dividende partiel est plus petit que le diviseur, cela

indique que le quotient n'a pas d'unités de l'ordre que l'on cherche ; on pose donc 0 au quotient, et l'on abaisse le chiffre suivant du dividende.

23. Lorsque le diviseur a plusieurs chiffres, mais que le dividende est plus petit que le diviseur suivi d'un zéro, on en conclut que ce dividende est moindre que le diviseur, et que, par conséquent, le quotient n'a qu'un chiffre. Pour découvrir ce chiffre, on divise par les plus hautes unités du diviseur les unités de même ordre du dividende ; pour essayer le chiffre ainsi obtenu, on multiplie le diviseur par ce chiffre, et l'on retranche le produit du dividende : si le produit est plus grand que le dividende, c'est que le chiffre posé au quotient est trop grand ; si le reste est plus grand que le diviseur, ou seulement égal au diviseur, c'est que le chiffre posé au quotient est trop petit.

Si l'on divise ainsi 3213 par 459, comme le dividende est plus petit que 4590, c'est-à-dire plus petit que 10 fois le diviseur, on en conclut que le quotient n'a qu'un chiffre : pour l'obtenir, on divise les 32 centaines du dividende par les 4 centaines du diviseur. On trouve pour quotient 8 ; pour essayer ce chiffre, on multiplie 459 par 8 ; le produit 3672 étant plus grand que le dividende, on en conclut que le chiffre 8 posé au quotient est trop grand. On essaie alors le chiffre 7 dont le produit par le diviseur est exactement égal au dividende.

24. A l'aide de ce qui précède, on peut opérer une division quelconque. On dispose l'opération comme lorsque le diviseur n'a qu'un chiffre. En raisonnant comme au n° 22, on voit que, pour obtenir le chiffre des plus hautes unités du quotient, il faut diviser par le diviseur le dividende partiel qu'on obtient en prenant sur la gauche du dividende assez de chiffres pour former un nombre qui contienne le diviseur. Cette division partielle rentre dans le cas du n° 23. A côté du reste, on abaisse le chiffre suivant du dividende ; on obtient un second dividende partiel, sur lequel on opère comme sur le premier, et l'on continue ainsi jusqu'à ce qu'on ait épuisé tous les chiffres du dividende.

Lorsqu'un dividende partiel est plus petit que le diviseur, on pose 0 au quotient, et l'on abaisse le chiffre suivant du dividende.

Si on divise, d'après cela, 196983 par 387, on aura :

```
196983 | 387
1935     509
------
  3483
  3483
  ----
     0
```

Le quotient est donc 509.

Lorsqu'après avoir déterminé l'espèce des plus hautes unités du

quotient, on reconnaît qu'il aura beaucoup de chiffres, on peut, afin d'éviter les tâtonnements indiqués au n° 23, faire d'avance les 9 premiers multiples du diviseur, par de simples additions, comme pour la table de Pythagore.

Dans la pratique, on se dispense d'écrire sous chaque dividende partiel le produit du diviseur par le chiffre du quotient; on multiplie et l'on soustrait en même temps.

25. Lorsqu'un produit est formé de deux facteurs, si l'un de ces facteurs devient 2, 3, 4 fois, etc., plus grand, le produit devient aussi 2, 3, 4 fois, etc., plus grand. On peut donc, sans changer un quotient, multiplier le diviseur par 2, 3, 4, etc., pourvu qu'on multiplie aussi le dividende par 2, 3, 4, etc. Par la même raison, *on peut, sans changer le quotient, diviser le dividende et le diviseur par un même nombre.* Il suit de là que, lorsque le dividende et le diviseur sont terminés par des zéros, on peut en supprimer un même nombre chez tous deux, sans changer le quotient. Ainsi, le quotient de 350000 par 7000 est le même que le quotient de 350 par 7.

Pour diviser un nombre par le produit de deux facteurs, il suffit de diviser successivement par ces deux facteurs; ceci résulte du principe du n° **14**. Ainsi, diviser 360 par 45, produit de 9 et de 5, revient à diviser d'abord 360 par 9, ce qui donne pour quotient 40, et à diviser ce quotient par 5, ce qui donne pour quotient 8. En effet, le quotient de 360 par 45 est 8.

26. Il n'arrive pas toujours que le dividende soit le produit exact du diviseur par un autre nombre; la dernière division partielle peut donner un reste, que l'on nomme le *reste de la division.* Ce reste est nécessairement plus petit que le diviseur. Le dividende n'est plus alors le produit du diviseur par le nombre placé au quotient; mais si, au produit de ce nombre par le diviseur, on ajoute le reste de la division, on obtient pour somme le dividende. C'est en cela que consiste la *preuve* de la division. Si, par exemple, on divise 270000 par 739,

```
270000 | 739
 4850    365
  3960
   265
```

on trouve au quotient 365, et pour reste 265. Or, si au produit de 739 par 365, qui est 269735, on ajoute 265, on obtient pour somme 270000.

DES SIGNES ABRÉVIATIFS.

27. L'addition, la soustraction, la multiplication, et la division, sont les *quatre règles* ou les *quatre opérations fondamentales* de l'arithmétique, auxquelles se réduisent tous les calculs. Pour indiquer ces opérations, on emploie souvent des signes abréviatifs.

Pour indiquer l'addition, on emploie le signe + qui s'énonce *plus;* en sorte que 5 + 7 signifie 5 plus 7, ou la somme de 5 et de 7.

Pour indiquer la soustraction, on emploie le signe — qui s'énonce *moins;* en sorte que 7 — 5 signifie 7 moins 5, ou le reste qu'on obtient en retranchant 5 de 7.

Pour indiquer la multiplication, on emploie le signe × qui s'énonce *multiplié par;* en sorte que 7 × 5 signifie 7 multiplié par 5, ou le produit de 7 par 5.

Lorsque plusieurs facteurs d'un même produit sont égaux, on se contente d'écrire l'un d'eux, et l'on met à côté et un peu au-dessus un chiffre qui indique combien il y a de ces facteurs. Ainsi 5^3 signifie 5 × 5 × 5, ou un produit où 5 entre 3 fois comme facteur; $5^3 \times 7^2$ signifie un produit où 5 entre 3 fois comme facteur et 7 deux fois, c'est-à-dire 5 × 5 × 5 × 7 × 7.

Un produit de deux, trois, quatre, etc., facteurs égaux à un nombre donné est ce qu'on nomme la seconde, la troisième, la quatrième, etc., *puissance* de ce nombre; et le chiffre qui indique le nombre de ces facteurs se nomme l'*exposant* de la puissance. Ainsi 5^3 indique la troisième puissance de 5, et le chiffre 3 est l'exposant de cette puissance.

Pour indiquer la division, on emploie le signe : qui s'énonce *divisé par;* en sorte que 35 : 7 signifie 35 divisé par 7, ou le quotient de la division de 35 par 7. On place aussi le diviseur au-dessous du dividende en les séparant par un trait horizontal; ainsi $\frac{35}{7}$ a la même valeur que 35 : 7.

Enfin, pour indiquer que deux quantités sont égales, on place entre ces quantités le signe = qui s'énonce *égale;* ainsi $\frac{35}{7} = 5$ signifie que le quotient de la division de 35 par 7 est égal à 5.

DE LA DIVISIBILITÉ DES NOMBRES.

28. On dit qu'un nombre est *divisible* par un autre lorsque la division peut s'opérer sans reste; et l'on dit alors que le second nombre est un *diviseur* du premier. Quand un nombre en divise exactement deux autres, ce premier nombre est un *diviseur commun* aux deux autres.

29. *Tout diviseur commun à plusieurs nombres divise exactement leur somme.* En effet, chacun de ces nombres étant égal au diviseur commun répété un certain nombre de fois, leur somme sera aussi égale au diviseur commun répété un nombre exact de fois, et sera par conséquent divisible par ce diviseur. On prouverait de même que *tout diviseur commun à deux nombres divise leur différence.*

La multiplication n'étant qu'un cas particulier de l'addition, *si un nombre admet un diviseur, tout multiple de ce nombre admettra ce diviseur.*

30. *Tout diviseur commun à une somme composée de deux parties, et à l'une de ces parties, divise exactement l'autre.* En effet, si de cette somme, qui contient le diviseur commun un nombre exact de fois, on retranche la première partie, qui le contient aussi un nombre exact de fois, le reste contiendra lui-même ce diviseur commun un nombre exact de fois; or, ce reste est égal à la seconde partie.

31. *Un nombre n'admet pas de diviseur plus grand que sa moitié.* En effet, si on divise ce nombre par sa moitié, on aura pour quotient 2; si on le divise par lui-même, on aura pour quotient 1; par conséquent, tout diviseur plus grand que la moitié de ce nombre donnerait un quotient compris entre 1 et 2; la division ne pourrait donc pas s'opérer exactement.

Des caractères de divisibilité.

32. *Un nombre est divisible par 2, quand son premier chiffre à droite est 0, 2, 4, 6, ou 8.* En effet, tout nombre peut se décomposer en dizaines et en unités; or, 10 étant divisible par 2, tout nombre de dizaines, qui est un multiple de 10, est divisible par 2; si donc le chiffre des unités est aussi divisible par 2, le nombre lui-même admettra ce diviseur.

33. Les nombres divisibles par 2 se nomment nombres *pairs*; ceux qui n'admettent pas le diviseur 2 se nomment nombres *impairs*. La suite des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, etc., est composée alternativement d'un nombre impair et d'un nombre pair.

Un nombre est divisible par 5 quand son premier chiffre à droite est 0 ou 5. En effet: 10 étant divisible par 5, les dizaines de ce nombre sont divisibles par 5, et si le chiffre des unités est divisible par 5, le nombre lui-même admettra ce diviseur.

34. *Un nombre est divisible par 9 quand la somme de ses chiffres est un multiple de 9.* En effet, on a $10 = 9 + 1$, $100 = 99 + 1$, $1000 = 999 + 1$, etc., d'où il suit que chaque chiffre significatif, suivi de zéros, est un multiple de 9 augmenté de ce chiffre significatif même : ainsi 500000 est un multiple de 9 augmenté de 5. Un nombre quelconque est donc un multiple de 9 augmenté de la somme de ses chiffres significatifs; et si cette somme est un multiple de 9, le nombre lui-même est un multiple de 9.

35. *Un nombre est divisible par 3 quand la somme de ses chiffres est un multiple de 3.* En effet, on vient de voir qu'un nombre quelconque est un multiple de 9 augmenté de la somme de ses chiffres; mais 9 est un multiple de 3; donc, un nombre quelconque est un multiple de 3 augmenté de la somme de ses chiffres; et si cette somme est un multiple de 3 le nombre lui-même est un multiple de 3.

36. *Un nombre est divisible par 11 quand la différence entre la somme des chiffres de rang pair et la somme des chiffres de rang impair est*

un multiple de 11. En effet, on a $100 = 99 + 1$,
$$10000 = 9999 + 1 = 9900 + 99 + 1,$$
$$1000000 = 999999 + 1 = 990000 + 9900 + 99 + 1, \text{ etc.};$$
d'où il suit que toute unité de rang impair est un multiple de 11 augmenté d'une unité : donc, tout chiffre significatif, suivi d'un nombre pair de zéros, est un multiple de 11 augmenté de ce chiffre significatif. Mais on a aussi :
$$10 = 11 - 1,\ 1000 = 1100 - 100 = 1100 - 99 - 1,$$
$$100000 = 110000 - 10000 = 110000 - 9999 - 1, \text{ etc.};$$
d'où il suit que toute unité de rang pair est un multiple de 11 diminué d'une unité ; donc, tout chiffre significatif, suivi d'un nombre impair de zéros, est un multiple de 11 diminué de ce chiffre significatif. Donc, tout nombre est un multiple de 11 augmenté ou diminué de la différence entre la somme des chiffres de rang pair et la somme des chiffres de rang impair; et si cette différence est un multiple de 11, le nombre lui-même est un multiple de 11.

37. D'après ce que nous avons vu (34), pour obtenir le reste de la division d'un nombre quelconque par 9, il suffit de diviser la somme de ses chiffres par 9. On se sert de cette observation pour faire la *preuve* de la multiplication. En effet, le nombre 34, par exemple, est un multiple de 9 augmenté de 7 ; le nombre 53 est un multiple de 9 augmenté de 8 ; si on multiplie 34 par 53, le produit se composera de quatre parties : du produit de deux multiples de 9, qui est lui-même un multiple de 9, de 8 fois le premier multiple de 9, de 7 fois le second multiple, et du produit de 7 par 8, qui est un multiple de 9 augmenté de 2 ; le produit de 34 par 53, divisé par 9, doit donc donner pour reste 2. Pour faire d'après cela la preuve d'une multiplication, on divise par 9 le multiplicande, le multiplicateur et le produit ; on multiplie entre eux les restes des deux premières divisions, et on divise leur produit par 9 ; le reste qu'on obtient doit être égal au reste de la troisième division. On peut faire de même la preuve d'une division.

Des nombres premiers.

38. On appelle *premier* tout nombre qui n'est divisible que par lui-même ou par l'unité. Pour trouver les nombres premiers, on prend la suite des nombres naturels, et l'on rejette tous ceux qui ont un diviseur : on est assuré qu'un nombre est premier lorsqu'on a essayé comme diviseurs tous les nombres premiers déjà obtenus, moindres que sa moitié (31), et qu'aucun d'eux n'a donné une division exacte. On trouve ainsi que les nombres premiers sont 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, etc.

39. On dit que deux nombres sont *premiers entre eux* quand ils n'ont aucun diviseur commun. Deux nombres qui ne diffèrent que d'une unité sont premiers entre eux, car tout diviseur commun à ces nombres devrait diviser leur différence (29). Deux nombres premiers sont nécessairement premiers entre eux.

Du plus grand commun diviseur.

40. Le plus grand de tous les diviseurs communs à deux nombres se nomme *leur plus grand commun diviseur.*

Supposons qu'on veuille trouver le plus grand commun diviseur des nombres 77 et 266. Il est naturel de chercher si le plus petit ne divise pas le plus grand ; car, s'il le divisait, il serait lui-même le plus grand commun diviseur cherché. En divisant 266 par 77, on trouve pour quotient 3 et pour reste 35, d'où il suit (**26**) qu'on a : $266 = 77 \times 3 + 35$. Le plus grand commun diviseur cherché divisant 77, divise aussi le produit de 77 par 3 (**29**); or, il divise aussi 266 ; il divise donc la somme de deux nombres 226 et l'un de ces nombres 77×3, il divise par conséquent l'autre (**30**). Mais tout nombre qui divisera 35 et 77, et par conséquent 35 et 77×3 devra diviser la somme 266 de ces nombres (**29**). Par conséquent, le plus grand commun diviseur entre 266 et 77 est le même que le plus grand commun diviseur entre 77, le plus petit des nombres proposés, et le reste 35 de leur division. On est conduit, comme précédemment, à diviser 77 par 35 ; on trouve pour quotient 2 et pour reste 7, et on a $77 = 35 \times 2 + 7$. En raisonnant comme ci-dessus, on reconnaît que le plus grand commun diviseur entre 77 et 35 est le même que le plus grand commun diviseur entre 35 et le reste 7 de la division de 77 par 35. On divise donc 35 par 7, et l'on trouve pour quotient 5 et pour reste 0, d'où il suit que 7 est le plus grand commun diviseur cherché.

On tire de là cette règle : Pour trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres, on divise le plus grand par le plus petit, on divise ensuite le plus petit par le reste de la première division, puis ce premier reste par le second, et ainsi de suite : on continue ainsi jusqu'à ce qu'on arrive à un reste qui divise exactement le précédent ; ce reste est le plus grand commun diviseur cherché. Si l'on applique cette règle aux nombres 621 et 184, on aura :

	3	2	1	2
621	184	69	46	23
552	138	46	46	
69	46	23	0	

Le plus grand commun diviseur cherché est donc 23.

Quand les deux nombres proposés n'ont pas de diviseur commun, on arrive nécessairement à une division qui donne pour reste 1.

Quand deux restes consécutifs sont des nombres premiers, il est inutile de continuer l'opération.

41. Il suit de ce qui précède que tout diviseur commun à deux nombres divise le reste de leur division, et tous les restes successifs qu'on obtient en cherchant leur plus grand commun diviseur, et par conséquent ce plus grand commun diviseur lui-même.

42. Tout diviseur commun à trois, quatre nombres, etc. divise le plus grand commun diviseur de deux quelconques d'entre ces nombres (41). Pour obtenir le plus grand commun diviseur de plusieurs nombres, il suffit donc d'appliquer la recherche du plus grand commun diviseur à deux de ces nombres, puis à ce premier diviseur et au troisième nombre, puis à ce second diviseur et au quatrième nombre ; et ainsi de suite.

43. Quand plusieurs nombres ont été divisés par leur plus grand commun diviseur, que nous supposerons être 7, pour fixer les idées, ils n'admettent plus aucun diviseur commun ; car s'ils en admettaient un, 3 par exemple, ces nombres pouvant tous être divisés successivement par 7 et par 3, seraient divisibles par le produit de 7 par 3 (25), nombre plus grand que leur plus grand commun diviseur 7, ce qui est contraire à la définition (40).

Propriétés des nombres premiers entre eux.

44. *Tout nombre qui divise un produit de deux facteurs, et qui est premier avec l'un d'eux, divise nécessairement l'autre.* Par exemple, le nombre 456 étant le produit de 24 par 19, le nombre 12, qui divise 456 et qui est premier avec 19, divise nécessairement 24. En effet, si l'on cherche le plus grand commun diviseur entre 19 et 12, ces deux nombres étant premiers entre eux, on finira par avoir 1 pour reste, et la suite des restes sera 7, 5, 2, 1. Si maintenant on cherche le plus grand commun diviseur entre 19×24 et 12×24, il est facile de déduire du n° 40 que la suite des restes sera 7×24, 5×24, 2×24 et 1×24. Or, tout nombre qui divise les quantités 19×24 et 12×24, divise ces restes successifs et en particulier 1×24 ; par conséquent le nombre 12 qui, par hypothèse, divise le produit 19×24, et qui divise évidemment 12×24, divise le reste 1×24, c'est-à-dire le facteur 24.

Il suit de là que *tout nombre premier qui divise un produit divise nécessairement l'un de ses facteurs* ; et que *tout nombre premier qui divise une puissance d'un autre nombre, divise ce nombre lui-même.*

45. *Quand un nombre est premier avec deux autres, il est aussi premier avec leur produit* ; car s'il divisait ce produit, comme il est premier avec l'un des deux facteurs, il devrait diviser l'autre (44).

Il suit de là *que tout nombre premier avec un autre est aussi premier, avec les puissances de cet autre* ; et que *si deux nombres sont premiers entre eux, une puissance quelconque de l'un est première avec une puissance quelconque de l'autre.*

46. *Quand un nombre est divisible par deux autres nombres premiers entre eux, il est aussi divisible par leur produit.* Ainsi, par exemple, le nombre 84 étant divisible par les nombres 6 et 7 qui sont premiers entre eux, est divisible par 42, produit de 6 par 7. En effet, le quotient de 84 par 6 étant 14, on a $84 = 6 \times 14$. Le

nombre 7 divisant 84 et étant premier avec le facteur 6, divise nécessairement l'autre facteur 14 ; le quotient est 2 et l'on a $14 = 7 \times 2$ et par conséquent $84 = 6 \times 7 \times 2$ ou $84 = 42 \times 2$; ainsi 84 est divisible par 42.

Ce principe s'étend sans peine à plus de deux diviseurs.

47. Comme deux nombres premiers sont toujours premiers entre eux, il suit du numéro précédent que si un nombre est divisible par plusieurs nombres premiers, tous les produits deux à deux, trois à trois, etc., de ces nombres premiers divisent le nombre proposé.

Décomposition des nombres en facteurs premiers.

48. Si par une certaine méthode on a trouvé que . . . . $2200 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 11$, toute autre méthode conduirait à un résultat identique, car tout diviseur premier de 2200 devant diviser l'un de ses facteurs (44), ce nombre ne peut avoir d'autres facteurs premiers que 2, 5 ou 11. De plus, aucune méthode ne saurait donner un résultat dans lequel un de ces facteurs premiers entrât à une puissance différente ; car si l'on trouvait $2200 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 11$, il s'en suivrait que $2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 11 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 11$; or, l'une de ces quantités peut être divisée quatre fois de suite par 2, tandis que l'autre ne peut l'être que trois fois, ce qui est impossible.

49. Pour décomposer un nombre en facteurs premiers, on divise successivement et autant de fois que cela est possible, par 2, par 3, par 5, par 7, etc. et par tous les nombres premiers qui n'excèdent pas la moitié du dividende, et à chaque division qui réussit, on note le diviseur comme facteur premier du nombre proposé. On trouvera ainsi que le nombre

$$2520 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7.$$

2420	2
1260	2
630	2
315	3
105	3
35	5
7	7

50. Quand deux nombres sont décomposés en facteurs premiers, on forme leur plus grand commun diviseur en faisant le produit de tous les facteurs premiers qui leur sont communs, et en affectant chacun d'eux du plus petit de ses exposans dans les nombres donnés. En effet, les quotiens qu'on obtient en divisant ces nombres par le produit indiqué, sont nécessairement premiers

entre eux. Ainsi, ayant trouvé que $660 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 11$, le plus grand commun diviseur des nombres 2520 et 660 est $2^2 \times 3 \times 5$, c'est-à-dire 60.

Recherche des diviseurs des nombres.

31. Pour trouver tous les diviseurs d'un nombre, on le décompose en facteurs premiers : ces facteurs et leurs produits deux à deux, trois à trois; etc., sont les diviseurs cherchés. On trouvera ainsi que tous les diviseurs de 660 sont : 2, 3, 5, 11, 4, 6, 10, 22, 15, 33, 55, 12, 20, 44, 30, 66, 110, 60, 132, 165, 220 et 330.

Pour trouver tous les diviseurs communs à plusieurs nombres, il suffit de chercher tous les diviseurs de leur plus grand diviseur commun.

32. Pour trouver le plus petit nombre divisible par des nombres donnés, on décompose ces nombres en facteurs premiers, et l'on fait le produit de tous ces facteurs, affectés chacun de leur plus haut exposant. Ainsi, les nombres 24, 45, 70 étant respectivement équivalens à $2^3 \times 3$, $3^2 \times 5$ et $2 \times 5 \times 7$, le plus petit nombre divisible par les nombres donnés sera

$$2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \text{ ou } 2520.$$

DES FRACTIONS.

33. On appelle *fractions* les quantités plus petites que l'unité. Pour évaluer les quantités plus petites que l'unité, on conçoit que l'unité ait été partagée en un certain nombre de parties égales, et que l'on prenne une ou plusieurs de ces parties. Le nombre qui exprime en combien de parties l'unité a été divisée se nomme le *dénominateur* de la fraction; celui qui exprime combien on prend de ces parties, se nomme son *numérateur*. Le numérateur et le dénominateur se nomment les deux *termes* de la fraction.

Partager l'unité en 5 parties et prendre 3 de ces parties, revient à prendre la cinquième partie de chacune des trois unités du nombre 3, c'est-à-dire à partager 3 en 5 parties égales. *Une fraction exprime donc le quotient de son numérateur par son dénominateur.*

Pour écrire une fraction, on place son dénominateur sous son numérateur et on les sépare par un trait. Ainsi $\frac{3}{5}$ exprime que l'unité a été partagée en 5 parties et qu'on en a pris 3.

Pour énoncer une fraction écrite, on énonce d'abord son numérateur, puis son dénominateur, que l'on fait suivre de la terminaison *ième*. Ainsi $\frac{3}{5}$ s'énonce *trois cinquièmes*. Il y a exception pour les fractions dont le dénominateur est 2, 3 ou 4, au lieu de *deuxième*, *troisième*, *quatrième*, on dit *demie*, *tiers*, *quart*.

34. Quand une division donne un reste, on complette le quotient en y ajoutant le quotient de ce reste par le diviseur,

c'est-à-dire une fraction qui a pour numérateur ce reste, et pour dénominateur le diviseur. Ainsi, la division de 60 par 7 donnant pour quotient 8 et pour reste 4, le quotient complet est 8 et $\frac{4}{7}$.

35. Si l'on augmente le numérateur d'une fraction sans changer son dénominateur, l'unité étant toujours partagée en un même nombre de parties, on en prend davantage; la fraction augmente donc. Si le numérateur devient 2, 3, 4 fois etc., plus grand, la fraction devient donc 2, 3, 4 fois etc., plus grande. Par la même raison, si le numérateur diminue, la fraction diminue; si le numérateur devient 2, 3, 4 fois etc., plus petit, la fraction devient aussi 2, 3, 4 fois etc., plus petite.

Si l'on augmente le dénominateur d'une fraction sans changer le numérateur, l'unité étant partagée en plus de parties, ces parties sont plus petites, et puisqu'on en prend toujours le même nombre, la fraction diminue. Si le dénominateur devient 2, 3, 4 fois etc., plus grand, l'unité se trouve divisée en 2, 3, 4 fois etc., plus de parties, ces parties sont donc 2, 3, 4 fois etc., plus petites, et la fraction est elle-même 2, 3, 4 fois etc., plus petite. Par la même raison, si le dénominateur diminue, la fraction augmente; si le dénominateur devient 2, 3, 4 fois etc., plus petit, la fraction devient 2, 3, 4 fois etc., plus grande.

36. Il suit de là qu'une fraction ne change pas de valeur quand on multiplie ses deux termes par un même nombre. Car si on multiplie, par exemple, le numérateur par 12, la fraction devient 12 fois plus grande; mais en multipliant le dénominateur par 12, on la rend 12 fois plus petite; elle n'a donc pas changé de valeur.

On prouve de même qu'une fraction ne change pas de valeur quand on divise ses deux termes par un même nombre.

37. D'après ce qui précède, une même fraction peut s'écrire d'une infinité de manières : la plus commode de toutes est celle où les deux termes sont le plus petits possible; on la nomme *la plus simple expression* de la fraction. Pour réduire une fraction à sa plus simple expression, il suffit de diviser ses deux termes par leur plus grand commun diviseur (40). Quand les deux termes d'une fraction n'ont pas de diviseur commun, la fraction est dite *irréductible*. Deux fractions irréductibles ne peuvent donc pas avoir la même valeur.

Des nombres fractionnaires.

38. On appelle *nombres fractionnaires* les quantités qui, sous forme fractionnaire, ont une valeur égale à l'unité, ou plus grande que l'unité. Cependant, on applique quelquefois à ces quantités le nom de fractions. Les nombres naturels se nomment par opposition *nombres entiers*.

Les expressions $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{5}$ etc., dont le numérateur est égal au dénominateur, ont une valeur égale à l'unité, car elles expriment

que l'on a partagé l'unité en un certain nombre de parties et que l'on a pris toutes ces parties.

59. On peut mettre un nombre quelconque, 4 par exemple, sous forme d'une fraction dont le dénominateur soit un nombre donné, par exemple 5. Pour cela, on observe que l'unité valant $\frac{5}{5}$, 4 unités valent 4 fois 5 cinquièmes, ou $\frac{20}{5}$. Ainsi, pour mettre un nombre entier sous forme fractionnaire, le dénominateur étant donné, il suffit de prendre pour numérateur le produit de ce nombre par le dénominateur donné.

Pour réunir en une seule expression fractionnaire le nombre 4 et la fraction $\frac{3}{5}$, on observera que 4 vaut 20 cinquièmes, on a donc en tout 23 cinquièmes ou $\frac{23}{5}$. Ainsi, pour réunir en une seule expression fractionnaire un nombre entier et une fraction, il faut prendre pour numérateur le produit du nombre entier par le dénominateur de la fraction, augmenté du numérateur de cette fraction, et pour dénominateur celui de la fraction même. C'est ce qu'on appelle *réduire les entiers en fractions.*

Pour *extraire* au contraire les entiers contenus dans un nombre fractionnaire, il est évident qu'il faut diviser le numérateur par le dénominateur; le quotient donne les entiers, et le reste de la division est le numérateur de la fraction qu'il faut y joindre; son dénominateur est celui du nombre fractionnaire même. On trouve ainsi que $\frac{42}{11}$ équivaut à 3 et $\frac{9}{11}$.

De l'addition des fractions

60. Quand deux fractions ont le même dénominateur, il suffit, pour obtenir la somme, de faire la somme des numérateurs, d'écrire au-dessous le dénominateur commun, et d'extraire les entiers, s'il y a lieu. Ainsi la somme de $\frac{11}{12}$ et $\frac{7}{12}$ est $\frac{18}{12}$ ou $\frac{3}{2}$ ou $1\ \frac{1}{2}$.

Quand deux fractions à additionner ont des dénominateurs différents on les réduit au même dénominateur en multipliant les deux termes de chacune par le dénominateur de l'autre. Ainsi, les fractions $\frac{2}{3}$ et $\frac{4}{5}$ équivalent aux fractions $\frac{10}{15}$ et $\frac{12}{15}$ dont la somme est $\frac{22}{15}$ ou 1 et $\frac{7}{15}$.

61. Quand on a plus de deux fractions à additionner, on peut encore, si elles ont des dénominateurs différents, les réduire au même dénominateur en multipliant les deux termes de chacune par le produit des dénominateurs de toutes les autres. Ainsi, les fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$ équivalent aux fractions $\frac{15}{30}$, $\frac{20}{30}$, $\frac{18}{30}$, dont la somme est $\frac{23}{30}$ ou 1 et $\frac{53}{30}$.

Mais, lorsque les dénominateurs ont des facteurs communs, on obtient un dénominateur commun plus petit, en cherchant le plus petit nombre divisible par ces dénominateurs (52). On divise alors ce nombre par le dénominateur de chaque fraction, et l'on multiplie le numérateur de cette fraction par le quotient obtenu. S'il s'a-

git par exemple des fractions $\frac{7}{10}$, $\frac{19}{30}$, $\frac{3}{4}$, le plus petit nombre divisible par 10, par 30, et par 4, étant 120, on divise 120 par le dénominateur 10, et l'on multiplie le numérateur 7 par le quotient 12; on divise 120 par le dénominateur 30, et l'on multiplie le numérateur 19 par le quotient 4; et ainsi de suite.

62. Pour additionner des nombres fractionnaires, on commence par en extraire les entiers; on fait la somme des fractions, et l'on joint à cette somme la somme des entiers.

De la soustraction des fractions.

63. Pour soustraire deux fractions l'une de l'autre, lorsqu'elles ont le même dénominateur, on soustrait les numérateurs, et l'on écrit sous la différence le dénominateur commun. Lorsqu'elles ont des dénominateurs différents, on les réduit d'abord au même dénominateur. Ainsi, la différence des fractions $\frac{2}{3}$ et $\frac{4}{5}$ est celle des fractions $\frac{16}{15}$ et $\frac{12}{15}$, c'est-à-dire $\frac{2}{15}$.

64. Pour soustraire une fraction d'un nombre entier, on emprunte, sur ce nombre entier, une unité que l'on convertit en une expression fractionnaire de même dénominateur que la fraction. Ainsi, pour soustraire $\frac{4}{7}$ de 10, on empruntera sur le nombre 10 une unité que l'on convertira en $\frac{7}{7}$; on retranchera $\frac{4}{7}$ de $\frac{7}{7}$, et l'on joindra à la différence $\frac{3}{7}$ le nombre 10 diminué d'une unité; on aura ainsi 9 $\frac{3}{7}$.

65. Pour soustraire l'un de l'autre deux nombres fractionnaires, on en extrait d'abord les entiers, et l'on réduit les fractions au même dénominateur. Si la fraction qui accompagne le plus petit nombre est la plus petite, on soustrait séparément les fractions l'une de l'autre, et les entiers l'un de l'autre. Si la fraction qui accompagne le plus petit nombre est la plus grande, on emprunte sur le plus grand nombre une unité que l'on convertit en un nombre fractionnaire de même dénominateur que la fraction qui accompagne ce plus grand nombre. Ainsi, pour soustraire $\frac{5}{3}$ de $\frac{16}{5}$, ou 1 $\frac{2}{3}$ de 3 $\frac{1}{5}$, ou 1 $\frac{10}{15}$ de 3 $\frac{3}{15}$, on emprunte sur le nombre 3 une unité qui vaut $\frac{15}{15}$ et l'on a à soustraire 1 $\frac{10}{15}$ de 2 $\frac{18}{15}$; la différence est donc 1 $\frac{8}{15}$.

De la multiplication des fractions.

66. Pour multiplier une fraction par un nombre entier, nous avons vu (55) qu'il suffit de multiplier son numérateur par ce nombre entier, ou de diviser son dénominateur par ce nombre. Ainsi, le produit de $\frac{5}{18}$ par 3 est $\frac{15}{18}$ ou $\frac{5}{6}$, fractions équivalentes.

On multiplierait de même un nombre fractionnaire par un nombre entier.

67. *Multiplier un nombre entier par une fraction, c'est agir sur ce nombre entier, pour avoir le produit, comme on agirait sur l'unité,*

pour avoir la fraction multiplicateur. Il faut donc partager ce nombre entier en autant de parties égales qu'il y a d'unités au dénominateur de cette fraction, et prendre autant de ces parties qu'il y a d'unités au numérateur. On obtient le même résultat en multipliant d'abord le nombre entier par le numérateur de la fraction, et en divisant ce produit par son dénominateur. Ainsi, le produit de 8 par $\frac{3}{5}$ est $\frac{8 \times 3}{5}$ ou $\frac{24}{5}$ ou $4\frac{4}{5}$.

Ce produit est le même que celui qu'on obtient en multipliant la fraction par le nombre entier.

Il résulte de la définition même que le produit d'un nombre entier par une fraction, est plus petit que le multiplicande.

68. Le produit de deux fractions est ce qu'on nomme *une fraction de fraction*. Multiplier $\frac{3}{5}$ par $\frac{7}{8}$ c'est prendre les $\frac{7}{8}$ de $\frac{3}{5}$, c'est-à-dire prendre 7 fois le huitième de $\frac{3}{5}$; il faut donc multiplier le dénominateur de $\frac{3}{5}$ par 8 et multiplier son numérateur par 7 ce qui donne $\frac{21}{40}$. Ainsi, pour faire le produit de deux fractions, il faut, sous le produit des numérateurs, écrire le produit des dénominateurs.

On ferait de même le produit de deux nombres fractionnaires ; le même procédé s'appliquerait également à plus de deux fractions, ou à plus de deux nombres fractionnaires.

Il résulte de la nature de cette opération, et de ce qui a été dit (nº **19**), que le produit de plusieurs fractions, ou de plusieurs nombres fractionnaires ne change pas, dans quelque ordre qu'on les multiplie.

De la division des fractions.

69. Pour diviser une fraction par un nombre entier, nous avons vu (**55**) qu'il suffit de multiplier son dénominateur par ce nombre entier, ou de diviser son numérateur. Ainsi, le quotient de $\frac{12}{13}$ par 3 est $\frac{12}{39}$ ou $\frac{4}{13}$, fractions équivalentes.

On diviserait de même un nombre fractionnaire par un nombre entier.

70. *Diviser une quantité quelconque par une fraction, c'est chercher une quantité telle qu'en la multipliant par cette fraction, on ait pour produit le dividende.* Ainsi, diviser 14 par $\frac{7}{8}$, c'est chercher une quantité dont les $\frac{7}{8}$ soient 14. Le huitième de cette quantité est donc $\frac{14}{7}$, et les 8 huitièmes sont $\frac{14 \times 8}{7}$ ou 16. On voit que, pour opérer la division, il suffit de multiplier le dividende par la fraction diviseur renversée.

Le quotient est nécessairement plus grand que le dividende.

71. Pour diviser une fraction par une autre, il faut de même multiplier la fraction dividende par la fraction diviseur renversée. Ainsi, le quotient de $\frac{21}{40}$ par $\frac{7}{8}$ est le produit de $\frac{21}{40}$ par $\frac{8}{7}$, c'est-à-dire $\frac{168}{280}$ ou $\frac{3}{5}$.

Lorsque la fraction dividende et la fraction diviseur ont le même

dénominateur, ce dénominateur se trouve facteur commun aux deux termes du quotient; il suffit donc, dans ce cas, d'écrire sous le numérateur de la fraction dividende, celui de la fraction diviseur. Ainsi, le quotient de $\frac{3}{10}$ par $\frac{5}{10}$ est $\frac{3}{5}$.

On opérerait de même sur les nombres fractionnaires.

Remarques sur les fractions.

72. Pour élever une fraction à une puissance, il suffit d'élever à cette puissance son numérateur et son dénominateur (68). Toute puissance d'une fraction irréductible est elle-même irréductible. Ainsi, la fraction $\frac{2}{3}$ étant irréductible, sa troisième puissance $\frac{2^3}{3^3}$ ou $\frac{8}{27}$ l'est aussi; car la multiplication de cette fraction par elle-même, n'introduit aucun facteur commun aux deux termes.

Quand on multiplie l'unité par une fraction, on obtient pour produit cette fraction même. Quand on divise l'unité par une fraction, on obtient pour quotient cette fraction renversée.

Dans tous les calculs sur les fractions, l'opération ne doit être considérée comme terminée que lorsque le résultat, s'il est fractionnaire, a été réduit à sa plus simple expression, et qu'on en a extrait les entiers.

DES FRACTIONS DÉCIMALES.

73. On nomme *fractions décimales*, ou *nombres décimaux*, les fractions ou les nombres fractionnaires dont le dénominateur est l'unité suivie d'un certain nombre de zéros, tels que $\frac{9}{10}$, $\frac{63}{100}$, $\frac{8763}{1000}$, etc.

En étendant aux quantités plus petites que l'unité le système de numération employé pour les nombres entiers, on parvient à supprimer le dénominateur des fractions décimales, et à leur donner la même forme qu'aux nombres entiers. Pour cela, on met une virgule à la droite du chiffre des unités, et l'on convient que le premier chiffre à droite de la virgule sera celui des *dixièmes*, le second celui des *centièmes*, le troisième celui des *millièmes*, et ainsi de suite. On a soin de remplacer par un zéro chaque espèce d'unité qui manque. Par exemple, le nombre fractionnaire $\frac{8763}{1000}$ pouvant se décomposer en $\frac{8000}{1000}$, $\frac{700}{1000}$, $\frac{60}{1000}$ et $\frac{3}{1000}$, ou en 8 unités, $\frac{7}{10}$, $\frac{6}{100}$ et $\frac{3}{1000}$, s'écrira 8,763. La fraction $\frac{75}{1000}$ pouvant se décomposer en $\frac{70}{1000}$ et $\frac{5}{1000}$, ou en $\frac{7}{100}$ et $\frac{5}{1000}$, s'écrira 0,075, puisqu'il n'y a ni unités, ni dixièmes.

Pour mettre une fraction décimale ou un nombre décimal sous la forme d'un nombre entier, il suffit donc d'écrire son numérateur, et de séparer sur sa droite, par une virgule, autant de chiffres qu'il y a de zéros au dénominateur. Pour cela on ajoute, s'il est nécessaire, des zéros à la gauche du numérateur.

Les chiffres placés à gauche de la virgule forment la *partie entière;* ceux qui sont à droite de la virgule forment la *partie décimale.* Les chiffres qui composent la partie décimale se nomment *chiffres décimaux* ou *figures décimales*, ou simplement *décimales*.

Pour écrire un nombre décimal sous forme fractionnaire, il faut prendre pour numérateur ce nombre décimal, abstraction faite de la virgule; et pour dénominateur, l'unité suivie d'autant de zéros qu'il y a de figures décimales.

Pour énoncer un nombre décimal, on énonce d'abord la partie entière, puis ensuite la partie décimale, comme si elle était sous forme de fraction ordinaire.

74. Un nombre décimal ne change pas de valeur quand on met des zéros à sa droite. Ainsi, $5{,}42 = 5{,}42000$; car $\frac{542}{100} = \frac{542000}{100000}$.

On multiplie un nombre décimal par 10, 100, 1000, etc., en avançant la virgule d'un, deux, trois, etc., rangs vers la droite. On le divise par 10, 100, 1000, etc., en avançant la virgule d'un, deux, trois, etc., rangs vers la gauche. En effet, la valeur de chaque chiffre ne dépendant que du rang qu'il occupe à partir de la virgule, devient de 10 en 10 fois plus grande ou plus petite à mesure qu'on avance la virgule d'un rang vers la droite ou vers la gauche.

En supprimant la virgule, on multiplie un nombre décimal par l'unité suivie d'autant de zéros qu'il y avait de figures décimales.

On divise un nombre entier par l'unité suivie d'un, deux, trois, etc. zéros, en séparant sur sa droite un, deux, trois, etc. chiffres décimaux.

De l'addition des nombres décimaux.

75. Pour additionner les nombres décimaux, on les écrit les uns sous les autres, de manière que les chiffres de même rang, par rapport à la virgule, soient dans une même colonne; on opère comme dans l'addition des nombres entiers, et l'on met une virgule à la droite des unités de la somme. L'addition suivante

$$\begin{array}{r} 345{,}071 \\ 20{,}9807 \\ 1{,}17 \\ 0{,}003 \\ \hline \end{array}$$

donne ainsi pour somme 367,2247

De la soustraction des nombres décimaux.

76. Pour soustraire l'un de l'autre deux nombres décimaux, on écrit le plus petit sous le plus grand, de manière que les chiffres de même rang, par rapport à la virgule, soient l'un sous l'autre; on opère comme dans la soustraction des nombres entiers,

et l'on met une virgule à la droite des unités de la différence. La soustraction suivante

$$\begin{array}{r} 965{,}72 \\ 89{,}8654 \\ \hline 875{,}8546 \end{array}$$

donne ainsi pour reste 875,8546

Les chiffres 5 et 4 du plus petit nombre n'ayant pas de chiffres supérieurs, on remplace mentalement ces chiffres supérieurs par des zéros.

De la multiplication des nombres décimaux.

77. Pour faire le produit de deux nombres décimaux, on multiplie abstraction faite de la virgule, et l'on sépare ensuite sur la droite du produit autant de chiffres décimaux qu'il y en a à la fois au multiplicateur et au multiplicande. Ainsi, pour multiplier 4,56 par 0,702, on multiplicra 456 par 702, ce qui donnera pour produit 320112, et l'on séparera cinq chiffres décimaux sur la droite de ce nombre, ce qui donnera 3,20112. En effet, les nombres proposés équivalent à $\frac{456}{100}$ et à $\frac{702}{1000}$ dont le produit est $\frac{320112}{100000}$

Lorsqu'on a plus de décimales à séparer sur la droite du produit que ce produit n'a de chiffres, on y supplée en mettant des zéros à sa gauche. Ainsi, le produit de 0,03 par 0,004 est 0,00012.

De la division des nombres décimaux.

78. Quand le dividende et le diviseur ont le même nombre de chiffres décimaux, on peut opérer la division sans avoir égard aux virgules, car les deux nombres proposés peuvent être considérés comme deux nombres fractionnaires de même dénominateur, et il suffit, pour avoir le quotient, de diviser l'un par l'autre les numérateurs. Ainsi, diviser 84,315 par 6,027, c'est diviser $\frac{84315}{1000}$ par $\frac{6027}{1000}$ ou simplement 84315 par 6027.

Quand le dividende et le diviseur n'ont pas le même nombre de décimales, on ramène ce cas au précédent, en mettant un nombre suffisant de zéros à la droite de celui qui a le moins de décimales.

Ainsi, diviser 9,038 par 3,2, c'est diviser 9,038 par 3,200, ou 9038 par 3200.

79. Les preuves de l'addition, de la soustraction, de la multiplication et de la division des nombres décimaux, s'effectuent comme pour les nombres entiers (**8**, **11**, **18** et **26**).

Réduction des fractions ordinaires en décimales.

80. Pour réduire en décimales une fraction ordinaire, $\frac{3}{8}$ par exemple, on cherche à exprimer en décimales le quotient de 3 par 8. Pour cela, on observe que 3 vaut 30 dixièmes; en les divisant par 8, on a pour quotient 3 dixièmes, et pour reste 6 dixièmes.

Les 6 dixièmes valent 60 centièmes ; en les divisant par 8, on a pour quotient 7 centièmes, et pour reste 4 centièmes. Ces 4 centièmes valent 40 millièmes ; en les divisant par 8, on a pour quotient 5 millièmes, et pour reste 0. Le quotient de 3 par 8, c'est-à-dire $\frac{3}{8}$, équivaut donc à 0,375. Ainsi, pour réduire une fraction ordinaire en décimales, on met un zéro à la droite du numérateur pour le convertir en dixièmes ; on divise ce nombre de dixièmes par le dénominateur, et l'on obtient ainsi le chiffre des dixièmes. A droite du reste de cette division, on met un zéro pour convertir le reste en centièmes, etc., etc. On trouvera ainsi que la fraction $\frac{83}{125}$

```
830 | 125
750   0,664
 800
 750
  500
  500
    0
```

équivaut à 0,664.

81. La réduction des fractions ordinaires en décimales sert à compléter par des décimales le quotient d'une division. Il suffit, pour cela, de mettre une virgule à la droite du chiffre des unités du quotient, et de convertir le reste de la division en dixièmes, le reste suivant en centièmes, et ainsi de suite. On trouvera ainsi que le quotient de 978 par 25

```
978 | 25
75    39,12
228
225
  30
  25
   50
   50
```

est 39,12.

Des fractions périodiques.

82. Quand on réduit une fraction ordinaire en décimales, on n'arrive pas toujours à avoir zéro pour reste : on retombe sur un reste déjà obtenu, en sorte qu'en continuant l'opération, on obtient au quotient une série de chiffres qui se reproduisent périodiquement dans le même ordre, sans que l'opération puisse se terminer. Le quotient est alors une fraction décimale *périodique* ; la série de chiffres, qui se reproduit sans cesse, se nomme la *période*.

Quand la période ne commence pas immédiatement après la virgule, la fraction prend le nom de fraction périodique *mixte*. Pour écrire une fraction périodique, on se contente d'écrire la période une fois ou deux, et on la fait suivre de quelques points. On trouvera ainsi que la fraction $\frac{8}{11}$ équivaut à 0,7272...., et la fraction $\frac{19}{22}$ à 0,86363....

83. Pour réduire en fraction ordinaire la fraction périodique 0,7272..., observons que, puisque la fraction cherchée $=$ 0,7272...,
100 fois cette fraction $=$ 72,7272...,
par conséquent 99 fois cette fraction $=$ 72,7272... $-$ 0,7272...,
c'est-à-dire que 99 fois cette fraction $=$ 72, et que cette fraction même vaut la 99e partie de 72, ou $\frac{72}{99}$ ou $\frac{8}{11}$. Il est facile de conclure de là que, pour réduire en fraction ordinaire une fraction périodique simple, il faut prendre pour numérateur la période, et pour dénominateur un nombre composé d'autant de 9 qu'il y a de chiffres dans la période.

Il suit de là que la fraction 0,999... équivaut à $\frac{9}{9}$ ou à 1.

84. Pour réduire en fraction ordinaire la fraction périodique mixte 0,86363..., observons que 10 fois cette fraction ordinaire $=$ 8,6363..., c'est-à-dire 8 et $\frac{63}{99}$ ou $\frac{8\times99+63}{99}$. Cette fraction même vaut donc $\frac{8\times99+63}{990}$. Il est facile de conclure de là que, pour réduire en fraction ordinaire une fraction périodique mixte, il faut prendre pour numérateur le produit du nombre qui précède la période par un nombre composé d'autant de 9 qu'il y a de chiffres dans la période, augmenté de cette période, et pour dénominateur un nombre composé d'autant de 9 qu'il y a de chiffres dans la période, suivis d'autant de zéros qu'il y a de chiffres avant la période.

Il suit de là que la fraction 0,44999... $=$ 0,46.

85. Quand le dénominateur d'une fraction irréductible ne contient que les facteurs 2 et 5, la fraction décimale équivalente n'est jamais périodique; car soit, par exemple, la fraction $\frac{7}{2\times5^3}$; en multipliant ses deux termes par 2^2, elle deviendra $\frac{7\times2^2}{2\times5^3\times2^2}$ ou $\frac{7\times2^2}{2^3\times5^3}$ ou $\frac{28}{10^3}$ ou $\frac{28}{1000}$ ou 0,028. On raisonnerait de même pour toute autre fraction de ce genre.

86. Quand le dénominateur d'une fraction irréductible contient d'autres facteurs que 2 ou 5, la division de son numérateur par son dénominateur ne saurait donner un quotient exact, puisqu'il est impossible de convertir cette fraction en une autre qui ait pour dénominateur un des nombres 10, 100, 1000, etc. De plus, la fraction décimale équivalente est périodique : car, supposons que son dénominateur soit, par exemple, 21 ; après 20 divisions partielles, on retombera nécessairement sur un reste déjà obtenu, puisque ces divers restes, moindres que le diviseur 21, ne sauraient être que l'un des 20 premiers nombres.

On prouverait facilement que cette fraction périodique est mixte,

quand le dénominateur de la fraction irréductible contient l'un des facteurs 2 ou 5, multipliés par d'autres facteurs.

Des approximations.

87. Lorsque le résultat d'une ou de plusieurs opérations est un nombre décimal et qu'on n'a pas besoin de connaître la valeur rigoureuse de ce résultat, mais seulement une valeur qui en diffère de moins d'un dixième, d'un centième, d'un millième, etc., on peut négliger tous les chiffres d'un ordre inférieur à l'ordre assigné, et l'on dit alors que la valeur de ce résultat est *approchée à moins d'un dixième*, *d'un centième*, *d'un millième*, *etc.* Ainsi, la valeur de 2,084127..., approchée à moins d'un millième, est 2,084.

Si le chiffre de l'ordre immédiatement inférieur à l'ordre assigné est un 5, suivi de chiffres significatifs, ou s'il est plus grand que 5, on diminue l'erreur causée par la suppression de ce chiffre et des suivants, en augmentant d'une unité le chiffre précédent. Ainsi, 0,2359... approche plus de 0,24 que de 0,23; et la valeur 0,24 est approchée à moins d'une demi-unité décimale du second ordre, c'est-à-dire à moins d'un demi-centième; car la fraction 0,2359 est comprise entre 0,235, ou 23 centièmes $\frac{1}{2}$, et 0,24 ou 24 centièmes.

DES NOMBRES COMPLEXES.

88. Les anciennes mesures de France étaient :

La *toise* : elle se divisait en 6 *pieds*, le pied en 12 *pouces*, le pouce en 12 *lignes*;

La *lieue*, de 25 au degré; elle valait 2280 toises;

L'*aune*, qui valait 3 pieds 7 pouces 10 lignes et $\frac{5}{6}$ de ligne;

La *livre* (poids) : elle se divisait en 16 *onces*, l'once en 8 *gros*, le gros en 3 *deniers*, et le denier en 24 *grains*. 100 livres faisaient un *quintal*.

La *livre* (monnaie) : elle se divisait en 20 *sous*, et le sou en 12 *deniers*.

Il y avait encore d'autres mesures inusitées aujourd'hui.

On appelle *nombres complexes* ceux dont les diverses parties sont rapportées à des unités de grandeur différente, quoique de même espèce; tel est le nombre 2 toises 3 pieds 7 pouces 10 lignes.

Pour abréger, on remplace les mots *toises*, *pieds*, *pouces*, *lignes*, par T, P, p, l; les mots *livres*, *onces*, *gros*, *deniers*, *grains*, par L, O, G, d, g; les mots *livres*, *sous*, *deniers*, par ₶, s, d, etc.

De l'addition des nombres complexes.

89. On ne peut additionner que des nombres de même espèce, et la somme est aussi de même espèce. Pour additionner les nom-

bres complexes, on les écrit les uns sous les autres, de manière que les unités de même rang soient dans une même colonne; on additionne successivement chaque colonne, en commençant par la droite, et en extrayant de chaque somme les unités du rang supérieur qui peuvent y être contenues. Pour cela, on divise respectivement la somme fournie par chaque colonne, à partir de la droite, par les nombres 12, 12, 6, s'il s'agit de longueur; par les nombres 24, 3, 8, 16, s'il s'agit de poids; par les nombres 12, 20, s'il s'agit de monnaie. On trouvera ainsi que la somme des nombres

$$\begin{array}{lrrrr} & 3^{T} & 5^{P} & 11^{p} & 8^{l} \\ & & 4 & 10 & 9 \\ & 1 & 5 & 8 & 11 \\ \hline \text{est} & 8^{T} & 4^{P} & 7^{p} & 4^{l} \end{array}$$

De la soustraction des nombres complexes.

90. On ne peut soustraire l'un de l'autre que deux nombres de même espèce, et la différence est aussi de même espèce. Pour soustraire l'un de l'autre deux nombres complexes, on écrit le plus petit sous le plus grand, de manière que les unités de même rang se correspondent, et l'on retranche dans chaque colonne le nombre inférieur du nombre supérieur; quand le nombre inférieur d'une colonne est plus grand que le nombre supérieur, on ajoute à celui-ci la valeur d'une unité du rang immédiatement plus élevé, et en passant à la colonne suivante, on augmente d'une unité, le nombre inférieur de cette colonne. On trouvera ainsi que la différence des nombres

$$\begin{array}{lrrrrr} & 5^{L} & 10^{O} & 2^{G} & 1^{d} & 17^{g} \\ & 2 & 13 & 7 & 2 & 22 \\ \hline \text{est} & 2^{L} & 12^{O} & 2^{G} & 1^{d} & 19^{g} \end{array}$$

De la multiplication des nombres complexes.

91. Le multiplicateur est toujours considéré comme abstrait, et le produit est de même espèce que le multiplicande. Pour multiplier un nombre complexe par un nombre abstrait, on multiplie successivement chacune de ses parties, en commençant par la droite, et en extrayant de chaque produit les unités d'espèce supérieure qui peuvent y être contenues.

$$\begin{array}{lrrrr} \text{Ainsi, le produit de} & 3^{T} & 4^{P} & 5^{p} & 7^{l} \\ \text{par} & & & & 9 \\ \hline \text{est} & 33^{T} & 4^{P} & 2^{p} & 3^{l} \end{array}$$

92. Pour multiplier deux nombres complexes l'un par

l'autre, on décompose le multiplicateur en parties qui soient des fractions simples les unes des autres, en sorte que les divers produits partiels puissent se déduire les uns des autres de la même manière. Pour multiplier $24^{tt}, 10^{s}, 6^{d}$, par $4^{T}, 5^{P}, 11, 7^{l}$, on décomposera le multiplicateur en $3^{T}, 1^{T}, 3^{P}, 2^{P}, 6$; $3^{P}, 2^{P}, 6^{l}, 1^{l}$, et on aura :

	24^{tt}	10^{s}	6^{d}	
pour 3^{T}	73^{tt}	11^{s}	6^{d}	
pour 1^{T}	24	10	6 ,	tiers du produit précédent,
3^{P}	12	5	3 ,	moitié du précédent,
2^{P}	8	3	6 ,	tiers du produit d'une toise,
6^{P}	2	0	$10\frac{1}{2}$,	quart du précédent,
3^{P}	1	0	$5\frac{1}{4}$,	moitié du précédent,
2^{P}	0	13	$7\frac{1}{2}$,	tiers du produit de 6 pouces,
6^{l}	0	3	$4\frac{7}{8}$,	quart du précédent,
1^{l}	0	0	$0\frac{13}{16}$,	sixième du précédent.
Total.	122^{tt}	9^{s}	$7^{d}\frac{15}{16}$	

Cette manière d'opérer se nomme la méthode des parties *aliquotes*.

De la division des nombres complexes.

93. Quand le dividende et le diviseur sont d'espèces différentes, le quotient est de même espèce que le dividende ; quand le dividende et le diviseur sont de même espèce, c'est la nature de la question qui décide de l'espèce du quotient.

Pour diviser un nombre complexe par un nombre abstrait, on divise d'abord les plus hautes unités ; on convertit le reste en unités de l'espèce immédiatement inférieure ; il suffit, pour cela, de se rappeler combien une unité de la première espèce vaut d'unités de la seconde ; à ce reste, ainsi converti, on joint les unités de la seconde espèce contenues dans le nombre proposé. On obtient de la sorte un second dividende partiel sur lequel on opère comme sur le premier. En continuant ainsi, on obtient toutes les parties du quotient. On trouvera ainsi que le quotient de $10^{L}\ 13^{O}\ 5^{G}\ 1^{d}\ 18$, par 6 est $1^{L}\ 12^{O}\ 7^{G}\ 1^{d}\ 19^{g}$.

94. Pour diviser un nombre complexe par un nombre complexe d'espèce différente, on convertit d'abord le diviseur en un nombre fractionnaire ; pour cela, on prend comme numérateur le nombre total d'unités de la plus petite espèce contenues dans le diviseur, et comme dénominateur le nombre de ces mêmes unités contenues dans l'unité principale du diviseur. Pour diviser le dividende par ce nombre fractionnaire, il suffit de le multiplier par son dénominateur, et de diviser le produit par son numérateur. Ainsi, pour diviser $1^{T}\ 0^{P}\ 8^{P}$ par $2^{tt}\ 11^{s}\ 6$, on remarquera que le

diviseur contient 618 deniers, et que 1^{tt} en contient 240; le diviseur équivaut donc à $\frac{618}{240}$; on n'aura donc qu'à multiplier le dividende par 240, ce qui donnera (19) 266^{T} 4^{P}, et à diviser ce produit par 618, ce qui donnera (93) 2^{P} 7^{p} 0 et $\frac{504}{618}$ ou $\frac{84}{103}$

En réduisant à une plus simple expression, lorsque cela est possible, le nombre fractionnaire qui remplace le diviseur, on simplifie le calcul.

95. Pour diviser l'un par l'autre deux nombres complexes de même espèce, on cherche combien chacun d'eux contient d'unités de la plus petite espèce, et l'on divise l'un par l'autre les nombres que l'on a trouvés; si le quotient doit être complexe, on convertit le reste de la division en unités immédiatement inférieures aux plus hautes unités de ce quotient, et l'on continue comme au nº 93. Par exemple, pour diviser 23^{tt} 17^{s} 8^{d} par 2^{tt} 11^{s} 6^{d}, on observera que le dividende contient 5732 deniers, et le diviseur 618 deniers; on divisera 5732 par 618; si le quotient doit exprimer des livres (poids), on convertira le reste de la division en onces que l'on divisera par 618; etc.

DU SYSTÈME MÉTRIQUE.

96. Le *mètre*, qui sert de base au système des nouvelles mesures, est la dix millionième partie du quart du méridien terrestre. Ses subdivisions sont le *décimètre* ou dixième de mètre, le *centimètre* ou centième de mètre, et le *millimètre* ou millième de mètre. Ses multiples sont le *décamètre* qui vaut 10 mètres, l'*hectomètre* qui vaut 100 mètres, le *kilomètre* qui vaut 1000 mètres, et le *myriamètre* qui vaut 10000 mètres.

Pour écrire une longueur à l'aide de ces diverses unités, on met à la suite les uns des autres les chiffres qui les représentent, dans l'ordre de leurs valeurs; on remplace par des zéros celles qui manquent, et l'on met une virgule à la droite du chiffre qui représente les unités principales. Ainsi, une longueur de 1 myriamètre 3 kilomètres 6 décamètres 8 mètres 5 décimètres et 5 millimètres, s'écrira 13068,505, si l'on prend le mètre pour unité principale; 1306,8505, si l'unité principale est le décamètre, et ainsi de suite.

97. L'unité de superficie pour la mesure des terres, est l'*are*, qui est un *carré* (figure semblable à une case de damier) dont le côté a un décamètre.

L'are a pour subdivision le *centiare* ou centième d'are, et pour multiple l'*hectare* qui vaut cent ares. Une superficie de 7 hectares 28 ares et 19 centiares s'écrirait 7,2819, en prenant l'hectare pour unité principale; une superficie de 15 hectares 8 ares et 9 centiares s'écrirait 15,0809.

98. L'unité de mesure pour le bois de chauffage est le *stère*;

c'est un *cube* (figure semblable à celle du dé à jouer) dont le côté a un mètre. On peut former les noms de ses subdivisions en mettant devant le mot *stère* les mots *déci*, *centi*, etc., et ceux de ses multiples à l'aide des mots *déca*, *hecto*, etc.

99. L'unité de capacité pour les liquides et les graines est le *litre*; le litre équivaut à un cube d'un décimètre de côté. Les subdivisions du litre sont le *décilitre*, le *centilitre*, etc.; les multiples sont le *décalitre*, l'*hectolitre*, le *kilolitre*, etc. Une capacité de 3 kilolitres 5 hectolitres 7 litres et 4 décilitres, s'écrirait 35,074, en prenant l'hectolitre pour unité principale, et 3507,4, si l'unité principale était le litre.

100. L'unité de poids est le *gramme*; son poids est celui d'un centimètre cube d'eau distillée à 4 degrés du thermomètre centigrade, et sous une pression atmosphérique de $0^m,76$. Les subdivisions du gramme sont le *décigramme*, le *centigramme*, le *milligramme*; ses multiples sont le *décagramme*, l'*hectogramme*, le *kilogramme* et le *myriagramme*. Un litre d'eau distillée pèse un kilogramme.

Un poids de 6 kilogrammes 8 décagrammes 5 grammes 9 décigrammes et 7 milligrammes, s'écrirait 6085,907, en prenant le gramme pour unité principale, et 6,085907, si l'on prenait pour unité principale le kilogramme.

101. L'unité monétaire est le *franc*; c'est une pièce d'argent à $\frac{9}{10}$ de fin, c'est-à-dire qui ne contient qu'un dixième d'alliage, et du poids de cinq grammes. La pièce de 2 francs pèse 10 grammes, la pièce de 5 francs en pèse 25. Le franc se subdivise en 10 *décimes*: ou en 100 *centimes*. Pour écrire 17 francs et 45 centimes, on posera 17 fr. 45; pour écrire 2 francs et 5 centimes, on posera 2 fr. 05.

102. Le calcul décimal s'applique sans aucune peine à toutes les mesures nouvelles.

Comparaison des mesures anciennes et nouvelles.

103. Le quart du méridien terrestre a été trouvé de 5130740 toises; on en conclut que le mètre vaut $0^T,513074$. En divisant cette valeur par 10, par 100, par 1000, on obtient la valeur du décimètre, du centimètre, du millimètre. En la multipliant au contraire par 10, par 100, par 1000, on obtient la valeur du décamètre, de l'hectomètre, du kilomètre, etc.

Une toise valant 864 lignes, en multipliant $0^T,513074$ par 864 on trouve que le mètre vaut $443^l,295936$ ou environ $443^l,3$ c'est-à-dire 3 pieds 11 lignes $\frac{3}{10}$.

La toise valant 864 lignes, et le mètre $443^l,3$, en divisant 864 par $443^l,3$ on trouve que la toise vaut $1^m,949$. En divisant cette valeur par 6 on obtient celle du pied; en divisant celle-ci par 12,

on obtient celle du pouce; et en divisant celle-ci par 12 on obtient celle de la ligne.

On déduit facilement de là que l'aune vaut $1^m,188$.

104. Le méridien étant divisé en 360 degrés, le quart du méridien en contient 90, de 25 lieues chacun; le quart du méridien est donc de 90×25 ou 2250 lieues. Si on divise 10000000 mètres par 2250, on trouvera que la lieue vaut $4444^m,44\ldots$ ou $4^{kil},444\ldots$

Puisque la lieue vaut $4^{kil},444\ldots$ ou $4^{kil}\frac{4}{9}$ (83), ou $\frac{40}{9}$ de kilom.: il s'en suit que le kilomètre vaut $\frac{9}{40}$ de lieue, ou $0^l,225$.

105. On trouve que le kilogramme pèse $18827^{gr},15$; d'ailleurs, la livre contient 9216 grains; en divisant tour à tour ces deux nombres l'un par l'autre, on trouvera que la livre vaut $0^{kil},4895$ et que le kilogramme vaut $2_{li},0428\ldots$ Il est facile de déduire de ces valeurs celles des subdivisions de la livre et du kilogramme.

106. On a trouvé par des calculs analogues que 81# représentent la valeur de 80 francs. Pour convertir des livres en francs, il suffit donc de multiplier le nombre de livres par $\frac{80}{81}$; et pour convertir des francs en livres, il suffit de multiplier le nombre de francs par $\frac{81}{80}$.

107. Généralement, pour convertir un nombre d'unités anciennes en unités nouvelles, il suffit de multiplier ce nombre par la valeur de l'unité ancienne en unités nouvelles, et réciproquement.

DES CARRÉS ET DE LA RACINE CARRÉE.

108. On appelle *carré* d'un nombre la seconde puissance de ce nombre; ce nombre lui-même est la *racine carrée* de sa seconde puissance. Ainsi 49 est le carré de 7, et 7 est la racine carrée de 49.

Les carrés des 9 premiers nombres sont 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, et 81. La racine carrée d'un nombre se désigne par le signe $\sqrt[2]{}$ ou simplement $\sqrt{}$; ainsi $\sqrt{49}=7$ signifie que la racine carrée de 49 est 7.

Extraire la racine carrée d'un nombre, c'est chercher un second nombre dont le premier soit le carré.

109. Si l'on fait le carré d'un nombre quelconque, 86 par exemple, en mettant en évidence les quatre produits partiels :

$$\begin{array}{r} 86 \\ 86 \\ \hline 36 \\ 480 \\ 480 \\ 6400 \\ \hline 7396 \end{array}$$

on trouve que ce carré se compose 1° de 36, carré des unités, 2° de deux fois 480, produit des dizaines par les unités, 3° de 6400, carré des dizaines. Cette propriété est générale.

110. Proposons-nous d'extraire la racine carrée de 7596 :

```
73.96 | 86
64      16.6
 99.6      6
 99 6    99 6
    0
```

Le nombre proposé étant compris entre 64 centaines et 81 centaines, la racine de ce nombre est comprise entre 8 dizaines et 9 dizaines; le chiffre des dizaines de la racine est donc 8. Posons 8 à droite du nombre proposé; retranchons de 73 le carré de 8 qui est 64, et à côté du reste 9 abaissons les chiffres suivants. Le nombre 996 contient encore le double produit des dizaines par les unités et le carré des unités; or, le double produit des dizaines par les unités ne peut se trouver que parmi les dizaines du nombre 996; divisons donc ses 99 dizaines par le double 16 des dizaines de la racine, le quotient 6 sera le chiffre des unités. Pour vérifier ce chiffre, formons le double produit des dizaines par les unités et le carré des unités; pour cela posons le chiffre 6 des unités à la droite du double 16 des dizaines, et multiplions 166 par 6 : le produit étant 996, le chiffre 6 est exact; posons-le à la droite du chiffre 8 des dizaines; la racine sera 86.

Le nombre dont on cherche la racine n'est pas toujours un carré parfait; dans ce cas, on trouve un reste, et l'opération a fait connaître la racine du plus grand carré contenu dans ce nombre.

111. Soit à extraire la racine carrée de 299209.

```
2992.09 | 54.7
2916      1087
  760.9      7
  760     7769
    0
```

Si l'on cherche, par la méthode du numéro précédent, le plus grand carré contenu dans les centaines du nombre proposé, on trouvera que ce carré est 2916 dont la racine est 54 dizaines. Si, à côté du reste 76, on abaisse les chiffres suivants et qu'on divise les 760 dizaines du nombre 7609 par le double 108 des dizaines de la racine, le quotient 7 sera le chiffre des unités de la racine. On vérifiera ce chiffre comme au numéro précédent.

On obtiendrait d'une manière analogue la racine carrée d'un nombre quelconque; ou du moins sa racine approchée *à moins d'une unité près.*

112. Lorsqu'un nombre entier n'est pas un carré parfait, sa racine ne saurait être exprimée exactement par aucun nombre fractionnaire ou décimal; car, en le mettant sous forme d'un nombre

fractionnaire irréductible, son carré serait aussi un nombre fractionnaire irréductible (72) et non un nombre entier.

Les quantités qui ne peuvent être exprimées exactement par aucun nombre entier ou fractionnaire sont dites *incommensurables*.

113. Pour extraire la racine carrée d'une fraction, il faut extraire celle de son numérateur, et celle de son dénominateur. Si ce dénominateur n'est pas un carré parfait, on multiplie les deux termes de la fraction par son dénominateur. Ainsi, pour extraire la racine carrée $\frac{5}{13}$ on multiplie les deux termes par 13, ce qui donne $\frac{65}{13^2}$; la racine carrée de 65 est à 8 moins d'une unité près, et la racine carrée de $\frac{65}{13^2}$ est $\frac{8}{13}$ à moins d'un 13ᵉ près.

114. Si l'on voulait la racine carrée d'un nombre, 32 par exemple, à moins d'un 100ᵉ, on le mettrait sous la forme $\frac{320000}{10000}$; la racine carrée du numérateur étant 565 à moins d'une unité, et la racine carrée du dénominateur étant 100, celle de la fraction, c'est-à-dire du nombre proposé, est $\frac{565}{100}$ ou 5,65 à moins d'un 100ᵉ près.

On traiterait de même tous les cas analogues.

DES CUBES ET DE LA RACINE CUBIQUE.

115. On appelle *cube* d'un nombre la troisième puissance de ce nombre; ce nombre lui-même est la *racine cubique* de sa troisième puissance. Ainsi 27 est le cube de 3, et 3 est la racine cubique de 27.

Les cubes des 9 premiers nombres sont : 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512 et 729.

La racine cubique d'un nombre se désigne par le signe $\sqrt[3]{}$; ainsi $\sqrt[3]{27} = 3$ signifie que la racine cubique de 27 est 3.

Extraire la racine cubique d'un nombre, c'est chercher un second nombre dont le premier soit le cube.

116. Nous avons vu que $(86)^2 = (80)^2 + 2 \times 80 \times 6 + 6^2$ (109). Si on multiplie cette valeur par 80, on aura :

$$(80)^3 + 2 \times (80)^2 \times 6 + 6^2 \times 80$$

Et si on la multiplie par 6, on aura :

$$(80)^2 \times 6 + 2 \times 80 \times 6^2 + 6^3$$

La somme de ces deux produits est le cube de 86, on a donc :

$$(86)^3 = (80)^3 + 3 \times (80)^2 \times 6 + 3 \times 80 \times 6^2 + 6^3.$$

Il suit de là que le cube d'un nombre de deux chiffres se compose : 1° du cube des dizaines, 2° du triple produit du carré des dizaines par les unités, 3° du triple produit des dizaines par le carré des unités, 4° du cube des unités. Cette propriété est générale.

117. Proposons-nous d'extraire la racine cubique de 636056.

636.056	86
512	192
1240.56	115200
1240 56	8640
0	216
	124056

Le nombre proposé étant compris entre 512 mille et 729 mille, sa racine cubique est comprise entre 8 dizaines et 9 dizaines. Le chiffre des dizaines de la racine est donc 8. Posons 8 à la droite du nombre proposé; retranchons des 636 mille de ce nombre le cube de 8 qui est 512, et à côté du reste 124 abaissons les chiffres suivants. Le nombre 124056 contient encore le triple produit du carré des dizaines par les unités, plus, etc. Or, ce produit ne peut se trouver que parmi les centaines du nombre 124056; divisons donc les 1240 centaines de ce nombre par 192 triple carré des dizaines 8, le quotient 6 sera le chiffre des unités ou un chiffre trop fort. Pour essayer le chiffre 6 formons le triple produit du carré des dizaines par les unités, le triple produit des dizaines par le carré des unités, et le cube des unités; la somme de ces trois parties étant 124056, le chiffre 6 est bien le chiffre des unités de la racine, et cette racine est 86.

Quand le nombre dont on veut extraire la racine cubique n'est pas un cube parfait, l'opération fait connaître la racine du plus grand cube qui y soit contenu.

118. Pour extraire la racine cubique du nombre 27809563, on chercherait, d'après la méthode du n° précédent, la racine du plus grand cube contenu dans les mille de ce nombre; cette racine exprimerait les dizaines de la racine cherchée. On continuerait alors comme dans l'opération précédente. On obtiendrait d'une manière analogue la racine cubique d'un nombre quelconque, ou du moins sa racine approchée *à moins d'une unité près.*

119. On prouverait comme au n° 112 que lorsqu'un nombre n'est pas un cube parfait, sa racine cubique est incommensurable.

120. Pour extraire sa racine cubique d'une fraction dont le dénominateur n'est pas un cube parfait, on multiplie ses deux termes par le carré de ce dénominateur. Ainsi, pour obtenir la racine cubique de $\frac{5}{7}$ on multipliera les deux termes par 49 ce qui donnera $\frac{147}{343}$; la racine cubique de 147 étant 5 à moins d'une unité près, la racine cherchée sera $\frac{5}{7}$ à moins d'un 7e près.

121. Si l'on voulait la racine cubique de 429 à moins d'un dixième, on mettrait ce nombre sous la forme $\frac{429000}{1000}$; la racine cubique du numérateur étant 75 à moins d'une unité près, et

celle du dénominateur étant 10, la racine cherchée sera $\frac{75}{10}$ ou 7,5 à moins d'un dixième près.

On traitera de même tous les cas analogues.

DES PROPORTIONS ARITHMÉTIQUES.

122. Lorsque la différence de deux nombres est égale à la différence de deux autres nombres, ces quatre nombres forment une *proportion arithmétique*. La différence prend alors le nom de *rapport arithmétique*.

Le premier et le troisième nombre se nomment les *antécédents*, le second et le quatrième se nomment les *conséquents*; le premier et le dernier sont les *extrêmes*, le second et le troisième sont les *moyens*. On met un point entre le premier et le second nombre, ainsi qu'entre le troisième et le quatrième, et l'on met deux points entre le second et le troisième. La proportion arithmétique 2 . 5 : 9 . 12 s'énonce : 2 *est à* 5 *comme* 9 *est à* 12.

123. *Dans toute proportion arithmétique la somme des extrêmes est égale à la somme des moyens.* En effet, la proportion 2 . 5 : 9 . 12, peut s'écrire $5-2=12-9$; et si l'on augmente chacune de ces différences de $2+9$, les sommes qu'on obtiendra seront égales; ainsi, $5-2+2+9=12-9+2+9$; mais $+2$ détruit -2 et 9 détruit -9, on a donc $5+9=12+2$.

On démontrerait d'une manière inverse que, si la somme de deux nombres est égale à la somme de deux autres nombres, ces quatre nombres forment une proportion arithmétique, où l'une des sommes est celle des extrêmes, et l'autre celle des moyens.

124. On peut faire subir à une proportion arithmétique tous les changements qui ne troublent pas l'égalité entre la somme des extrêmes et celle des moyens.

Le dernier extrême est égal à la somme des moyens, diminué du premier extrême; car puisqu'on a $5-2=12-9$, en ajoutant 9 de part et d'autre, il vient $5-2+9=12-9+9$ ou

$$5+9-2=12.$$

Puisque la somme des moyens est égale à la somme des extrêmes, *si les moyens sont égaux, l'un d'eux est égal à la moitié de la somme des extrêmes*; car de 4 . 7 : 7 . 10 on tire $7+7=4+10$ ou 2 fois $7=4-10$, d'où $7=\frac{4-10}{2}$. C'est ce qu'on appelle une *moyenne arithmétique*.

Des progressions arithmétiques.

125. On appelle *progression arithmétique* ou *par différence*, une suite de nombres tels que la différence entre chacun d'eux et celui qui le précède soit constante. Par exemple, les nombres 2, 5, 8, 11,

14, etc., forment une progression arithmétique, que l'on écrit ÷ 2 . 5 . 8 . 11 . 14. etc. Cette progression est *croissante;* en l'écrivant au rebours, on aurait la progression *décroissante*, ÷ 14 . 11 . 8 . 5 . 2.

Chaque terme d'une progression arithmétique croissante est égal au terme précédent augmenté de la différence. Chaque terme d'une progression arithmétique décroissante est égal au précédent diminué de la différence. Dans l'une et l'autre, chaque terme est *moyen arithmétique* entre le précédent et le suivant.

126. Pour obtenir le dernier terme d'une progression arithmétique croissante, quand on connaît le premier terme, la différence, et le nombre des termes, il faut ajouter au premier terme autant de fois la différence qu'il y a de termes avant le dernier.

127. Si l'on ajoute terme à terme les deux progressions :

÷ 2 . 5 . 8 . 11 . 14 . 17 .
÷ 17 . 14 . 11 . 8 . 5 . 2 .

On remarque que le second terme 5 de la première est égal à 2 plus la différence, et que le second terme 14 de la seconde est égal à 17 moins la différence. Il suit de là que la somme des deux seconds termes équivaut à la somme $2 + 17$ des deux premiers; on prouverait de même que la somme des troisièmes termes équivaut à la somme des seconds, etc. La somme totale des deux progressions équivaut donc à autant de fois $2+17$ qu'il y a de termes dans l'une d'elles; et comme elles sont équivalentes, *la somme des termes d'une progression arithmétique est égale à la somme du premier et du dernier terme, multipliée par la moitié des termes.*

128. Si l'on demandait de former une progression arithmétique de 6 termes, dont le premier fût 2 et le dernier 17, on remarquerait que la différence entre 2 et 17 doit être égale à 5 fois la différence de la progression (**126**). Cette différence de la progression est donc égale à la cinquième partie de $17 - 2$, c'est-à-dire à 3, et l'on obtiendra la progression ÷ 2 . 5 . 8 . 11 . 14 . 17. C'est ce qu'on appelle *insérer 4 moyens arithmétiques entre les nombres 2 et 17.*

DES PROPORTIONS GÉOMÉTRIQUES.

129. Lorsque le quotient de deux nombres est égal au quotient de deux autres nombres, ces quatre nombres forment une *proportion géométrique.* Le quotient prend le nom de *rapport géométrique.* Les quatre termes portent les mêmes noms que dans les proportions arithmétiques. Les nombres 15; 5, 12, 4, forment une proportion géométrique, que l'on écrit 15 : 5 :: 12 : 4 et que l'on énonce : 15 *est à* 5 *comme* 12 *est à* 4.

130. *Dans toute proportion géométrique, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.* En effet, la proportion 15 : 5 :: 12 : 4 peut s'écrire $\frac{15}{5} = \frac{12}{4}$; si l'on réduit ces nombres fractionnaires au même dénominateur leurs numérateurs devront être égaux, et l'on aura $15 \times 4 = 12 \times 5$.

On démontrerait d'une manière inverse que si le produit de deux nombres est égal au produit de deux autres nombres, ces quatre nombres forment une proportion géométrique où l'un des produits est celui des extrêmes, et l'autre celui des moyens.

131. On peut faire subir à une proportion géométrique tous les changements qui ne troublent pas l'égalité entre le produit des extrêmes et celui des moyens.

Ainsi on a 15 : 5 :: 12 : 4, 5 : 15 :: 4 : 12, 12 : 15 :: 4 : 5, 4 : 12 :: 5 : 15.
15 : 12 :: 5 : 4, 5 : 4 :: 15 : 12, 12 : 4 :: 15 : 5, 4 : 5 :: 12 : 15.

132. De l'égalité $\frac{15}{5}=\frac{12}{4}$ on tire $\frac{15}{5}+1=\frac{12}{4}+1$ ou $\frac{15}{5}+\frac{5}{5}=\frac{12}{4}+\frac{4}{4}$ ou $\frac{15+5}{5}=\frac{12+4}{4}$; ainsi 15 + 5 : 5 :: 12 + 4 : 4 ou 15 + 5 : 12 + 4 :: 5 : 4.

On obtiendrait de même 15 — 5 : 5 :: 12 — 4 : 4 ou
15 — 5 : 12 — 4 :: 5 : 4.

133. De ces deux proportions on tire $\frac{15+5}{12+4}=\frac{5}{4}$ et $\frac{15-5}{12-4}=\frac{5}{4}$ par conséquent : $\frac{15+5}{12+5}=\frac{15-5}{12-4}$ ainsi 15 + 5 : 12 + 4 :: 15 — 5 : 12 — 4, ou bien 15 + 5 : 15 — 5 :: 12 + 4 : 12 — 4.

134. De l'égalité $\frac{15}{5}=\frac{12}{4}$ on tire $\frac{15^2}{15^2}=\frac{12^2}{4^2}$, $\frac{15^3}{3^3}=\frac{12^3}{3^3}$, etc.

Ainsi, lorsque quatre nombres sont en proportion géométrique, leurs puissances semblables sont aussi en proportion géométrique. Il en serait de même de leurs racines carrées, cubiques, etc.

135. Lorsque deux proportions ont un rapport commun, les deux autres rapports sont égaux. Par exemple, si l'on a 12 : 4 :: 15 : 5 et 18 : 6 :: 15 : 5 on aura aussi 12 : 4 :: 18 : 6 (**133**).

136. Si l'on multiplie deux proportions *par ordre*, c'est-à-dire terme par terme, on obtient quatre produits qui sont en proportion. En effet, de la proportion 12 : 4 :: 15 : 5 on tire $\frac{12}{4}=\frac{15}{5}$; de la proportion 7 : 3 :: 14 : 6 on tire $\frac{7}{3}=\frac{14}{6}$. Par conséquent, $\frac{12}{4}\times\frac{7}{3}=\frac{15}{5}\times\frac{14}{6}$ ou $\frac{12\times7}{4\times3}=\frac{15\times14}{5\times6}$, d'où 12 × 7 :: 4 × 3 :: 15 × 14 : 5 × 6.

On pourrait multiplier de même trois, quatre proportions, etc.

137. *Dans toute proportion géométrique l'un des extrêmes est égal au produit des moyens divisé par l'autre extrême* ; car si l'on a 15 : 5 :: 12 : 4 d'où $\frac{15}{5}=\frac{12}{4}$; en multipliant ces deux nombres fractionnaires par 5, on devra avoir des produits égaux ; ainsi $\frac{15\times5}{5}=\frac{12\times5}{4}$ ou $15=\frac{12\times5}{4}$.

On prouverait de même que chaque moyen est égal au produit des extrêmes divisé par l'autre moyen. *Si les moyens sont égaux, l'un d'eux est égal à la racine carrée du produit des extrêmes.* Car de 16 : 8 :: 8 : 4 on tire $8\times8=16\times4$ ou $8^2=16\times4$, d'où $8=\sqrt{16\times4}$. C'est ce qu'on appelle une *moyenne géométrique*.

Des progressions géométriques.

138. On appelle *progression géométrique*, ou *par quotient*, une suite de nombres tels qu'en divisant chacun d'eux par celui qui le précède, ce quotient soit constant. Par exemple les nombres 2, 6, 18, 54, 162, etc., forment une progression géométrique, que l'on écri

$\div$ 2 : 6 : 18 : 54 : 162, etc. Le quotient constant prend le nom de *raison*. La raison de la progression précédente est 3. La progression décroissante $\div$ 162 : : 18 : 6 : 2 a pour raison $\frac{1}{3}$.

Chaque terme d'une progression géométrique est égal au précédent multiplié par la raison. Chaque terme est *moyen géométrique* entre le précédent et le suivant.

139. Pour obtenir le dernier terme d'une progression quand on connaît le premier terme, la raison, et le nombre des termes, il faut multiplier le premier terme par une puissance de la raison indiquée par le nombre des termes qui précèdent le dernier.

140. La somme des termes de la progression $\div$ 2 : 6 : 18 : 54 : 162 étant désignée par la lettre x, on aura $x = 2 + 6 + 18 + 54 + 162$, Par conséquent, $3x = 2\times3 + 6\times3 + 18\times3 + 54\times3 + 162\times3 = 6 + 18 + 54 + 162 + 162 \times 3$ ou $3x = 162 \times 3 + x - 2$. En retranchant de part et d'autre la somme x, on a $(3-1)x = 162\times3 - 2$, d'où en divisant par $(3-1)$, $x = \frac{162\times3-2}{3-1}$. Ainsi donc, *pour avoir la somme des termes d'une progression géométrique il faut multiplier le dernier terme par la raison, retrancher de ce produit le premier terme, et diviser le reste par la raison diminuée d'une unité.*

141. Si l'on demandait de former une progression géométrique de 5 termes, dont le premier fût 2 et le dernier 162, on remarquerait qu'en divisant le dernier terme par le premier, le quotient 81 serait la 4ᵉ puissance de la raison. Or, 81 est la 4ᵉ puissance de 3; la raison est donc 3, et la progression est $\div$ 2 : 6 : 18 : 54 : 162. C'est ce qu'on appelle *insérer 3 moyens géométriques entre les nombres 2 et 162.* Pour insérer un moyen géométrique entre deux nombres, il suffit de les diviser l'un par l'autre, et d'extraire la racine carrée du quotient; cette racine carrée est la raison de la progression. On peut encore opérer comme il est dit au n° **137**.

DES LOGARITHMES.

142. Si l'on forme deux progressions croissantes, l'une arithmétique, commençant par 0, l'autre géométrique, commençant par l'unité, chaque terme de la première progression est ce qu'on nomme le *logarithme* du terme correspondant de la seconde, et la raison de la progression géométrique se nomme la *base* de ce système de logarithmes.

On prend ordinairement l'unité même pour différence de la progression arithmétique, qui n'offre alors que la suite des nombres naturels, tandis que la progression géométrique offre la suite des puissances de la base. Et chaque terme de la progression arithmétique est égal à l'exposant de la puissance de la base, dans le terme correspondant de la progression géométrique. Si, par

exemple, on a les deux progressions :

$$\div 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . \text{etc.}$$
$$\div\!\div 1 . 3 . 9 . 27 . 81 . 243 . 729 . \text{etc.}$$
$$\text{ou } 1 . 3^1 . 3^2 . 3^3 . 3^4 . 3^5 . 3^6 . \text{etc.}$$

Chaque terme de la progression supérieure est égal à l'exposant de la base 3, dans la progression inférieure.

Remarquons que le logarithme de l'unité est toujours 0, et que le logarithme de la base est 1.

143. Si l'on multiplie entre eux les termes 9 et 81 de la progression géométrique, le premier étant la 2e puissance de la base, et le second la 4e puissance de cette base, le produit de ces nombres sera la 6e puissance de la base. Ainsi, pour obtenir le produit, il suffira de faire la somme des logarithmes des deux facteurs, et de chercher quel est le terme de la progression géométrique dont cette somme est le logarithme. On trouvera ainsi que la somme 6 correspond au terme 729, qui est en effet le produit de 81 par 9. Ainsi, *le logarithme du produit de deux termes est la somme des logarithmes de ces termes.*

144. On conçoit qu'en insérant entre les termes de chaque progression une série de moyennes arithmétiques et géométriques, le nombre de ces moyennes puisse être assez grand pour que tous les nombres entiers fassent partie de la progression géométrique, et que chaque nombre entier ait ainsi son logarithme. Et comme les nouvelles progressions jouiront nécessairement des mêmes propriétés que les premières, on peut établir comme principe général, que *le logarithme du produit de deux nombres est la somme des logarithmes de ses facteurs.*

Il est facile d'étendre ce principe à plus de deux facteurs.

145. On déduit de là que *le logarithme d'un quotient est la différence entre le logarithme du dividende et le logarithme du diviseur.* Car si l'on a $\frac{45}{5} = 9$ on en tire $45 = 9 \times 5$ et log. 45 = log. 9 + log. 5, et par conséquent en retranchant de part et d'autre log. 5, il viendra log. 45 — log. 5 = log. 9.

146. *Le logarithme d'une puissance quelconque d'un nombre est égal au logarithme de ce nombre, multiplié par l'exposant de cette puissance;* en effet, si on a $32 = 2^5$ ou $32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$, on en tire, d'après le principe du n° **144**,

$$\log. 32 = \log. 2 + \log. 2 + \log. 2 + \log. 2 + \log. 2 = (\log. 2) \times 5.$$

147. *Le logarithme de la racine, d'un degré quelconque, d'un nombre est égal au logarithme de ce nombre, divisé par le degré de cette racine.* En effet, la racine d'un degré quelconque d'un nombre, étant le nombre qui, élevé à une puissance indiqué par ce degré, reproduit le premier nombre, si l'on a, par exemple, *racine cinquième de* 32 = 2, ou $\sqrt[5]{32} = 2$, on en tire $32 = 2^5$ et log. 32 = 5 fois log. 2, d'où il suit que $\log. 2 = \frac{\log. 32}{5}$

148. *Le logarithme d'un nombre fractionnaire est la différence entre le logarithme du numérateur et le logarithme du dénominateur.* Cela résulte du principe du n° **145**. Ainsi,

$$\log. \tfrac{22}{7} = \log. 22 - \log. 7.$$

149. Une fraction exprimant le quotient de son numérateur par son dénominateur, *pour obtenir le logarithme d'une fraction il faut, du logarithme du numérateur, retrancher le logarithme du dénominateur.* Mais le logarithme du dénominateur est nécessairement plus grand que le logarithme du numérateur. Si, par exemple, on a $\log. 3 = 1$ et $\log. 243 = 5$, on aura $\log. \frac{3}{243} = 1 - 5.$, ou $\log. \frac{3}{243} = 1 - 1 - 4$, ou enfin $\log. \frac{3}{243} = -4$. La quantité -4 est ce qu'on nomme une quantité *négative;* ces quantités indiquent une soustraction à opérer sur les nombres auxquels on les ajoute, et, par conséquent, une addition à faire aux nombres dont on les soustrait. C'est comme si l'on disait que celui qui doit 4 fr. possède -4 fr.; car alors en *ajoutant* cette dette à son avoir il aura 4 fr. en *moins;* et en *retranchant* au contraire cette dette, il aura 4 fr. en plus.

Les logarithmes des fractions sont donc des quantités *négatives,* d'autant plus grandes que la fraction est elle-même plus petite. On peut s'en rendre compte en étendant les progressions du n° **142**, de la manière suivante :

$$\div \text{etc.} .-6 \;.-5 .-4 .-3 .-2 .-1 .\; 0 \;.\; 1 \;.\; 2 \;.\; 3 \;.\; 4 \;.\; 5 \text{ etc.}$$

$$\dot{\div} \text{ etc.} : \tfrac{1}{3^6} : \tfrac{1}{3^5} : \tfrac{1}{3^4} : \tfrac{1}{3^3} : \tfrac{1}{3^2} : \tfrac{1}{3} : 1 : 3 \;.\; 3^2 \;.\; 3^3 \;.\; 3^4 \;.\; 3^5 \text{ etc.}$$

Il suit de là que le logarithme de 0 est un nombre négatif infiniment grand, ou l'*infini négatif* que l'on désigne par $-\infty$.

150. Il est facile de voir que le principe du n° **144** s'applique aux logarithmes négatifs. Car si on a $\frac{1}{3^6} = \frac{1}{3^4} \times \frac{1}{3^2}$ on en tire :

$\log. 1 - \log. 3^6 = \log. 1 - \log. 3^4 + \log. 1 - \log. 3^2$ ou $-6 = -4 - 2$. Ainsi donc : $\log. \frac{1}{3^6} = \log. \frac{1}{3^4} + \log. \frac{1}{3^2}$.

Usage des tables de logarithmes.

151. Les logarithmes ordinaires ont pour base 10 ; en sorte que les logarithmes des nombres 10, 100, 1000 etc. sont 1, 2, 3, etc., et les logarithmes des fractions $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ etc. sont -1, -2, -3, etc. Si un nombre devient 10 fois, 100 fois, 1000 fois etc. plus grand ou plus petit, son logarithme augmente ou diminue de 1, de 2, de 3 etc. (**144**, **145**).

Les tables ne donnent les logarithmes des nombres que jusqu'à 10000; ainsi, ces logarithmes sont moindres que 4. Ils sont exprimés en décimales, et la partie entière se nomme la *caractéristique* de ces logarithmes. Les tables contiennent en outre les différences

entre les logarithmes conséeutifs, depuis 1000 jusqu'à 10000, différences que l'on peut regarder comme proportionnelles aux différences des nombres, avec d'autant moins d'erreur que ces nombres sont plus grands.

152. *Trouver le logarithme d'un nombre.*

1° Si ce nombre est dans la table, on trouve son logarithme en regard. Comme il y a des tables qui ne donnent pas la caractéristique, observons qu'elle contient toujours autant d'unités que le nombre a de chiffres, moins un. Car si, par exemple, un nombre a 5 chiffres, il est compris entre 10000 et 100000; par conséquent, son logarithme est compris entre 4 et 5, et a nécessairement pour caractéristique 4.

2° Pour trouver le logarithme d'un nombre qui excède la limite des tables, 358231 par exemple, observons que ce nombre équivaut à $100 \times 3582{,}31$ et que son logarithme équivaut à 2+ log. 3582,31. Le logarithme de 3582 étant 3,55413, et la différence entre ce logarithme et le suivant étant 12 cent-millièmes, posons la proportion : $1 : 12 :: 0{,}31 : x$

1 (différence des nombres consécutifs) : 12 cent-millièmes (différence de leurs logarithmes) :: 0,31 (différence entre 3582 et 3582,31) x la différence entre 3,55413 et le logarithme cherché. Cette différence est donc $0{,}31 \times 12$ cent-millièmes (**137**) ou 3,72 cent-millièmes; et le logarithme cherché est 3,55413+3,72 centmillièmes, c'est-à-dire 3,55416 ou plutôt 3,55417. Ajoutons 2 à ce logarithme et nous aurons le logarithme du nombre proposé, c'est-à-dire 5,55417.

3° Pour trouver le logarithme d'une fraction décimale, telle que 0,00358231 qui équivaut à $\frac{358231}{100000000}$, cherchons comme ci-dessus le logarithme de 358231, qui est 5,55417; et retranchons de ce logarithme celui du dénominateur qui est 8, nous aurons 5,55417—8. Pour réduire cette expression à un seul nombre, on peut retrancher 5,55417 de 8 et prendre le reste avec le signe —, ce qui donnera —2,44583. On peut aussi retrancher 8 de la caractéristique 5 qui deviendra seule négative, ce qu'on indiquera ainsi $\bar{3}{,}55417$.

Le logarithme d'une fraction ordinaire s'obtiendra d'après la règle du n° 149.

153. *Trouver le nombre qui correspond à un logarithme donné.*

1° Si le logarithme, ayant pour caractéristique 3, se trouve dans la table, on trouvera le nombre en regard. Quand la caractéristique est plus grande que 3, on commence par la réduire à 3; on cherche le nombre qui correspond au logarithme ainsi réduit, et l'on met à la droite de ce nombre autant de zéros que l'on a retranché d'unités à la caractéristique de son logarithme.

Quand la caractéristique est plus petite que 3, ou quand elle est seule négative, on ajoute au logarithme assez d'unités pour que sa caractéristique devienne 3 ; on cherche à quel nombre correspond ce logarithme, et l'on sépare sur sa droite autant de chiffres qu'on a ajouté d'unités à son logarithme.

Quand le logarithme est entièrement négatif on l'augmente d'assez d'unités pour que la différence ait pour partie entière 3 ; cette différence est un logarithme dont on cherche le nombre correspondant; puis on sépare sur sa droite autant de chiffres que l'on a ajouté d'unités au logarithme proposé.

Toutes ces opérations sont fondées sur la propriété fondamentale des logarithmes (**144**).

2° On voit que tout se réduit à chercher à quel nombre correspond un logarithme dont la caractéristique est 3. Si ce logarithme ne se trouve pas dans la table, si c'est par exemple 3,55419, on cherche celui qui, étant moindre, en approche le plus; on trouve que c'est 3,55413 qui est le logarithme de 3582. La différence entre le logarithme proposé et celui de ce nombre étant 6 cent-millièmes, et la différence tabulaire étant de 12 cent-millièmes entre le logarithme de 3582 et celui de 3583, on pose cette proportion :

$$12 : 1 :: 6 : x$$

12 cent-millièmes (différence tabulaire) : 1 (différence des deux nombres entiers consécutifs) :: 6 cent-millièmes (différence entre le logarithme proposé et celui de 3582) : x (la fraction qu'il faut ajouter à 3582). Cette fraction est donc $\frac{6}{12}$ ou 0,5, et le nombre cherché est 3582,5.

Il est important de se rappeler que la différence tabulaire exprime des cent-millièmes si les logarithmes ont cinq décimales, et des dix-millionièmes si les logarithmes ont sept décimales.

Des compléments arithmétiques.

154. Le reste qu'on obtient, en retranchant de 10 un logarithme moindre que 10, est ce qu'on nomme le *complément arithmétique* de ce logarithme. L'habitude de la soustraction fait voir sur-le-champ que, pour obtenir ce complément, il suffit de retrancher le premier chiffre à droite de 10 et tous les autres de 9. Ainsi, le complément de 3,7560124 est 6,2439876 ; or, comme on a $6,2439876 = 10 - 3,7560124$, on a aussi, en retranchant 10 de part et d'autre, $-3,7560124 = 6,2439876 - 10$. En sorte que, pour soustraire d'un nombre le logarithme 3,7560124, il suffit d'ajouter à ce nombre le complément de ce logarithme, et de retrancher 10 unités du résultat. On peut, par le moyen des complémens arithmétiques, éviter l'emploi des logarithmes négatifs.

RÈGLES DE TROIS.

155. *Si 3 ouvriers ont fait 22 mètres d'ouvrage, combien 7 ouvriers en feront-ils?* Un ouvrier en fera $\frac{22}{3}$, et 7 ouvriers en feront $\frac{22\times7}{3}$ ou $51^{m},33$.

On parvient au même résultat par la proportion $3:22::7:x$. Le nombre de mètres augmentant quand le nombre des ouvriers augmente, la règle de trois est dite *directe*.

Si 3 ouvriers ont fait en 22 heures un certain ouvrage, en combien d'heures 7 ouvriers le feront-ils? Un ouvrier fera cet ouvrage en 22×3 heures; et 7 ouvriers le feront en $\frac{22\times3}{7}$ heures, ou $9^{h}, 43$.

On parvient au même résultat par la proportion $22:3::7:x$. Le nombre d'heures diminuant quand le nombre des ouvriers augmente, la règle de trois est dite *inverse*.

Si 3 ouvriers ont mis 8 heures pour faire 40 mètres d'ouvrage, combien 7 ouvriers emploieront-ils d'heures pour en faire 60 mètres.

Si 3 ouvriers, pour faire 40 mètres, ont employé 8 heures,

3 ouvriers, pour faire	1^{m}	emploieront $\frac{8}{40}$ h.
3	60^{m}	$\frac{8\times60}{40}$ h.
1	60^{m}	$\frac{8\times60\times3}{40}$ h.
7	60^{m}	$\frac{8\times60\times3}{40\times7}$ h. ou 5 h. 14

Ici, la règle de trois est dite *composée*.

Règles de société, de mélange et d'alliage.

156. Dans les questions de société, on commence par chercher la mise totale; pour partager le gain total proportionnellement aux mises particulières, on n'a plus que des règles de trois à effectuer.

On résout d'une manière analogue les questions sur les mélanges et les alliages.

Règles d'escompte et d'intérêt simple.

157. Les questions sur l'escompte, et l'intérêt simple conduisent toujours à des règles de trois. Ainsi, pour savoir ce que devient une somme au bout de 21 mois à 6 pour cent par an, et à intérêts simples, on remarque que 6 pour cent par an font $\frac{1}{2}$ pour cent par mois, et $\frac{21}{2}$ pour cent pour 21 mois. On n'a donc qu'à prendre les $\frac{21}{2}$ de la centième partie de la somme, et à les ajouter à cette somme. On arrive au même résultat en posant la proportion $100 : 100 + \frac{21}{2}$: : la somme donnée : la somme cherchée.

Règle d'intérêts composés.

158. Pour savoir ce qu'une somme de 1285 francs, par exemple,

placée à 6 pour cent par an, et à intérets composés, devient au bout de 20 ans, on remarque que puisque 100 francs deviennent 106 francs au bout d'un an, 1 fr. devient $\frac{106}{100}$ fr., et 1285 fr. deviennent 1285 fr. $\times \left(\frac{106}{100}\right)$; au bout de 2 ans, la somme primitive devient donc 1285 fr. $\times \left(\frac{106}{100}\right)^2$ ..., et au bout de 20 ans elle devient 1285 fr. $\times \left(\frac{106}{100}\right)^{20}$. Il suit de là que le logarithme de la somme définitive $=$ log. $1285 + 20 \times$ log. $106 - 20 \times 2$.

Par des raisonnemens semblables, et par l'emploi des logarithmes, on résout toutes les questions sur les intérêts composés.

Les quantités 1285 fr., 1285 fr. $\left(\frac{106}{100}\right)$, 1285 fr. $\left(\frac{106}{100}\right)^2$......, 1285 fr, $\times \left(\frac{106}{100}\right)^{20}$ forment une progression géométrique dont le premier terme est la somme primitive, et dont la raison est $\left(\frac{106}{100}\right)$. Cette observation sert à résoudre les questions d'annuités et d'amortissement.

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

1. La *Géométrie* est la partie des mathématiques qui traite de la mesure de l'étendue.

Chaque corps occupe un *espace*, dont l'étendue prend le nom de *volume*. La limite de cet espace est une *surface*, dont l'étendue prend le nom d'*aire*. La limite commune de deux surfaces qui se rencontrent est une *ligne*, dont l'étendue prend le nom de *longueur*. La limite commune de deux lignes qui se rencontrent est un *point* qui n'a pas d'étendue.

2. On nomme *ligne droite* une ligne qui est le plus court chemin d'un point à un autre. On nomme *ligne brisée* une ligne composée de lignes droites. On nomme *ligne courbe* toute ligne qui n'est ni droite, ni composée de lignes droites.

On nomme *plan*, ou *surface plane*, une surface sur laquelle on peut tracer des lignes droites dans tous les sens. On nomme *surface courbe* toute surface qui n'est pas plane.

GÉOMÉTRIE PLANE.

DE LA LIGNE DROITE.

3. *Deux lignes droites qui ont deux points communs coïncident dans toute leur étendue.* Cela résulte de la définition de la ligne droite.

4. Ainsi, *par deux points donnés on ne peut mener qu'une seule ligne droite.* On désigne une droite AB (fig. 1) par deux points A et B, pris sur sa direction.

§ Des angles.

5. On nomme *angle* l'écart plus ou moins grand de deux droites qui se rencontrent. Le point de rencontre des deux droites est le *sommet* de l'angle, et ces deux droites sont ses *côtés*. La grandeur d'un angle est indépendante de la longueur de ses côtés. On désigne un angle BAC (fig. 2) par trois lettres : les deux extrêmes désignent des points pris sur chacun de ses

côtés ; celle du milieu désigne le sommet. Quelquefois on désigne un angle par son sommet seulement.

Deux angles sont égaux quand ils peuvent se superposer.

6. Quand deux droites AB, CD (fig. 3) se coupent mutuellement en un point O, elles déterminent 4 angles, AOC, COB, BOD, DOA. Les angles, tels que COA, COB, formés par ces deux droites, d'un même côté de la droite AB, sont dits *adjacents*.

7. Quand deux angles adjacents sont égaux, ils prennent le nom d'angles *droits*. *Tous les angles droits sont égaux.*

8. *Deux angles adjacents* COA, COB (fig. 4) *font en somme deux angles droits*. Car, si l'on mène la droite OK, qui fasse avec AB les deux angles droits AOK, BOK, on aura

COA = AOK + KOC, et COB = BOK — KOC ; d'où il suit
COA + COB = AOK + BOK = 2 angles droits.

9. *Quand deux droites* AB, CD (fig. 3) *se coupent mutuellement en un point* O, *les angles* COB, AOD, *opposés par le sommet, sont égaux*. Car on a COB + COA = 2 droits, COA + AOD = 2 droits ; d'où COB = AOD.

10. Il suit de là que, quand deux droites se coupent mutuellement, si l'un des quatre angles qu'elles forment est droit, les trois autres le sont aussi.

11. *La somme des angles* AOB, BOC, COD, DOE (fig. 5), *formés d'un même côté de la droite* AE, *équivaut à 2 droits*. Car cette somme équivaut à celle des angles AOD, DOE, qui équivaut à 2 droits (8).

12. *La somme des angles* AOB, BOC, COD, DOE, EOA (fig. 6), *formés autour d'un même point, équivaut à 4 angles droits*. Car, si l'on prolonge AO jusqu'en K, on voit que cette somme équivaut à celle des angles formés de chaque côté de la droite AK.

13. Tout angle COA (fig. 4), plus grand qu'un angle droit, se nomme un angle *obtus*; tout angle COB, plus petit qu'un angle droit, se nomme un angle *aigu*.

Deux angles, tels que COB, COK, dont la somme est un angle droit, sont dits *compléments* l'un de l'autre. Deux angles, tels que COB, COA, dont la somme équivaut à 2 angles droits, sont dits *suppléments* l'un de l'autre.

Des perpendiculaires et des obliques.

14. Deux droites sont dites *perpendiculaires* entre elles, quand elles se coupent mutuellement à angles droits. *Par un point d'une droite on ne peut élever qu'une seule perpendiculaire à cette droite ;* cela résulte de la définition des angles droits. Les droites non perpendiculaires sont dites *obliques*.

15. *D'un point* C (fig. 7) *extérieur à une droite, on peut toujours abaisser une perpendiculaire à cette droite.* Car, si l'on joint le point

C à un point K quelconque de la ligne AB, et qu'on fasse tourner la figure autour de AB comme charnière, de manière que la droite CK prenne la position DK, la droite CD qui joindra les points C et D sera perpendiculaire à AB en P, puisque les angles CPK, DPK seront nécessairement égaux. *Mais du point* C *on ne peut abaisser sur* AB *que la seule perpendiculaire* CD; car, soit CK, toute autre droite passant par le point C; rabattons, comme tout à l'heure, CK sur DK; si CK est perpendiculaire sur AB, on en pourra dire autant de DK, puisque les angles CKP, DKP sont nécessairement égaux; ces deux angles seront donc droits, et la ligne CKD sera droite (14); il y aurait donc deux droites différentes CD et CKD, passant par les deux points C et D; ce qui est impossible (4).

16. *Si d'un point* C, *extérieur à la droite* AB, *on mène la perpendiculaire* CP *et différentes obliques* CH, CK, CT, 1° *la perpendiculaire est plus courte que toute oblique* CK; 2° *de deux obliques* CH, CT, *qui s'écartent inégalement du pied* P *de la perpendiculaire, la plus longue est celle qui s'en écarte le plus;* 3° *deux obliques* CK, CH, *qui s'écartent également du pied de la perpendiculaire, sont égales.*

En effet, 1° et 2° Si l'on fait tourner la figure autour de AB, de manière que les lignes CP, CK, CT, prennent les positions DP, DK, DT, la droite CD sera plus petite que la ligne brisée CKD, et celle-ci plus petite que la ligne brisée enveloppante CTD, ce qu'on peut écrire ainsi : $CD < CKD$ et $CKD < CTD$, ou bien $CP + DP < CK + KD$, et $CK + KD < CT + TD$, ou encore $2.CP < 2.CK$ et $2.CK < 2.CT$; par conséquent $CP < CK$, et $CK < CT$.

3° Si $PH = PK$, en faisant tourner la figure autour de CP, le point K viendra s'appliquer en H; donc, $CH = CK$.

D'un point extérieur à une droite on ne peut pas mener plus de deux obliques égales.

17. *Tout point* C *de la perpendiculaire* CP, *élevée sur le milieu de la droite* AB, *est également distant des extrémités* A et B *de cette droite; tout point* K *extérieur à cette perpendiculaire, est inégalement distant de ces extrémités.* Car, 1° puisque $AP = PB$, les droites CA, CB sont des obliques égales (16); 2° si l'on mène KA, qui coupe CP en C, puis KB et CB, on aura $KB < CK + CB$, ou $KB < CK + CA$, ou KBKA.

DU CERCLE.

18. On appelle *circonférence de cercle*, ou simplement *cercle*, une ligne courbe dont tous les points sont à égale distance d'un point intérieur nommé *centre*. *Une ligne droite ne peut rencontrer un cercle en plus de deux points* (16); car ces points, joints au centre, donneraient autant d'obliques égales.

19. Toute droite qui coupe un cercle est dite *sécante* à ce cercle ; elle divise la circonférence en deux parties nommées *arcs*. La partie intérieure de la sécante est la *corde* commune à ces deux arcs. Toute corde qui passe par le centre se nomme *diamètre ;* la moitié du diamètre se nomme *rayon*. Tous les rayons sont égaux, ainsi que tous les diamètres.

20. *Tout diamètre divise la circonférence en deux parties égales.* Car, supposons qu'en pliant le cercle AIB (fig. 10) le long du diamètre AB, un point quelconque M de la demi-circonférence inférieure tombe en dedans ou en dehors de la demi-circonférence supérieure ; Si l'on mène le rayon OM, il rencontrera la demi-circonférence supérieure en un certain point I, différent de M ; les distances OM, OI seront inégales. Il y aurait donc deux points du même cercle inégalement distants du centre, ce qui est impossible.

21. *Le diamètre* AB (fig. 11) *est plus grand que tout autre corde* CD. Car si l'on joint OC et OD, on aura $CD < CO + OD$. Or, si O est le centre du cercle, on a $CO + OD = AO + OB = AB$; donc, $CD < AB$.

22. Toute droite qui n'a qu'un point de commun avec une circonférence de cercle est dite *tangente* à ce cercle ; le point commun est le point de *tangence* ou de *contact*.

23. On nomme *segment* de cercle la portion de ce cercle comprise entre un arc et sa corde. On nomme *secteur* la portion du cercle comprise entre un arc et les deux rayons qui aboutissent à ses extrémités. L'arc est la *base* du secteur ; la corde est la base du segment.

Des perpendiculaires dans le cercle.

24. *La perpendiculaire* OI (fig. 12), *abaissée du centre d'un cercle sur une corde* AB, *partage l'arc et la corde en deux parties égales.* En effet, si l'on tire les rayons OA et OB, ces rayons seront des obliques égales ; elles s'écartent donc également du pied I de la perpendiculaire (16) ; et l'on a $AI = IB$. Si maintenant C est le point où la perpendiculaire OI rencontre le cercle, plions la figure le long de OC ; IB s'appliquera sur IA, et l'arc BC sur l'arc AC (20) ; donc, le point C est le milieu de l'arc ACB.

25. *Dans le même cercle ou dans des cercles égaux, deux arcs égaux ont des cordes égales, et ces cordes sont également distantes du centre.* La superposition suffit pour démontrer ce théorème.

26. *Si deux arcs* AB, AC (fig. 13) *sont inégaux, le plus grand* AC *a la plus grande corde, et cette corde est la moins distante du centre.* Car soient OI, OH les perpendiculaires abaissées du centre sur ces cordes, et K le point où OI rencontre AC ; on aura $AI < AK$ (16), et, à plus forte raison, $AI < AK + KH$ ou $AI < AH$; donc, $2AI < 2AH$ ou $AB < AC$.

On aura de même : OH$<$OK, et, à plus forte raison, OH$<$OI.

Si les arcs proposés n'avaient pas une extrémité commune, on pourrait toujours remplacer l'un d'eux par un arc égal qui remplisse cette condition.

Le théorème précédent suppose que les deux arcs sont plus petits qu'une demi-circonférence.

27. *La perpendiculaire* AB (fig. 14) *élevée à l'extrémité d'un rayon* OA, *est tangente au cercle*. Car, si l'on joint un point quelconque I de cette droite, avec le centre O, la droite IO sera une oblique, plus longue que la perpendiculaire OA, ou que son égale OC ; le point I est donc extérieur au cercle ; et la droite AB n'a que le seul point A de commun avec la circonférence.

28. Réciproquement, *si la droite* AB *est tangente au cercle au point* A, *elle est perpendiculaire à l'extrémité du rayon* OA. Car tout point I de cette droite étant extérieur au cercle, on a OI $>$ OC ou OI $>$ OA. OA est donc la plus courte distance du point O à la droite AB ; donc, OA est perpendiculaire à AB (16).

Des cercles sécants et tangents.

29. *Deux cercles, qui ont trois points communs, coïncident.* Car, soient A, B, C, en 3 points : sur le milieu de la corde AB élevons une perpendiculaire, elle passera par le centre de chacun de ces cercles (24) ; sur le milieu de BC élevons une perpendiculaire, elle passera également par le centre de chaque cercle : or, deux droites qui ne coïncident pas ne peuvent avoir qu'un point commun. Donc, les deux cercles ont même centre : ils ont d'ailleurs même rayon (la distance de ce centre à l'un des 3 points communs) ; donc, ils coïncident.

Par 3 points donnés, on ne peut donc *faire passer qu'une seule circonférence.*

30. *Quand deux cercles se coupent, la ligne* OC (fig. 15) *qui joint leurs centres, est perpendiculaire sur le milieu* I *de la corde* AB *qui joint les points communs.* Car la perpendiculaire élevée sur le milieu de cette corde doit passer par les deux centres (24).

La distance OC *des centres est plus courte que la somme des rayons* OA + AC.

31. *Si deux cercles ont un point* A *commun* (fig. 15) *hors la ligne* OC *qui joint les centres* O *et* C, *ils se coupent.* Car, si l'on joint OA et AC, et que l'on fasse tourner la figure autour de OC comme charnière, de manière que le point A prenne la position B, ce point B appartiendra aux deux cercles puisqu'on aura BO = AO et BC = AC.

32. Il suit de là que *quand deux cercles se touchent, le point de tangence est sur la ligne des centres.*

33. Quand deux cercles se touchent extérieurement, la distance des centres est égale à la somme des rayons.

Quand deux cercles se touchent intérieurement, la distance des centres est égale à la différence des rayons.

Quand deux cercles sont extérieurs l'un à l'autre, la distance des centres est plus grande que la somme des rayons.

Quand deux cercles sont intérieurs l'un à l'autre, la distance des centres est plus petite que la différence des rayons.

DES PARALLÈLES.

34. Deux droites, situées dans un même plan, sont dites *parallèles* lorsqu'elles ne peuvent se rencontrer, quelque loin qu'on les prolonge. Par exemple, *deux droites perpendiculaires à une troisième sont parallèles*, car si elles avaient un point commun, il y aurait deux perpendiculaires abaissées de ce point sur une même droite, ce qui est impossible.

35. *Toute droite* OB(fig. 16), *oblique à* OX *rencontre la droite* H*h* *perpendiculaire à cette même ligne* OX. En effet, élevons au point O la perpendiculaire OA. Si l'on tire une suite de droites OC, OD, OE, etc., qui fassent des angles successifs BOC, COD, DOE, etc., égaux entre eux et à l'angle AOB, en ajoutant ainsi l'angle AOB à lui-même, on finira par atteindre et dépasser la grandeur de l'angle droit AOX : ainsi, l'espace indéfini compris entre les côtés de l'angle AOB, n'est contenu dans l'espace indéfini que comprennent les côtés de l'angle AOX qu'un nombre limité de fois, quelque petit que soit l'angle AOB. Si au contraire on prend les distances HL, LM, MN, etc., égales entre elles et à la distance OH, et qu'on élève les perpendiculaires L*l*, M*m*, N*n*, etc., pour former les bandes *h*HL*l*, *l*LM*m*, *m*MN*n*, etc., égales entre elles et à la bande AOH*h*, en ajoutant ainsi à lui-même l'espace indéfini compris par cette bande, on ne pourra jamais remplir l'espace indéfini AOX, quelque soit le nombre des bandes. Il suit de là que l'espace indéfini compris entre les côtés de l'angle AOB est plus grand que l'espace indéfini compris par la bande AOH*h*, ce qui empêche d'admettre que la droite OB reste constamment renfermée dans cette bande. Elle finira donc par en sortir, et coupera la perpendiculaire H*h*.

36. *Par un point donné* O (fig. 16) *on ne peut mener qu'une parallèle à une droite donnée* H*h*. En effet, si on abaisse OH perpendiculaire sur la droite donnée, et qu'on élève OA perpendiculaire à OH, les droites OA et H*h* seront parallèles (34); or, toute autre droite OB, nécessairement oblique à OH, rencontrera H*h* (35).

37. *Lorsque deux droites* OA, H*h* (fig. 16) *sont parallèles, toute perpendiculaire* OH *à l'une d'elle, est perpendiculaire à l'autre*. Car OH étant perpendiculaire à H*h*, si H*h* n'était pas perpendiculaire à OA, les droites OA et H*h* se rencontreraient (35),

38. *Deux parallèles sont partout également distantes.* Autrement dit : les perpendiculaires AC, BD (fig. 17), communes aux deux parallèles AB et CD, sont égales. En effet, si par le milieu E de AB on mène la perpendiculaire EF et que l'on plie la figure le long de EF, tous les angles étant droits, le point B tombera sur le point A, la droite BD prendra la direction AC, et la droite FD la direction FC : donc, le point D tombera sur le point B ; donc, BD=AC.

39. *Deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles.* Car si elles se rencontraient, il y aurait, du point de rencontre, deux parallèles menées à une même droite, ce qui est impossible (36).

40. *Deux droites* DC, EF (fig. 18), *qui font avec une troisième* HL, *des angles intérieurs* CAB, EBA *supplémentaires, sont parallèles.* Car si CAB est le supplément de EBA, ABF, qui est aussi le supplément de EBA, est égal à CAB. De même EBA est égal à DAB. Ainsi, les droites BF, AD ont, à l'égard de HL, la même position que les droites AC, BF; par conséquent, si celles-ci se rencontraient au-dessus de HL, les autres devraient se rencontrer au-dessous ; les droites CD, EF auraient donc deux points communs, ce qui est impossible.

Toute droite BK, telle que l'angle KBA ne soit pas le supplément de CAB, rencontrerait CD, car on ne peut, par un même point, mener deux parallèles à une même droite.

41. Quand deux parallèles CD, EF (fig. 18) sont rencontrées en A et B par une sécante HL, les angles CAB, EBF, dits *intérieurs d'un même côté*, sont supplémentaires ; cela résulte du n° précédent. Les angles CAB, ABF, dits *alternes-internes*, sont égaux, ainsi que les angles EBA et BAD. Les angles CAH, EBA, dits *internes-externes* ou *correspondants*, sont égaux, car CAH est égal à BAD (9) ; par la même raison, LBF=BAD, EBL=CAB, et HAD=ABF. Les angles EBL et HAD, dits *alternes-externes*, sont égaux, ainsi que les angles CAH et LBF.

42. *Deux angles* ABC, DEF (fig. 19) *qui ont leurs côtés parallèles et dirigés dans le même sens, sont égaux.* Car si l'on prolonge DE jusqu'à la rencontre de BC en H, on aura ABC=EHC comme angles correspondants, par rapport à la sécante BC ; et EHC=DEF comme angles correspondants, par rapport à la sécante DH ; donc, ABC=DEF.

Si les côtés du second angle étaient dirigés tous deux en sens contraire de ceux des premiers, comme cela a lieu pour SEH, cet angle serait encore égal au premier, puisqu'il est égal à DEF.

Si l'un des côtés seulement était dirigé en sens contraire, comme cela a lieu pour DES, les angles DES et ABC seraient supplémentaires ; car DES est le supplément de DEF.

43. *Si un angle* DEF (fig 20) *a ses côtés respectivement perpendiculaires à ceux d'un autre angle* ABC, *et si les deux angles sont tous deux aigus ou*

tous deux obtus, ces deux angles sont égaux. Car, si par le point B on mène Bd et Bf parallèles à ED et à EF, l'angle dBf sera égal à l'angle DEF (**42**); mais dBf et ABC sont tous deux complémentaires de fBA, puisque les angles dBA et fBC sont droits par hypothèse; donc, dBf=ABC; donc, DEF=ABC.

Si les deux angles étaient, l'un aigu et l'autre obtus, au lieu d'être égaux, ils seraient supplémentaires; c'est ce qui arrive pour les angles ABC et AEP.

Des parallèles dans le cercle.

44. *Deux parallèles* AB, CD (fig. 21) *interceptent sur une circonférence de cercle, des arcs égaux* AC *et* BD; car, en abaissant du centre la perpendiculaire OM sur ces deux parallèles, le point M, où cette perpendiculaire rencontre la circonférence, sera à la fois le milieu de l'arc AMB et le milieu de l'arc CMD. On a donc MC—MA=MD—MB ou AC=BD.

Si l'une des parallèles A'B' (prononcez A *prime*, B *prime*) était une tangente, la perpendiculaire passerait par le point de tangence M, et l'on aurait MC=MD.

Si les deux parallèles A'B', C'D' étaient tangentes, les rayons OM, ON, menés aux points de tangence, étant perpendiculaires à ces tangentes, seraient en ligne droite. MN serait donc un diamètre, et l'on aurait encore MCN=MDN.

DE LA MESURE DES ANGLES

45. *Si deux angles égaux ont leur sommet au centre d'un cercle, ils interceptent sur la circonférence des arcs égaux.* La superposition pure et simple démontre ce théorème. La réciproque est évidente.

Il est également évident que, *si deux arcs inégaux ont leur sommet au centre d'un cercle, le plus grand angle intercepte sur la circonférence un plus grand arc*, et réciproquement.

46. Deux diamètres perpendiculaires coupant la circonférence en quatre parties égales (**20**, **45**), un angle droit dont le sommet est au centre intercepte entre ses côtés le quart de la circonférence, ou un *quadrant*.

47. *Deux angles au centre* (c'est-à-dire dont le sommet est au centre) AOB, BOC (fig. 22) *sont entre eux comme les arcs* AB, BC *interceptés entre leurs côtés*. En effet : 1° si les deux arcs AB, BC ont une commune mesure m, divisons chacun d'eux en parties égales à cette mesure, et menons des rayons à tous les points de division; les angles AOB, BOC, seront divisés en autant d'angles égaux (**45**) que les arcs correspondants AB et BC contiennent de parties égales à m. On aura donc la proportion AOB : BOC :: AB : BC.

2° Si les deux arcs n'ont pas de commune mesure, divisons AB en 100 parties égales, et portons l'une de ces parties sur BC autant

de fois que cela sera possible, par exemple 89 fois; il restera une portion d'arc plus petite qu'une de ces 89 divisions. Menons des rayons à tous les points de division; l'angle AOB se trouvera partagé en 100 angles égaux, et l'angle BOC contiendra 89 de ces angles, plus un angle moindre que l'un d'eux (45). On verrait de même qu'en divisant AB en 1000 parties égales, et par conséquent l'angle AOB en 1000 angles égaux, si BC contient par exemple 897 de ces parties, plus un reste moindre que l'une d'elles, l'angle BOC contiendra aussi 897 de ces angles, plus un reste moindre que l'un d'eux. Or, ces restes seront d'autant plus petits que les divisions de AB seront plus nombreuses; on pourra donc les rendre aussi petits qu'on voudra en multipliant suffisamment le nombre de ces divisions. Donc, dans tous les cas, on a rigoureusement AOB : BOC :: AB : BC.

48. Les angles ont pour mesure les arcs décrits d'un même rayon, et de leurs sommets comme centres. L'unité d'angle est l'angle droit, l'unité d'arc est le *quadrant*. Un angle aigu a pour mesure un arc plus petit que le quadrant; un angle obtus a pour mesure un arc plus grand que le quadrant. Deux arcs sont complémentaires quand leur somme équivaut à un quadrant; ils sont supplémentaires quand leur somme équivaut à deux quadrants. Deux arcs sont égaux quand ils sont à la fois complémentaires ou supplémentaires d'un troisième.

49. On divise le quadrant en 90 degrés, chaque degré en 60 minutes et chaque minute en 60 secondes. On divise aussi le quadrant en 100 grades, chaque grade en 100 minutes centésimales, et chaque minute en 100 secondes. Un arc de 64 degrés 16 minutes 59 secondes, s'écrirait $64° 16' 59''$. Un arc de 71 grades 42 minutes centésimales 56 secondes centésimales, s'écrirait $71^{gr},4256$. Pour réduire les degrés en grades, on réduit d'abord les minutes et secondes en fraction décimale du degré; on multiplie alors les degrés et fractions de degré par $\frac{10}{9}$. Pour réduire au contraire des grades en degrés, il faut les multiplier par $\frac{9}{10}$. Pour mesurer les angles, on emploie le *rapporteur*, demi-cercle divisé, dont on place le centre au sommet de l'angle à mesurer. Sur le terrain, on emploie le *graphomètre*, grand rapporteur, garni d'alidades ou de lunettes.

50. *Tout angle dont le sommet est sur une circonférence, a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés.* Considérons d'abord l'angle ABC (fig. 23) dont un côté BC est un diamètre. Par le centre O menons DE parallèle à AB, nous aurons AD=BE. Mais comme BOE=DOC (9) on a aussi BE=CD; donc, AD=DC. L'arc DC est donc la moitié de AC. Mais l'angle DOC a pour mesure DC; donc, ABC qui lui est égal comme correspondant a pour mesure la moitié de AC.

Considérons maintenant l'angle ABC (fig. 24). Si on tire le diamètre BD, l'angle ABD aura pour mesure la moitié de AD; l'angle CBD aura pour mesure la moitié de CD; donc, ABC, qui

est la somme des angles ABD et CBD, a pour mesure la moitié de la somme des arcs AD et DC, c'est-à-dire la moitié de AC.

On prouverait de même que l'angle ABC' qui est la différence des angles ABD et C'BD, a pour mesure la moitié de la différence des arcs AD et C'D, c'est-à-dire la moitié de AC'.

Considérons enfin l'angle ABC'' (prononcez C *seconde*) formé par une tangente BC'' et une sécante BA; cet angle est la somme de l'angle ABD plus l'angle DBC''; il a donc pour mesure la moitié de l'arc AD plus un quadrant, c'est-à-dire plus la moitié de la demi-circonférence DMB; il a donc pour mesure la moitié de l'arc AMB.

51. Tout angle dont le sommet est sur la circonférence et dont les côtés aboutissent aux extrémités d'une corde, sont dits *inscrits* dans le segment qui a cette corde pour base; et le segment est dit *capable* de cet angle. Le demi-cercle est un segment capable de l'angle droit, car tout angle inscrit à ce segment a pour mesure la moitié de la demi-circonférence, c'est-à-dire le quadrant.

PROBLÈMES

relatifs aux perpendiculaires, aux angles et aux parallèles.

52. *Par un point* M (fig. 25), *pris sur la droite* XY, *élever une perpendiculaire à cette droite.* Prenons MA=MB; des points A et B comme centres, avec un même rayon plus grand que AM, décrivons deux arcs de cercle, qui se couperont en un point N, et joignons MN qui sera la perpendiculaire demandée (**16**, **17**, **30**).

53. *D'un point* O (fig. 26) *extérieur à la droite* XY, *abaisser une perpendiculaire sur cette droite.* Du point O comme centre, avec un rayon arbitraire, décrivons un arc de cercle qui coupe XY aux points A et B. De ces points comme centres, avec un rayon arbitraire, décrivons deux arcs de cercle qui se coupent en un point N; tirons ON qui sera la perpendiculaire demandé (**24**, **17**).

54. *Par trois points donnés* A, B, C, *faire passer une circonférence de cercle.* Par le milieu de la droite qui joint les points A et B, élevons une perpendiculaire à cette droite; par le milieu de la droite qui joint les points B et C, élevons de même une perpendiculaire à cette droite : ces deux perpendiculaires se rencontreront au centre du cercle demandé (**24**).

55. *Par un point* C (fig. 27) *de la droite* CD, *mener une seconde droite qui fasse avec la première un angle égal à un angle donné aob.* Des points O et C comme centres, avec un rayon arbitraire, décrivons les arcs de cercle *amb* et BMB'; du point B comme centre, avec un rayon égal à la corde *ab*, décrivons un arc qui coupera l'arc BMB' au point A, tirons CA qui sera la droite cherchée. Car la corde *ab* égale la corde AB.

56. *Partager un angle donné* AOB (fig. 28) *en deux parties égales.* Prenons OA=OB; des points A et B comme centres, avec un rayon quelconque, décrivons deux arcs de cercle qui se couperont en un point D; joignons OD qui sera la *bissectrice* demandée. Car, d'après la construction, OD est perpendiculaire sur le milieu de AB, et en pliant la figure le long de OI, le point B viendra s'appliquer sur le point A; donc, l'angle IOB=l'angle IOA.

En répétant plusieurs fois cette opération, on peut partager un angle en 4, 8, 16, 32 etc., parties égales

57. *Par un point* O (fig. 29) *extérieur à une droite* AB, *mener une parallèle à cette droite.* Joignons le point O à un point quelconque C de la droite AB. Par le point O menons une droite DE qui fasse avec OC un angle COD égal à l'angle OCB; la droite DE sera la parallèle demandée (**42**, **55**).

58. *Par un point* O (fig. 30) *extérieur à une droite* AB, *mener une droite qui fasse avec* AB *un angle égal à un angle donné bac.* Par un point quelconque C de la droite AB, menons une droite CD qui fasse avec AB l'angle DCB égal à l'angle donné (**55**); et par le point O menons OE parallèle à CD (**57**). La droite OE sera la droite demandée (**42**).

59. *Par un point donné sur une circonférence de cercle, mener une tangente à cette circonférence.* Par le point donné élevons une perpendiculaire au rayon qui aboutit à ce point (**27**).

60. *Sur une corde donnée* AB (fig. 31) *décrire un segment capable d'un angle donné.* Par le point B menons la droite BC qui fasse avec AB l'angle ABC égal à l'angle donné. Au point I, milieu de AB, élevons une perpendiculaire à AB, et au point B une perpendiculaire à BC; ces deux perpendiculaires se rencontreront au centre O du cercle demandé (**24**, **27**). Le segment AMB, décrit du point O comme centre, et du rayon OB, sera capable de l'angle donné (**50**, **51**). Si l'angle donné était droit, le point O se confondrait avec le point I (**51**).

61. *Par un point* A (fig. 32) *extérieur à un cercle, mener une tangente à ce cercle.* Joignons le point donné A au centre O du cercle donné. Sur OA, comme diamètre, décrivons une demi-circonférence qui coupera le cercle donné en un point M. Joignons AM, qui sera la tangente demandée. Car si l'on tire OM, l'angle OMA, inscrit dans une demi-circonférence, sera droit et la ligne AM sera perpendiculaire à l'extrémité du rayon OM.

DES TRIANGLES.

62. On appelle *triangle* la portion de plan comprise entre trois droites qui se coupent deux à deux. Les points de rencontre sont les *sommets* du triangle, et les distances de ces sommets sont ses *côtés*. Les angles formés par les côtés sont les angles du triangle.

Un triangle est *équilatéral* quand ses trois côtés sont égaux ; *isocèle* quand deux côtés seulement sont égaux ; *scalène* quand les trois côtés sont inégaux.

63. *La somme des trois angles d'un triangle quelconque* ABC (fig. 33), *équivaut à deux angles droits*. Car si l'on prolonge AB jusqu'en D, et qu'on mène BE parallèle à AC, on aura ACB = CBE, comme alternes-internes, et CAB = EBD comme correspondants (41). Or, EBD + CBE + ABC = 2 droits (11). Donc, etc.

Remarquons que l'angle CBD, dit *extérieur* au triangle ABC, équivaut à la somme des deux angles A et C.

Un triangle ne peut avoir plus d'un angle droit ou obtus.

64. Un triangle est *rectangle* quand il a un angle droit; les deux angles aigus sont complémentaires. Le côté opposé à l'angle droit prend le nom d'*hypothénuse*.

65. *Dans tout triangle isocèle* BAC (fig. 34), *les angles* B, C, *opposés aux côtés égaux, sont égaux*. Car si on élève une perpendiculaire sur le milieu D de la *base* BC, elle devra contenir le point A également distant de B et de C (17); et si l'on plie la figure le long de AD, le point B tombera sur le point C; donc, l'angle ABD = ACD.

Dans tout triangle isocèle, la perpendiculaire abaissée du sommet sur la base, la divise en deux parties égales.

66. *Dans tout triangle* BEC (fig. 34), *l'angle* ECB *opposé au plus grand côté* BE, *est le plus grand*. Car, si on élève une perpendiculaire sur le milieu D du côté BC, elle coupera le plus grand côté en un point A (16); et si l'on mène AC, on aura AB = AC (17), et ABD = ACD (65). Donc, ECD > ACD ou ECD > ABD.

67. Il suit des théorèmes des nos 65 et 66, que leurs réciproques sont vraies.

Tout triangle équilatéral est en même temps équiangle, et réciproquement.

68. *Le milieu de l'hypothénuse d'un triangle rectangle est également distant des trois sommets ;* car l'angle droit est inscriptible dans une demi-circonférence qui a l'hypothénuse pour diamètre (51). *En menant une droite du milieu de l'hypothénuse au sommet de l'angle droit, on partage le triangle en deux triangles isocèles.*

69. *Si deux triangles* ABC et A'B'C' (fig. 35) *ont le côté* AC = A'C' *et* AB = A'B' *et si l'angle* BAC *est plus grand que l'angle* B'A'C', *le côté* BC *opposé à l'angle* BAC *sera plus grand que le côté* B'C' *opposé à l'angle* B'A'C'. En effet, portons le côté A'C' sur le côté AC, le côté A'B' se dirigera dans l'intérieur de l'angle BAC.

1° Si le point B' tombe dans l'intérieur du triangle ABC, on aura AB' + B'C < AB + BC; mais AB' = AB; donc B'C < BC ou BC > B'C.

2° Si le point B' tombe sur le côté BC (fig. 36) on a évidemment BC > B'C ou BC > B'C'.

3° Si le point B tombe en dehors du triangle ABC (fig. 37) on a $AB < BI + IA$, et $B'C < B'I + IC$; ainsi $AB + B'C < BI + IA + B'I + IC$, ou $AB + B'C < BC + AB'$; mais $AB' = AB$; donc, $B'C < BC$ ou $BC > B'C'$.

70. *Deux triangles sont égaux quand ils ont leurs trois côtés égaux.* Cela résulte du théorème précédent.

Un triangle est déterminé par ses trois côtés.

71. *Deux triangles sont égaux quand ils ont deux côtés égaux comprenant un angle égal* : car ils peuvent se superposer.

Un triangle est déterminé par deux côtés et l'angle compris.

72. *Deux triangles sont égaux quand ils ont un côté égal, adjacent à des angles égaux* : car ils peuvent se superposer.

Un triangle est déterminé par un côté et deux angles quelconques.

73. *Deux triangles rectangles sont égaux quand ils ont l'hypothénuse égale et un angle aigu égal.* Cela résulte du n° précédent.

74. Deux triangles sont dits *symétriques* lorsqu'ils ont leurs côtés égaux chacun à chacun, mais inversement disposés. Ils sont égaux sans être directement superposables.

§ Problèmes sur les triangles.

75. *Connaissant deux angles* a et b *d'un triangle, trouver le troisième angle.* Par un point quelconque B de la droite AD (fig. 33), menons une droite BE qui fasse avec la première l'angle $EBD = a$; menons une autre droite BC qui fasse avec BE l'angle $CBE = b$; l'angle CBA sera l'angle cherché (63).

76. *Étant donnés les trois côtés* m, n, p, *d'un triangle, construire ce triangle.* Prenons (fig. 33) $AB = m$. Du point A comme centre, avec un rayon égal à n, décrivons un arc de cercle; du point B comme centre, avec un rayon égal à p, décrivons un second arc, qui coupera le premier en un point C, tirons AC et BC.

Le triangle serait impossible si l'on avait $m < n + p$, ou $m > n - p$ (33).

77. *Étant donnés deux côtés* m, n, *d'un triangle, et l'angle compris* a, *construire le triangle.* Menons deux droites AB, AC (fig. 33), qui fassent entre elles un angle égal à a; prenons $AB = m$ et $AC = n$, et joignons BC.

Le triangle est toujours possible.

78. *Étant donnés le côté* m *d'un triangle et les angles adjacents* a et b, *construire le triangle.* Prenons AB m (fig. 33); menons par le point A la droite AC qui fasse avec AB l'angle $BAC = a$, et par le point B la droite BC qui fasse avec AB l'angle $CBA = b$, les deux droites, en se rencontrant, détermineront le triangle.

Le triangle serait impossible si l'on avait $b + a < 2$ droits, ou $a + b = 2$ droits.

79. *Étant donnés deux côtés* m, n, *d'un triangle, et l'angle* a *opposé au côté* n, *construire le triangle.* Menons deux droites AY, AX (fig. 38), qui fassent entre elles un angle YAX égal à a. Prenons

AC = m; du point C comme centre, avec un rayon égal à n, décrivons un arc de cercle qui coupera la droite AX en deux points B et B′; joignons BC et B′C; les deux triangles ABC, AB′C satisferont à l'énoncé.

Quand l'angle donné est droit ou obtus, il n'y a qu'une solution. Elle devient impossible, si on a $n < m$.

Il n'y a aucune solution possible quand le côté n, opposé à l'angle donné, est plus petit que la perpendiculaire AD.

80. Un triangle contient 5 éléments, 3 côtés et deux angles (le 3ᵉ angle pouvant se déduire des deux autres). Il suffit de 3 de ces 5 éléments pour construire le triangle.

81. *Circonscrire une circonférence à un triangle donné*, c'est faire passer une circonférence par ses trois sommets (**54**).

82. *Inscrire une circonférence à un triangle*, c'est décrire une circonférence intérieure à ce triangle, qui soit tangente à ses 3 côtés. Il suit de là que les perpendiculaires abaissées du centre de ce cercle sur les trois côtés du triangle doivent être égales (**27**). Si l'on divise en deux parties égales l'angle CAB du triangle ABC (fig. 39), les perpendiculaires ON, OP, abaissées d'un point quelconque O de la bissectrice AO sur les côtés AC, AB, seront égales; car les triangles rectangles ANO, APO ont l'hypothénuse commune et l'angle aigu NAO = PAO. Le centre du cercle cherché doit donc se trouver sur la bissectrice AO. Or, il doit se trouver de même sur la bissectrice BO de l'angle CBA; il se trouvera donc à la rencontre de ces deux bissectrices.

Les perpendiculaires ON et OM étant égales, il s'ensuit que le point O appartient à la bissectrice de l'angle ACB; ces trois bissectrices *concourent* au point O.

DES QUADRILATÈRES.

83. On appelle *quadrilatère* une portion de plan terminée par quatre droites qui se coupent. Un quadrilatère a 4 côtés, 4 angles et 4 sommets. Les côtés opposés sont ceux qui n'ont aucune extrémité commune; les angles opposés sont ceux qui n'ont aucun côté commun. La droite qui joint les sommets de deux angles opposés se nomme *diagonale*. Un quadrilatère a 2 diagonales; chacune d'elles partage le quadrilatère en 2 triangles.

84. *La somme des angles d'un quadrilatère équivaut à 4 angles droits.* Cela résulte de ce que le quadrilatère peut être partagé en deux triangles.

85. On appelle *parallélogramme* un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles. Les angles opposés d'un parallélogramme sont égaux comme ayant leurs côtés parallèles et dirigés en sens contraire (**42**).

86. 1° *Les côtés opposés d'un parallélogramme sont égaux.* Car, soit ABCD (fig. 40) ce parallélogramme, et AC une de ses diagonales. Les angles BAC et DCA sont égaux comme alternes-internes,

ainsi que les angles BCA et DAC. Les deux triangles ABC et ADC sont donc égaux, comme ayant un côté commun AC, adjacent à deux angles égaux ; donc, AD = BC et AB = DC.

2° Réciproquement, *si l'on a* AD = BC *et* AB = DC, les triangles ABC, ADC sont égaux comme ayant leurs trois côtés égaux ; donc, l'angle BAC = DCA et les côtés AB et DC sont parallèles ; il en est de même des côtés AD et BC ; et *la figure* ABCD *est un parallélogramme.*

3° *Si* AD *est égal et parallèle à* BC, les triangles ABC, ADC sont encore égaux, comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux ; on en conclut encore que ABCD *est un parallélogramme.*

87. *Les diagonales* AC, BD (fig. 40) *d'un parallélogramme* ABCD, *se coupent mutuellement en* 2 *parties égales.* Car les triangles AOB et DOC sont égaux comme ayant un côté égal AB = DC, adjacent à deux angles égaux. Donc, AO = OC et DO = OB.

On démontre la réciproque par l'égalité des mêmes triangles.

88. On appelle *losange* un parallélogramme dont tous les côtés sont égaux. Ses diagonales sont perpendiculaires entre elles (**17**, **87**).

89. On appelle *rectangle* un parallélogramme qui a ses angles droits. Ses diagonales sont égales. Car soit ABCD (fig. 41) ce rectangle ; les triangles rectangles BAD et ABC sont égaux comme ayant les côtés de l'angle droit égaux ; donc, les hypothénuses sont égales, et l'on a AC = BD.

90. On appelle *carré* un rectangle qui a tous ses côtés égaux, ou un losange qui a ses angles droits.

Deux carrés sont égaux lorsqu'ils ont un côté égal.

91. On appelle *trapèze* un quadrilatère dont deux côtés seulement sont parallèles ; ces côtés prennent le nom de *bases.* Un trapèze est dit rectangle lorsqu'il a un angle droit.

92. *La droite* OI (fig. 42) *qui joint les milieux des côtés latéraux d'un trapèze* ABCD, *est parallèle aux bases* AB, DC, *et égale à leur demi-somme.* En effet, si par le point I on mène MN parallèle à AD, on aura, en prolongeant AB, deux triangles BIM, NIC égaux comme ayant un côté égal BI = IC, adjacent à deux angles égaux (**9**, **41**). Donc, MI = NI et BM = NC. Mais AMND étant un parallélogramme, on a AD = MN, d'où MI = AO ; donc, AMIO est aussi un parallélogramme, et OI est parallèle à AB. De plus, on a AB = AM − BM = OI − BM et DC = DN + NC = OI + BM; d'où il suit AB + DC = 2.OI et OI = $\frac{1}{2}$ (AB + DC).

93. Pour construire un quadrilatère quelconque, il faut connaître au moins 2 côtés et 3 angles. S'il s'agit d'un trapèze, il suffit de 2 côtés et de 2 angles non adjacents à un même côté latéral. S'il s'agit d'un parallélogramme, il suffit de 2 côtés adjacents et d'un angle. S'il s'agit d'un rectangle, il suffit de deux

côtés adjacents. S'il s'agit d'un losange, il suffit d'un côté et d'un angle. S'il s'agit d'un carré, il suffit d'un côté.

DES POLYGONES EN GÉNÉRAL.

94. On appelle en général *polygone* une portion de plan terminée par des lignes droites. Le triangle et le quadrilatère sont des polygones de 3 et 4 côtés. Ceux de 5, 6, 8, 10, 12, etc. côtés se nomment *pentagones, hexagones, octogones, décagones, dodécagones, etc.*

En menant d'un même sommet des diagonales à tous les sommets du polygone, qui ne sont pas consécutifs du premier, on le décompose en autant de triangles qu'il y a de côtés, moins les 2 côtés qui aboutissent au premier sommet.

Ceci démontre que *la somme des angles d'un polygone équivaut à autant de fois 2 angles droits qu'il y a de côtés, moins 2.*

Ainsi, la somme des angles est de 6 droits pour le pentagone, de 8 pour l'hexagone, de 12 pour l'octogone, de 16 pour le décagone, de 20 pour le dodécagone, etc.

95. *Si l'on prolonge dans le même sens les côtés d'un polygone quelconque* ABCDE (fig. 43), *la somme des angles extérieurs* aAB, bBC, eCD, dDE, etc., *ainsi formés, équivaut à 4 angles droits.* Car la somme totale des angles de la figure équivaut à autant de fois 2 angles droits qu'il y a de sommets, ou, ce qui revient au même, de côtés. Or, la somme des angles intérieurs équivaut à autant de fois 2 angles droits qu'il y a de côtés, moins 2. Il faut donc que la somme des angles extérieurs soit équivalente à 2 fois 2 angles droits, ou à 4 droits.

96. Deux polygones sont égaux, quand ils peuvent se décomposer en triangles égaux, et semblablement disposés.

97. Pour construire un polygone quelconque, il faut connaître ses côtés, à l'exception de deux côtés contigus, et tous ses angles, à l'exception de celui que forment les côtés inconnus.

Des polygones réguliers.

98. On nomme *régulier* tout polygone qui a ses côtés égaux et ses angles égaux. Le triangle équilatéral et le carré sont les polygones réguliers de 3 et 4 côtés.

99. *Tout polygone régulier peut être inscrit dans un cercle.* En effet, soit O (fig. 44) le centre du cercle dont la circonférence passe par les trois sommets consécutifs A, B, C du polygone régulier ABCDEF. Joignons OA, OB, OC, OD, etc., on aura OA = OB = OC : on a déjà AB = BC; donc, les triangles AOB, BOC sont égaux et isocèles; donc, l'angle ABO=OBC=BCO. Mais l'angle BCD = ABC; donc, puisque CBO est la moitié de ABC, son égal BCO est la moitié de BCD. Les deux triangles BOC, COD ont donc un angle égal compris entre côtés égaux; ils

sont donc égaux : donc, OD = OC, et la circonférence qui passe par les points A, B, C, passera par le point D. On démontrerait de même qu'elle passe par les sommets suivants.

Le centre O du cercle circonscrit se nomme le centre du polygone régulier. Et l'angle AOB s'appelle l'*angle au centre*.

100. *Tout polygone régulier* ABCDEF (fig. 44) *peut être circonscrit à un cercle.* Car les côtés du polygone étant, par rapport au cercle circonscrit, des cordes égales, également éloignées du centre, les perpendiculaires, abaissées du centre sur ces cordes, sont toutes égales. Ainsi, le cercle décrit du centre O avec un rayon égal à l'une de ces perpendiculaires sera tangent à tous les côtés du polygone.

Le rayon du cercle inscrit se nomme l'*apothème* du polygone.

101. *Si l'on divise une circonférence de cercle en parties égales, et que l'on joigne les points de division par des cordes consécutives* AB, BC, CD, etc. (fig. 45) *le polygone ainsi formé sera régulier;* car les cordes AB, BC, CD, etc., seront égales, et les angles ABC, BCD, etc., inscrits dans des segments égaux, seront eux-mêmes égaux.

102. *Si, par les points de division* A, B, C, D, etc., *on mène des tangentes* LM, MN, NP, etc., *le polygone ainsi formé sera régulier;* car les angles BAM, ABM, CBN, BCN, etc., seront tous égaux comme ayant même mesure (50); les triangles AMB, BNC, CPQ, etc., seront donc tous isocèles, et égaux, puisqu'on a AB = BC = CD, etc. Ainsi les angles M, N, P, etc., seront tous égaux; et il en sera de même des côtés MN, NP, etc., puisqu'ils seront le double des longueurs égales AM, MB, BN, etc. Ce polygone régulier aura le même nombre de côtés que le polygone, ABCD, etc.

103. *Étant donnés un polygone régulier inscrit, et un polygone régulier circonscrit* (fig. 45) *d'un même nombre de côtés, inscrire et circonscrire les polygones réguliers d'un nombre de côtés double.*

Par le milieu de chaque arc AB, BC, etc., menons des droites aux extrémités de cet arc, nous formerons le polygone inscrit demandé; par le milieu de chaque arc menons une tangente, nous formerons le polygone circonscrit demandé.

La circonférence est plus petite que le contour ou *périmètre* de tout polygone circonscrit, et plus grande que le périmètre de tout polygone inscrit.

DE LA SIMILITUDE.

104. Deux polygones sont dits *semblables* quand leurs angles sont égaux et que leurs côtés *homologues*, c'est-à-dire semblablement situés, sont proportionnels. Deux polygones, qui peuvent se décomposer en un même nombre de triangles semblables et semblablement disposés, sont semblables. Car leurs angles, composés d'angles égaux, sont égaux; et la proportionalité des côtés des triangles conduit à celle des côtés des polygones.

Deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés, sont des figures semblables.

105. *Si deux droites* AE, BF (fig. 46) *sont coupées par trois parallèles*, AB, CD, EF, *de manière qu'on ait* AC=CE, *on aura aussi* BD=DF. Car si l'on mène Bm et Dn parallèles à AE, les figures BmC et CDnE, seront des parallélogrammes, et l'on aura (86) AC=Bm et CE=D, d'où Bm=Dn; les deux triangles BDm, DFn seront donc égaux, comme ayant un côté égal, adjacent à deux angles égaux (41); ils seront donc égaux, et l'on aura BD=DF.

106. Il est évident que si CE était plus petit que AC, DF serait aussi plus petit que BD; car si on menait une parallèle à EF par un point de CE compris entre C et E, elle couperait DF entre D et F.

107. *Toute parallèle* CD (fig. 47) *à la base d'un triangle* OAB, *divise les côtés* OA, OB, *en parties proportionnelles*. En effet, 1° si OC et CA ont une commune mesure, partageons-les en parties égales à cette commune mesure, et par les points de division menons des parallèles à AB, les lignes OD et DB se trouveront partagées en un même nombre de parties égales que les lignes OC et CA (105); ainsi, on aura la proportion :

OC : CA :: OD : DB.

2° Si les lignes OC et CA n'ont pas de commune mesure, partageons OC en 100 parties égales, AC contiendra un certain nombre de ces parties, 43 par exemple, plus un reste moindre que l'une d'elles. Si, par les points de division on mène des parallèles à AB, OD se trouvera partagé en 100 parties égales, et DB contiendra 43 de ces parties, plus un reste moindre que l'une d'elles (106). Or, ces restes peuvent être rendus aussi petits que l'on voudra, en multipliant suffisamment le nombre des divisions de OC; donc, on a rigoureusement :

OC : CA :: OD : DB.

108. On tire de la proportion précédente

OC+CA : OC :: OD+DB : OD, ou bien OA : OC :: OB : OD.

Mais si l'on mène Dm parallèle à OA, on aura de même AB : mB :: OB : OD, d'où AB : AB — mB :: OB : OB — DB ou AB : Am :: OB : OD, ou enfin AB : CD :: OB : OD. Les deux triangles OCD, OAB, ont donc leurs côtés proportionnels; ils sont d'ailleurs équiangles à cause des parallèles CD, AB (41); ils sont donc semblables. Ainsi, *toute parallèle à la base d'un triangle détermine un second triangle semblable au premier.*

109. *Deux triangles équiangles* OAB, oab (fig. 47) *sont semblables.* Car si l'on porte l'angle *aob*, sur l'angle AOB, de manière que *ab* prenne la position CD; les angles *oab*, OAB étant égaux, il en sera de même des angles OCD, OAB, et CD sera parallèle à AB (n° 41 à la fin). Donc, les triangles OCD, OAB sont semblables (108); il en est donc de même des triangles *oab*, OAB.

110 *Deux triangles* oab, OAB (fig. 47) *qui ont un angle égal* aob=AOB *compris entre côtés proportionnels, sont semblables*. En effet, en répétant la superposition du n° précédent, si CD n'était pas parallèle à AB, on pourrait par le point C mener une parallèle à AB qui rencontrerait OB en un certain point K, et l'on aurait OA : OB : : OC : OK ; mais on a déjà OA : OB : : OC : OD ; donc, OK=OD ce qui serait absurde. Donc, CD est parallèle à AB. Donc, etc. (**108**).

111. *Deux triangles* oab, OAB (fig. 47) *qui ont leurs côtés proportionnels, sont équiangles, et par conséquent semblables*. Car, si l'on prend OC=*oa* et que l'on mène CD parallèle à AB, le triangle OCD aura ses côtés proportionnels à ceux du triangle OAB (**108**), et par conséquent à ceux du triangle *oab* ; mais OC=*oa* ; les triangles OCD, *oab* sont donc égaux ; et puisque OCD est équiangle avec OAB (**110**), il en est de même de *oab*.

112. De ce que deux triangles équiangles sont semblables, il suit que *deux triangles qui ont leurs côtés respectivement parallèles* (**42**) *ou perpendiculaires* (**43**) *sont semblables*.

113. *Les périmètres de deux polygones semblables sont proportionnels à leurs côtés homologues*. Car, si leurs côtés sont M,N,P,Q, etc., *m,n,p,q*, etc., on aura : M : N : P : Q : etc. : : *m* : *n* : *p* : *q* : etc., d'où

$$M+N+P+Q+\text{etc.} : M :: m+n+p+q+\text{etc.} : m.$$

114. La proportionnalité de deux figures s'étend à toutes les lignes homologues. Ainsi, les côtés de deux triangles semblables sont proportionnels aux perpendiculaires abaissées des sommets sur les côtés opposés. Les périmètres de deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont proportionnels à leurs rayons, à leurs apothèmes, etc.

115. *Les circonférences de deux cercles sont entre elles comme leurs rayons*. Car ces circonférences peuvent être considérées comme les périmètres de deux polygones réguliers semblables, d'un nombre infini de côtés.

Conséquences de la similitude.

116. *Dans un triangle quelconque* ABC (fig. 48) *la bissectrice* BD *de l'un des angles, divise le côté opposé* AC *en parties proportionnelles aux deux autres côtés*. Car, si par le point A on mène une parallèle à BD jusqu'à la rencontre du prolongement de CB en E, on aura l'angle AEB=DBC comme correspondants, et l'angle EAB=ABD comme alternes-internes ; donc, AEB=EAB ; donc, AB=BE. Mais on a (**107**) CD : DA : : CB : BE ; donc, CD : DA : : CB : AB.

117. *Si du sommet de l'angle droit* A *d'un triangle rectangle* BAC (fig. 49) *on abaisse une perpendiculaire* AD *sur l'hypothénuse, on partage le triangle en deux autres triangles semblables au premier*. Car les triangles BAC, BDA rectangles tous deux, et ayant l'angle aigu B

5

commun, sont équiangles, et par conséquent semblables (**109**). Il en est de même des triangles BAC, ADC.

Il suit de là que les triangles BAD, ACD sont semblables entre eux. La proportionnalité des côtés de ces trois triangles semblables conduit aux conséquences suivantes :

1° *Chaque côté est moyen proportionnel entre l'hypothénuse entière et la partie de l'hypothénuse adjacente à ce côté.*

2° *La perpendiculaire est moyenne proportionnelle entre les parties de l'hypothénuse.*

3° D'après 1° On a $\overline{AB}^2 = BD \times BC$, $\overline{AC}^2 = DC \times AC$, d'où $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = (BD + DC) \times BC = BC \times BC = \overline{BC}^2$. C'est-à-dire que le *carré (numérique) de l'hypothénuse équivaut à la somme des carrés des deux autres côtés.*

4° Il suit des deux égalités posées ci-dessus, que l'on a :

$\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 :: BD \times BC : DC \times BC$, ou, en divisant les deux termes du second rapport par BC,

$$\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 :: BD : DC.$$

C'est-à-dire que *les carrés numériques des côtés de l'angle droit sont entre eux comme les deux parties de l'hypothénuse.*

118. *Deux cordes* AB, CD (fig. 50) *qui se coupent, se divisent en parties réciproquement proportionnelles.* Car, si l'on joint CB et AD, les triangles AID, BIC, auront l'angle AID = BIC, comme opposés par le sommet, l'angle ADI = CBI comme ayant pour mesure commune la moitié de l'arc AC ; donc, ils sont semblables, et l'on a AI : ID :: BI : IC.

119. *Si par un point* M (fig. 51) *extérieur à un cercle, on mène une tangente* MA, *et une secante* MBC, *la tangente sera moyenne proportionnelle entre la sécante entière et sa partie extérieure.* Car, si l'on joint AB et AC, les triangles MBA et MAC qui ont l'angle AMC commun, auront de plus l'angle MAB = MCA, comme ayant pour mesure commune la moitié de l'arc AB. Donc, ces triangles sont semblables (**109**) et l'on a MC : MA :: MA : MB.

120. Si par le point M on mène une seconde sécante MDE, on aura : $\overline{AM}^2 = MB \times MC$, et $\overline{AM}^2 = MD \times ME$ d'où $MB \times MC = MD \times ME$, et par suite, MB : MD :: ME : MC. Ainsi, *deux sécantes issues d'un même point sont réciproquement proportionnelles à leurs parties extérieures.*

Problèmes dépendant de la similitude.

121. *Partager une droite donnée* ab (fig. 52) *en parties proportionnelles à des longueurs données* m, n, p. Menons une parallèle à *ab*

sur laquelle nous prendrons AC = *m*, CD = *n*, DB = *p*. Joignons A*a* et B*b* qui se rencontreront en O; tirons OC, OD, qui couperont *ab* en *c* et en *d*. Nous aurons *ac* : AC : : O*c*:OC : : *cd* : CD : :O*d*: OD: : *db* : DB, d'où il suit *ac* : AC : : *cd* : CD : : *db* : DB, ou *ac* : *cd* : *db* : : *m* : *n* : *p*.

On se servira du même moyen pour *partager une droite donnée en un certain nombre de parties égales*.

122. *Trouver une quatrième proportionnelle à 3 longueurs données* m, n, p. Traçons deux droites OA, OB (fig. 47) sous un angle quelconque ; prenons OC = *m*, CA = *n*, OD = *p* ; joignons CD et menons AB parallèle à CD ; on aura OC : CA : : OD : DB, ou *m* : *n* : : *p* : DB qui sera la longueur cherchée.

123. *Trouver une moyenne proportionnelle entre deux longueurs données* m, n. Sur une droite quelconque prenons AB = *m* et BC = *n*. Sur AC comme diamètre, décrivons une demi-circonférence. Par le point B élevons une perpendiculaire à AC qui rencontrera la circonférence en D : la longueur AD sera la moyenne proportionnelle demandée. Car, si l'on joint AD, DC, le triangle ADC sera rectangle en D (**51**). Donc, etc. (**117**).

124. *Partager une droite donnée* AB (fig. 54) *en moyenne et extrême raison;* c'est-à-dire trouver un point C tel qu'on ait AB : AC : :AC : CB.

Au point B élevons la perpendiculaire BO égale à la moitié de AB; tirons AO. Du point O comme centre, avec le rayon OB, décrivons une circonférence qui coupera AO aux points D et E. Prenons AC = AD. Nous aurons AE : AB : : AB : AD (**119**), d'où AE — AB : AB : : AB — AD : AD. Or, si on observe que DE=AB et que AC = AD, cette proportion devient AC : AB : : BC : AC et l'on peut l'écrire AB : AC : : AC : BC.

125. *Construire un polygone semblable à un polygone donné, sur une droite donnée comme homologue d'un côté déterminé du premier polygone.* Si les côtés du polygone donné sont *m*, *n*, *p*, *q*, etc.; et que la droite donnée doive être l'homologue de *m*, appelons M, N, P, Q, etc., les côtés du polygone cherché, on les déterminera par les proportions successives *m* : M : : *n* : N, *m* : M : : *p* : P, etc. (**122**). Les angles étant connus, on pourra construire successivement chaque angle et chaque côté, et par conséquent le polygone entier.

PROBLÈMES SUR LES POLYGONES RÉGULIERS.

126. *Inscrire un carré dans un cercle*. Menons deux diamètres perpendiculaires et joignons leurs extrémités deux à deux. Du carré on déduit l'octogone (**103**).

127. *Inscrire à un cercle un hexagone régulier et un triangle équilatéral*. Le côté de l'hexagone régulier est le rayon même du cercle; car, le triangle formé par ce côté et les deux rayons qui aboutissent

5*

à ses extrémités est équilatéral et par conséquent équiangle (67); l'angle au centre vaut donc le tiers de deux angles droits, et le sixième de quatre angles droits; l'arc qui le mesure est donc le sixième de la circonférence.

En joignant le premier, le troisième, et le cinquième sommets par des cordes, on obtient le triangle équilatéral inscrit.

De l'hexagone on déduit le dodécagone (163).

128. *Inscrire à un cercle un décagone et un pentagone réguliers.* Soient AB (fig. 55) le côté du décagone régulier, et O son centre: l'angle AOB est le dixième de quatre angles droits, ou le cinquième de deux angles droits: désignons l'angle droit par q, l'angle OAB = OBA $= \frac{1}{2}(2q - \frac{2}{5}q) = \frac{4}{5}q$. Si donc on tire la bissectrice AI, on aura IAB $= \frac{2}{5}q$ AOB. Les deux triangles IAB, AOB sont donc semblables, et l'on a OB : AB : : AB : BI. Mais l'angle IAO $= \frac{2}{5}q$, donc, le triangle AIO est isocèle, et l'on a AI = AB = OI; la porportion ci-dessus devient donc OB : AI : : AI : BI. *Pour obtenir le côté du décagone régulier, il faut donc partager le rayon en moyenne et extrême raison* (**124**) *et prendre la plus grande des deux parties.*

En joignant les sommets de rang impair du décagone régulier, on obtiendra le pentagone régulier.

129. *Le côté du pentédécagone régulier* (ou polygone régulier de 15 côtés) *sous-tend la différence entre l'arc que sous-tend le côté de l'hexagone régulier et celui que sous-tend le côté de l'hexagone régulier.* Car $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$.

Rapport de la circonférence au diamètre.

130. Pour obtenir la rapport de la circonférence au diamètre, on part des carrés inscrits et circonscrits, on en déduit successivement les polygones réguliers inscrits et circonscrits de 8, 16, 32, 64, 128, etc., côtés. On double le nombre des côtés jusqu'à ce que les périmètres des polygones inscrits et circonscrits ne diffèrent plus que dans les unités décimales du 8e ordre par exemple. La circonférence étant comprise entre ces deux périmètres, l'un d'eux peut être pris pour cette circonférence même (**104**). On a trouvé ainsi que la circonférence dont le diamètre est pris pour unité, peut être exprimée par 3,1415926.... On désigne ordinairement ce rapport par la lettre π. Pour abréger, on fait quelquefois $\pi = \frac{22}{7}$, car $\frac{22}{7} = 3,142....$; ce rapport approché porte le nom d'*Archimède;* on fait aussi $\pi = \frac{355}{113} = 3,1415929....$; ce rapport beaucoup plus approché porte le nom d'*Adrien Métius.*

Quand on connaît le diamètre d'un cercle, il suffit de le multiplier par π pour avoir sa circonférence; quand on connaît la circonférence, il suffit de la diviser par π pour avoir le diamètre.

DE LA MESURE DES AIRES.

131. *Deux rectangles* ABEF, BCDE (fig. 56) *qui ont même hauteur*

BE, *sont entre eux comme leurs bases* AB, BC. En effet, 1° si les bases AB, BC ont une commune mesure, partageons-les en parties égales à cette commune mesure, et par les points de division élevons des perpendiculaires à AC, nous partagerons chaque rectangle en autant de petits rectangles égaux que leurs bases contiennent de parties égales, on aura donc : ABEF . BCDE :: AB : BC. 2° Si les bases n'ont pas de commune mesure, partageons AB en 100 parties égales, BC contiendra, je suppose, 59 de ces parties, plus un reste moindre que l'une d'elles; si par les points de division, on élève des perpendiculaires à AC, le rectangle ABEF sera partagé en 100 petits rectangles égaux, et le rectangle BCDE contiendra 59 de ces rectangles, plus un reste moindre que l'un d'eux. Or, ces restes peuvent être rendus aussi petits que l'on voudra en multipliant suffisamment les divisions de AB; donc, on a rigoureusement : ABEF : BCDE :: AB : BC.

Il est évident, d'après cela, que deux rectangles de même base sont entre eux comme leurs hauteurs.

132. *Deux rectangles* quelconques ABCD, AEFG (fig. 75) *sont proportionnels au produit de leur base par leur hauteur.* Car si on les place comme dans la figure, on aura : ABCD : ABIG :: AD : AG, et ABIG : AEFG :: AB : AE, d'où il suit en multipliant par ordre ABCD : AEFG :: AB × AD : AE × AG.

Les raisonnements seraient les mêmes, si EF était en E'F'.

133. Si l'on prend pour unité d'aire celle du carré qui a pour côté l'unité de longueur, la comparaison de ce carré avec un rectangle quelconque ABCD (fig. 57) donnera ABCD : 1 :: AB×AD : 1×1, d'où ABCD = AB × AD. C'est pourquoi l'on dit que *l'aire d'un rectangle a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

Il suit de là que l'aire d'un carré a pour mesure le carré numérique de son côté.

134. *Tout parallélogramme* ABCD (fig. 58) *a pour mesure le produit de sa base* AB *par sa hauteur*, c'est-à-dire par la perpendiculaire B*b* commune aux deux côtés AB et DC. Car si l'on achève le rectangle AB*ba*, les deux triangles CB*b*, DA*a* étant égaux (**41**, **86**) on aura : AB*b*D + DA*a* = AB*b*D + CB*b*, ou AB*ba* = ABCD.

135. *Tout triangle* ACB (fig. 59) *a pour mesure la moitié du produit de sa base* AB *par sa hauteur*, c'est-à-dire par la perpendiculaire CD abaissée de son sommet sur sa base. Car, si l'on achève le parallélogramme ABEC, on voit que ACB est la moitié de ce parallélogramme, qui a pour base AB, et pour hauteur CD.

Deux triangles qui ont même hauteur sont entre eux comme leurs bases.

136. *Tout trapèze* ABDC (fig. 60) *a pour mesure le produit de sa hauteur* DH, *par la demi-somme de ses bases*, ou par la droite *mn* qui joint les milieux des côtés latéraux (**92**). Car, si l'on joint AD, on aura ABD $= \frac{1}{2}$ AB × DH et ACD $= \frac{1}{2}$ CD × DH, donc, ABDC $= \frac{1}{2}$ (AB + CD) × DH $=$ *mn* × DH.

137. *Tout polygone régulier* ABCDEF (fig. 44) *a pour mesure le produit de son périmètre par la moitié de son apothême* OP. Car chaque triangle a pour mesure $AB \times \frac{1}{2}$ OP ou $BC \times \frac{1}{2}$ OQ, etc. ; et comme $OP = OQ =$ etc., la somme de ces triangles a pour mesure $(AB + BC + CD + \text{etc.}) \times \frac{1}{2} OP$.

138. Le cercle étant un polygone régulier d'un nombre infini de côtés, et dont l'apothème se confond avec le rayon ; *l'aire du cercle a pour mesure le produit de la circonférence par la moitié du rayon.* Mais la circonférence dont le rayon est R, équivaut à $2R \times \pi$; *l'aire du cercle* est donc $2R \times \pi \times \frac{1}{2}R$, ou πR^2 ; c'est-à-dire qu'elle *a pour mesure le produit du carré du rayon par le rapport de la circonférence au diamètre.* Par une raison analogue *l'aire d'un secteur a pour mesure le produit de sa base par la moitié du rayon.*

Comparaison des aires.

139. *Deux triangles* OAB, OCD (fig. 61), *qui ont un angle égal, sont entre eux comme les produits des côtés qui comprennent l'angle égal.* Car, si on place ces triangles comme dans la figure, et qu'on joigne AD, les triangles OAB, OAD ayant nécessairement même hauteur puisqu'ils ont le sommet A commun, sont entre eux comme leurs bases (**133**) et l'on a OAB : OAD :: OB : OD ; on aura de même OAD : OCD :: OA : OC ; et en multipliant par ordre il vient OAB : OCD :: OB × OA : OC × OD.

140. *Deux triangles semblables* oab, OAB (fig. 47) *sont entre eux comme les carrés des côtés homologues.* Car puisqu'ils ont l'angle $aob = AOB$, on a (**139**) triangle *aob* : triangle AOB :: $oa \times ob$: $OA \times OB$. Mais on a *ob* : OB : : *oa* : OA ; en multipliant par ordre, et supprimant les facteurs communs, il reste *aob* : AOB :: $\overline{oa}^2 : \overline{OA}^2$ et par conséquent :: $\overline{ob}^2 : \overline{OB}^2 :: \overline{ab}^2 : \overline{AB}^2$.

141. *Deux polygones semblables sont entre eux comme les carrés des côtés homologues ;* car ils peuvent se décomposer en un même nombre de triangles semblables, semblablement disposés, qui sont entre eux comme les carrés de leurs côtés homologues ; et, d'après les propriétés des rapports égaux, on en déduit le théorème énoncé.

142. *Deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont entre eux comme les carrés de leurs côtés, de leurs rayons, de leurs apothèmes, etc.* (**141**).

143. *Deux cercles sont entre eux comme les carrés de leurs rayons, ou de leurs diamètres.* Cela résulte du n° précédent. Cela peut aussi se déduire du n° **138** ; car si deux cercles ont pour rayons R et r, leurs aires sont entre elles :: $\pi R^2 : \pi r^2$ ou :: $R^2 : r^2$.

144. *Deux secteurs sont entre eux comme leurs bases* (**23**), quand ils appartiennent à un même cercle ou à des cercles égaux. Car chacun d'eux a pour mesure le produit de sa base par la moitié du rayon (**138**).

145. *Le carré* BPQC (fig. 62) *construit sur l'hypothénuse d'un triangle rectangle* BAC *équivaut à la somme des carrés* BA*mn*, ACNM, *construits sur les autres côtés.* En effet, abaissons ADS perpendiculaire sur BC, et joignons *m*C et AP : les triangles *m*BC, ABP sont égaux comme ayant l'angle obtus égal compris entre côtés égaux ; mais *m*BC qui a pour base *m*B et pour hauteur *mn*, est la moitié du carré BA*mn* ; par une raison semblable ABP est la moitié du rectangle BPSD ; donc, BA*nm* équivaut à BPSD. On démontrerait de même que ACNM équivaut à SQCD. Donc, BA*nm* + ACNM équivaut à BPSD + SQCD, ou à BPQC.

Problèmes sur les aires.

146. *Transformer un polygone quelconque en un polygone équivalent qui ait un côté de moins.* Soit ABCDE (fig. 63) le polygone donné, tirons AD, prolongeons AB, et menons EA' parallèle à AD ; le triangle A'AD sera équivalent au triangle EAD, comme ayant même base et même hauteur. Donc, le polygone A'BCD équivaut au polygone donné, et a un côté de moins.

147. *Construire un carré équivalent à un rectangle, à un parallélogramme, à un triangle, ou à un trapèze donné.* L'aire proposée a pour mesure le produit de deux lignes ; cherchons une moyenne proportionnelle (**123**) entre ces deux lignes ; ce sera le côté du carré cherché.

148. *Construire un carré équivalent à la somme de deux carrés donnés.* Traçons à angle droit deux droites AB, AC (fig. 62) égales en longueur aux côtés des carrés donnés ; joignons BC, qui sera le côté du carré cherché (**145**).

149. *Construire un carré équivalent à la différence de deux carrés donnés.* Traçons un angle droit BAC (fig. 62) et prenons AB égal au côté du plus petit des carrés donnés ; du point B comme centre, avec un rayon égal au côté du plus grand carré donné, décrivons un arc de cercle qui coupera AC en C ; la longueur AC, sera le côté du carré cherché (**145**).

150. *Deux polygones semblables étant donnés, construire un polygone semblable, équivalent à leur somme ou à leur différence.* Les polygones semblables étant entre eux comme les carrés des côtés homologues, il suffit de trouver le côté du carré équivalent à la somme ou à la différence des carrés des côtés homologues, dans les polygones donnés.

151. *Construire un rectangle équivalent à un carré donné, et dont les côtés consécutifs aient pour somme une longueur donnée.* Prenons une droite AB (fig. 64) égale à la longueur donnée ; sur AB comme diamètre décrivons une demi-circonférence ; élevons sur AB la perpendiculaire AC égale au côté du carré donné ; menons CD parallèle à AB et qui coupera la circonférence au point D ; abaissons la perpendiculaire DI ; les longueurs AI, BI auront

pour somme AB, et leur produit sera équivalent à $\overline{DI}^2$ ou $\overline{AC}^2$, ou au carré donné (123, 133).

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

132. *Toute droite qui a deux points communs avec un plan est toute entière dans ce plan.* Cela résulte de la définition même du plan (2). Il suit de là *que, par une droite donnée on peut toujours mener un plan, et qu'on peut en mener une infinité.*

133. *Deux droites qui se coupent déterminent un plan.* Car, si l'on mène un plan par l'une d'elles, et qu'on le fasse tourner jusqu'à ce que l'autre y soit comprise, la position de ce plan sera tout-à-fait déterminée. Il suit de là que *trois points, non en ligne droite, déterminent un plan.*

134. *Deux droites parallèles déterminent un plan;* cela résulte de la définition des parallèles (34), et de ce que trois points déterminent un plan.

135. *L'intersection de deux plans est une ligne droite.* Car si ces plans avaient trois points communs, non en ligne droite, ces trois points détermineraient un plan qui devrait coïncider avec chacun des deux premiers (133).

DES DROITES ET DES PLANS PERPENDICULAIRES.

136. Lorsqu'une droite rencontre un plan, le point de rencontre se nomme le *pied* de la droite. *Une droite est dite perpendiculaire à un plan, lorsqu'elle est perpendiculaire à toutes les droites menées par son pied dans ce plan.* Réciproquement, le plan est dit perpendiculaire à la droite.

137. *Si une droite* AO (fig. 65) *est perpendiculaire à deux autres droites* OB, OC *menées par son pied dans un plan, elle est perpendiculaire à ce plan.* Il suffit de prouver que AO est perpendiculaire à toute autre droite OD menée par son pied dans ce plan (131). Pour cela, prolongeons AO d'une quantité égale A'O. Prenons deux points quelconques B et C sur les droites OB et OC; joignons BA, BA', CA, CA', et BC qui coupera OD en un point D; tirons enfin DA et DA'. Nous aurons BA = BA' et CA = CA' (17); les deux triangles BAC, BA'C superposés coïncideraient donc. Il suit de là que AD = A'D, et que OD est perpendiculaire à AA'.

138. *Toutes les perpendiculaires menées à une même droite par un de ses points sont dans un même plan.* Car, soit MN (fig. 66) le plan de deux des perpendiculaires élevées à la droite AO par le point O; si une troisième perpendiculaire OD' n'était pas comprise dans le plan MN, on pourrait, par les droites OA, OD', mener un plan qui rencontrerait MN suivant une droite OD, nécessairement

perpendiculaire à AO (151). On aurait donc dans un même plan deux perpendiculaires OD, OD' à une même droite, ce qui est impossible (14).

159. *Par un point donné on ne peut mener qu'un plan perpendiculaire à une droite donnée.* Car, s'il existait deux plans perpendiculaires à la droite donnée et passant par le point donné, en menant un plan par ce point et cette droite, il couperait les deux premiers suivant deux droites perpendiculaires à la droite donnée (151), et passant toutes deux par le point donné, ce qui est impossible (15).

160. *Par un point pris sur un plan, on ne peut lui élever qu'une seule perpendiculaire.* Car, s'il en existait deux, le plan passant par ces deux perpendiculaires couperait le premier suivant une droite qui devrait être à la fois perpendiculaire à toutes deux (151, 14).

161. *Par un point extérieur à un plan, on ne peut abaisser sur ce plan qu'une seule perpendiculaire.* Car, s'il en existait deux, elles devraient être toutes deux perpendiculaires à la droite qui joint leurs pieds (151, 15).

162. *Deux droites* AB, CD (fig. 67), *perpendiculaires à un même plan* MN, *sont dans un même plan, et par conséquent parallèles.* Car, si l'on joint leurs pieds par la droite BD, que par un point I de cette droite, on lui mène dans le plan MN la perpendiculaire EF, telle qu'on ait IE = IF, et qu'on joigne BE, BF, AE, AF, on aura BE = BF (17) et par suite AE = AF; donc, AI est perpendiculaire à EF; donc, EF est perpendiculaire au plan des droites BA et BD (157). On démontrerait de même que EF est perpendiculaire au plan des droites DC et BD; donc, d'après le nº 159, ces deux plans se confondent.

163. *Si par un point* A (fig. 68), *extérieur au plan* MN, *on mène la perpendiculaire* AO, *et différentes obliques* AB, AB', AC, 1º *la perpendiculaire sera plus courte que toute oblique;* 2º *deux obliques* AB, AB' *qui s'écarteront également de la perpendiculaire seront égales;* 3º *de deux obliques* AB, AC, *celle qui s'écartera le plus de la perpendiculaire, sera la plus longue.* En effet, 1º dans les triangles rectangles AOB, AOC, on a évidemment AO < AB et AO < AC. 2º Si OB = OB', les triangles rectangles AOB, AOB' sont égaux, et l'on a AB = AB'. 3º Prenons OB' = OB et tirons AB', nous aurons AB' = AB. Or, dans le plan AOC, AO étant perpendiculaire à OC, on a évidemment AB' < AC (16).

164. Il suit de là que *tout point de la perpendiculaire élevée à un cercle par son centre, est également distant de la circonférence.*

165. Si l'on trace une droite sur un plan, et que par les différents points de cette droite, on élève des perpendiculaires à ce plan, ces perpendiculaires sont toutes dans un même plan (162), et ce plan est dit *perpendiculaire* au premier. Réciproquement, le premier plan est perpendiculaire au second.

166. *Lorsqu'une droite* A *est perpendiculaire à un plan* M, *tout autre plan* P *mené par la droite* A *est perpendiculaire au premier plan* M. Car toutes les perpendiculaires élevées au plan M par les différents points de l'intersection commune des plans P et M, sont dans un même plan, qui contient cette intersection et la droite A, et se confond par conséquent avec le plan P (**162**).

167. *Tout plan* C, *perpendiculaire à deux autres plans* A *et* B *qui se coupent, est perpendiculaire à leur intersection.* Car, si par le point où cette intersection rencontre le plan C on élève une perpendiculaire à ce plan, elle devra se trouver à la fois dans les deux plans A et B (**165**), et se confond par conséquent avec leur intersection.

168. Il résulte de là que : *si trois plans sont perpendiculaires entre eux, leurs intersections sont aussi perpendiculaires entre elles.*

DES DROITES ET DES PLANS PARALLÈLES.

169. *Deux plans perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre eux.* Cela résulte du nº **159**.

170. *Si deux plans* MN, PQ (fig. 69) *sont parallèles, toute droite* IH, *perpendiculaire au plan* MN, *est aussi perpendiculaire au plan* PQ. Car, si par la droite IH on mène un plan quelconque qui coupe les plans MN, PQ, suivant les droites AB, CD, ces plans étant parallèles, les droites AB, CD, ne pourront se rencontrer; et comme elles sont situées dans un même plan, elles sont parallèles. Or, puisque l'angle BIH est droit, l'angle IHD l'est aussi. Donc, IH est perpendiculaire à toute droite passant par son pied dans le plan PQ; donc, elle est perpendiculaire à ce plan.

Il suit de là que, *si deux plans sont parallèles, tout plan perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre* (**166**).

171. *Par un point donné* O, *hors d'un plan* P, *on ne peut mener qu'un seul plan* Q *parallèle au plan* P; car si on pouvait mener un second plan R parallèle au plan P, la perpendiculaire abaissée du point O sur le plan P devrait être en même temps perpendiculaire aux deux plans Q et R (**170**) qui passent par ce point; ce qui est impossible (**159**).

172. *Quand deux plans parallèles sont coupés par un troisième, les intersections sont parallèles.* Car si ces intersections, situées d'ailleurs dans un même plan, avaient un point commun, ce point appartiendrait aux deux plans parallèles.

173. *Une droite est parallèle à un plan quand elle est parallèle à une autre droite menée dans ce plan.* Car (**149**) il faudrait qu'elle rencontrât sa parallèle pour rencontrer le plan.

174. Par le même raisonnement on prouverait que : *lorsqu'une droite est parallèle à un plan, tout plan passant par cette droite coupe le premier suivant une droite parallèle à la première.*

175. A l'aide des théorèmes établis aux nos **172, 173, 174**, il est facile de voir que : 1° *lorsque deux droites sont parallèles, tout plan parallèle à l'une est parallèle à l'autre;* 2° *lorsque deux plans sont parallèles, toute droite parallèle à l'un est parallèle à l'autre.*

176. *Deux plans parallèles à un troisième sont parallèles entre eux.* Car toute perpendiculaire à ce troisième plan est perpendiculaire aux deux premiers (**169, 170**).

177. *Si deux droites sont parallèles, tout plan perpendiculaire à la première est perpendiculaire à la seconde.* Car si, par le point où cette seconde droite rencontre ce plan, on élevait une perpendiculaire à ce plan, elle serait parallèle à la première droite (**156**); il y aurait donc, par un même point, deux parallèles menées à une même droite, ce qui est impossible (**149, 36**).

178. *Deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles.* Car, si on mène un plan perpendiculaire à la troisième, il sera (**177**) perpendiculaire aux deux premières. (**162**).

179. *Si une droite* OA (fig. 70) *est parallèle à un plan* MN *tout, plan* NP *perpendiculaire à cette droite, sera perpendiculaire au plan* MN. Car, si par la droite OA on mène un plan quelconque OAD, il rencontrera le plan MN suivant une droite CD parallèle à OA (**174**). Le plan NP, perpendiculaire à OA, sera donc perpendiculaire à CD (**177**). Le plan MN, qui passe par la droite CD perpendiculaire au plan NP, sera donc lui-même perpendiculaire à ce plan (**166**); et réciproquement NP est perpendiculaire à MN (**165**).

180. *Toute droite parallèle à deux plans, est parallèle à leur intersection.* Car, si on mène un plan perpendiculaire à cette droite, il sera perpendiculaire aux deux plans parallèles à cette droite (**179**), et par suite à leur intersection (**167**). Cette intersection et la droite sont donc parallèles (**162**).

181. *Lorsque deux droites qui se coupent sont parallèles à un même plan, ce plan est parallèle au plan des deux droites.* Car, si les deux plans se rencontraient, leur intersection devrait être parallèle à chacune de ces deux droites (**174**) ; ce qui est impossible.

182. *Si deux angles* bac, BAC (fig. 71), *non situés dans le même plan, ont leurs côtés parallèles et dirigés dans le même sens, ils sont égaux.* Car, si l'on prend AC=*ac*, AB=*ab*, et que l'on tire BC et *bc*, la figure A*ac*C sera un parallélogramme (**86**, 3°) ; il en sera de même de A*ab*B. Donc C*c*=A*a* et B*b*=A*a*; donc, B*b*=C*c*. Mais B*b* et C*c* étant tous deux parallèles à A*a* sont parallèles entre eux (**178**); B*bc*C est donc un parallélogramme, et l'on a BC=*bc*. Les triangles ABC, *abc* ont donc leurs trois côtés égaux chacun à chacun ; ils sont donc égaux, et l'on a angle BAC angle *bac*.

183. *Deux parallèles* AB, CD (fig. 72) *comprises entre deux plans parallèles* MN, PQ, *sont égales.* Car le plan des deux droites AB, CD coupera les plans MN, PQ suivant les droites parallèles (**172**)

AC, BD. La figure ABDC est donc un parallélogramme, et l'on a AB=CD.

184. Il suit de là que *deux plans parallèles sont partout également distants* (**162**).

185. *Deux droites quelconques* AB, CD (fig. 73) *sont coupées par trois parallèles*, MN, PQ, RS, *en parties proportionnelles*. Car, si l'on mène AD, et que AC, IF soient les intersections du plan des droites AD, CD par les plans MN, PQ, et EI, BD les intersections du plan des droites AD, AB par les plans PQ, RS; AC et IF étant parallèles (**172**), on aura: CF:FD::AI:ID (**107**). Le triangle BAD donnera pareillement: AE:EB::AI:ID. Donc, CF:FD::AE:EB.

186. *Deux droites* AC, ab (fig. 71) *qui ne sont pas dans un même plan, sont dans des plans parallèles*. Car, si l'on mène AB parallèle à *ab* et *ac* parallèle à AC, le plan des droites AB, AC, et celui des droites *ab*, *ac*, seront parallèles (**181**, **173**).

La distance de ces deux plans parallèles, est *la plus courte distance* des deux droites AC, *ab*.

L'angle BAC ou *bac*, est l'*angle* des deux droites AC, *ab*.

DES ANGLES DIÈDRES, TRIÈDRES ET POLYÈDRES.

187. Lorsque deux plans se coupent, l'écart plus ou moins grand de ces deux plans porte le nom d'*angle dièdre*. L'intersection des deux plans est l'*arête* de l'angle dièdre.

L'angle IOH (fig. 74) que forment les droites OH, OI menées dans les plans AF, BC, perpendiculairement à leur intersection commune AB, est *l'angle plan* correspondant à l'angle dièdre de ces plans.

Cet angle est le même quel que soit le point de l'intersection AB que l'on prenne pour sommet (**182**). On le désigne par EABD ou CABF etc.

188. *Lorsque deux angles dièdres sont égaux, leurs angles plans correspondants sont égaux;* on peut le prouver par la simple superposition.

Il est également évident qu'à un plus grand angle dièdre correspond un plus grand angle plan, et réciproquement: en sorte que *si deux angles plans sont égaux, les angles dièdres auxquels ils appartiennent sont égaux.*

189. Par une démonstration analogue à celle du nº 47, on prouverait, en s'appuyant sur le numéro précédent, que *deux angles dièdres sont entre eux comme leurs angles plans correspondants.* Par conséquent *l'angle plan peut être pris pour la mesure de l'angle dièdre:* c'est à cet usage que l'on emploie la *fausse équerre.* Cet instrument est composé de deux règles, réunies à charnière par une de leurs extrémités; en mettant cette équerre mobile à

cheval sur l'arête d'un angle dièdre; on obtient la mesure de l'angle plan correspondant.

190. Trois plans qui se coupent déterminent un angle *trièdre* SABC (fig. 75). Le point S commun aux trois plans est le *sommet* de l'angle trièdre, les arêtes des trois angles dièdres formés par ces trois plans, sont les arêtes de l'angle trièdre; et les angles ASB, BSC, CSA formés par ces arêtes, sont les *faces* de l'angle trièdre.

191. *Si l'on mène trois plans respectivement perpendiculaires aux trois arêtes d'un angle trièdre* SABC (fig. 76), *on forme un second angle trièdre* sabc *dont les angles dièdres sont les suppléments des faces du premier, et dont les faces sont les suppléments des angles dièdres du premier.*

En effet, le plan *sa*B*c* étant perpendiculaire à l'arête SB, les droites B*a*, B*c*, sont perpendiculaires à cette arête (156), et mesurent par conséquent l'angle dièdre ASBC; les angles *a*C*b*, *b*A*c*, mesurent pareillement les angles dièdres BSCA et BSAC. L'arête SB étant perpendiculaire au plan *csa*, le plan ASB*c* est perpendiculaire au plan *csa*B (160); par une raison semblable, le plan ASB*c* est perpendiculaire au plan *csb*A; le plan ASB*c* est donc perpendiculaire à *cs* intersection des plans *csa*B et *csb*A (167). *sc* est donc perpendiculaire aux deux droites *c*A, *c*B, et l'angle A*c*B mesure l'angle dièdre A*csa*. Les angles B*a*C, C*b*A, mesurent pareillement les angles dièdres B*asb*, C*bsc*.

Cela posé : dans le quadrilatère SA*c*B, les angles SA*c*, SB*c* étant droits, l'angle A*c*B est le supplément de ASB (84); les angles B*a*C, C*b*B sont pareillement les suppléments des angles BSC, CSA. Dans le quadrilatère *sa*B*c*, les angles *sc*B, *sa*B étant droits, l'angle *c*B*a* est le supplément de *asc*; les angles *a*C*b*, *b*A*c*, sont pareillement les suppléments des angles *asb*, *bsc*. Donc, les angles dièdres de l'angle trièdre *sabc* sont les suppléments de l'angle trièdre SABC, et les faces de l'angle trièdre *sabc* sont les suppléments des angles dièdres de l'angle trièdre SABC.

192. L'angle trièdre *sabc* est dit *supplémentaire* de l'angle trièdre SABC. Cet angle supplémentaire est évidemment le même, quels que soient les points des arêtes SA, SB, SC, par lesquels on leur mène des plans perpendiculaires. Il suit de là que *deux angles trièdres égaux ont leurs angles trièdres supplémentaires égaux, et réciproquement.*

193. *Deux angles trièdres sont égaux quand ils ont deux faces égales chacune à chacune, comprenant un angle dièdre égal.* Car on peut les superposer immédiatement.

194. Si les deux faces égales chacune à chacune comprenaient un angle dièdre différent, la face opposée au plus grand angle dièdre serait évidemment la plus grande. Il suit de là que *deux*

angles trièdres sont égaux quand ils ont leurs trois faces égales chacune à chacune.

195. *Deux angles trièdres sont égaux quand ils ont une face égale, adjacente à deux angles dièdres égaux chacun à chacun.* Car si l'on superpose les faces égales, les autres faces coïncideront.

196. *Deux angles trièdres sont égaux quand ils ont leurs trois angles dièdres égaux chacun à chacun.* Car alors leurs angles trièdres supplémentaires ont leurs trois faces égales chacune à chacune (**191**), et sont par conséquent égaux (**194**). D'où il suit que les premiers angles trièdres sont égaux eux-mêmes (**192**).

197. Deux angles trièdres sont symétriques quand ils ont leurs éléments égaux, mais disposés dans un ordre inverse.

198. *Une face d'un angle trièdre est toujours plus petite que la somme des deux autres.* Car, pour construire l'angle trièdre SABC (fig. 75), on peut imaginer, qu'après avoir réuni à la face ASC les deux autres faces, suivant les arêtes SA, SC, on fasse tourner ces deux faces autour de ces arêtes jusqu'à ce que leurs arêtes mobiles coïncident en SB. Or, si ASC était plus grand que ASB + BSC, ces deux arêtes mobiles ne pourraient se rencontrer, puisqu'en les appliquant sur la face ASC même, cette face ne serait pas entièrement couverte par les deux autres. Si l'on avait ASC=ASB+ BSC, l'arête SB coïnciderait avec la face ASC. Donc, il faut qu'on ait ASC < ASB + BSC.

199. Un nombre quelconque de plans qui passent par un même point déterminent en se coupant un angle *polyèdre*, tel que SABCDE (fig. 77). Un angle polyèdre a autant d'arêtes et d'angles dièdres qu'il a de faces. Il peut se décomposer en autant d'angles triédes qu'il a de faces, moins deux; il suffit pour cela de joindre par des plans, dits *diagonaux*, une même arête SA, avec toutes celles qui n'appartiennent pas à une même face que SA.

200. *La somme des faces de tout angle polyèdre* SABCDE (fig. 77) *est moindre que 4 angles droits.* En effet, coupons par un plan toutes les faces de l'angle polyèdre, l'intersection sera un polygone ABCDE; prenons dans ce polygone un point O quelconque, et joignons OS, OA, OB, OC, OD, OE. La somme des angles de tous les triangles qui ont leur sommet en S et pour bases les côtés du polygone, sera égale à la somme des angles de tous les triangles qui ont les mêmes bases et leur sommet en O. Or, on a (**198**) ABC < ABS + SBC, BCD < BCS + SCD, etc.; par conséquent ABC + BCD + CDE, etc. < ABS + SBC + BCS + SCD + CDS + SDE, etc. Il faut donc, d'après ce qui vient d'être dit, que la somme des angles en S soit plus petite que la somme des angles en O, c'est-à-dire plus petite que 4 angles droits (**12**).

DES PRISMES ET DU CYLINDRE.

201. Tout espace terminé par des plans, se nomme un *polyèdre*.

On appelle *prisme* un polyèdre composé de deux bases parallèles qui sont des polygones égaux, et d'une série de faces latérales, égales en nombre aux côtés des bases, et qui sont des parallélogrammes.

202. Lorsque l'on connaît une des bases, une des faces, et l'angle dièdre qu'elles forment, toutes les parties du prisme sont déterminées. Ainsi, *deux prismes sont égaux quand ils ont des bases égales et une face homologue égale également inclinée sur cette base.*

203. Un prisme est triangulaire, quadrangulaire, pentagonal, etc., suivant que sa base a 3, 4, 5, etc. cotés.

Tout prisme peut se décomposer en prismes triangulaires, par des plans diagonaux menés d'une même arête à toutes celles qui ne font pas avec la première partie d'une même face.

204. On nomme prisme *droit*, un prisme dont toutes les faces latérales sont perpendiculaires aux bases. Un prisme droit est *régulier* quand ses bases sont des polygones réguliers; la ligne qui joint les centres des bases est l'*axe* du prisme, on l'appelle aussi sa *hauteur*. Cet axe est perpendiculaire aux bases. Car, soit ABCDE *abcde* (fig. 78) un prisme régulier, et I*i* son axe; si l'on tire les rayons AI, *ai*, ces rayons seront égaux, puisque les bases du prisme sont des polygones réguliers égaux; A*a* étant perpendiculaire aux deux bases, puisque le prisme est droit, les angles IA*a*, *ia*A sont droits, et A*aiI* est un rectangle. La droite *i*I étant perpendiculaire à tous les rayons des deux bases est perpendiculaire à ces bases (**157**).

205. *Toute section d'un prisme par un plan parallèle aux bases, est un polygone égal à ces bases.* Car les côtés de cette section sont respectivement égaux à ceux de l'une des bases, comme parallèles comprises entre parallèles (**86**, **172**); et ses angles seront respectivement égaux à ceux de cette base, comme ayant leurs côtés parallèles et dirigés dans le même sens (**182**).

Il suit de là que la section d'un prisme régulier par un plan parallèle aux bases, est un polygone régulier égal à ces bases.

206. On nomme *cylindre droit à base circulaire*, ou simplement *cylindre*, un prisme régulier d'un nombre infini de faces infiniment petites; on peut le considérer comme engendré par la rotation d'un rectangle IABH (fig. 79) qui tourne autour d'un de ses côtés IH. Le côté fixe IH est l'*axe* du cylindre; on l'appelle aussi sa *hauteur*. Les côtés IA, HB, décrivent des cercles; et le côté AB décrit la *surface cylindrique.*

207. *Deux cylindres qui ont même base et même hauteur sont égaux;* car ils peuvent se superposer.

208. *Toute section d'un cylindre par un plan parallèle aux bases, est un cercle du même rayon que ces bases.* Cela résulte de la définition du cylindre, et du principe énoncé au nº **205**.

Du parallélépipède.

209. On nomme *parallélépipède* un polyèdre composé de six faces parallèles deux à deux.

Les intersections de deux plans parallèles par un troisième plan étant des droites parallèles, il s'ensuit que les six faces d'un parallélépipède sont des parallélogrammes, et que les faces parallèles sont des parallélogrammes égaux.

Un parallélépipède peut être considéré comme un prisme dont les bases sont des parallélogrammes. Un parallélépipède est *droit* quand deux de ses faces sont perpendiculaires aux quatre autres; on peut alors prendre ces faces pour bases, et considérer le parallélépipède comme un prisme droit. Un parallélépipède est *rectangle* quand ses faces sont perpendiculaires deux à deux. Ses faces sont alors des rectangles.

Si les six faces sont des carrés, le parallélépipède rectangle prend le nom de *cube*.

210. On prouverait facilement que dans tout parallélépipède, les angles dièdres opposés sont égaux, les angles trièdres opposés symétriques, et que tout parallélépipède peut être décomposé par un plan diagonal en deux prismes triangulaires, non pas égaux, mais symétriques.

DES PYRAMIDES ET DU CONE.

211. Quand on coupe par un plan toutes les arêtes d'un angle polyèdre, on obtient une *pyramide*. La partie de ce plan, comprise entre ses faces, est un polygone qu'on nomme sa base. Une pyramide est triangulaire, quadrangulaire, pentagonale, etc., suivant que sa base est un triangle, un quadrilatère, un pentagone, etc. La perpendiculaire abaissée du sommet sur la base, se nomme la *hauteur* de la pyramide.

Une pyramide est *régulière*, quand sa base est un polygone régulier, et que son sommet est sur la perpendiculaire élevée sur le centre de la base. Toutes les arêtes sont alors égales; il en est de même de ses faces (**163**). La droite qui joint le sommet au centre de la base est l'*axe* de la pyramide.

Toute pyramide peut être décomposée en pyramides triangulaires par des plans diagonaux. La pyramide triangulaire se nomme aussi *tétraèdre*.

212. Quand on connaît la base d'une pyramide, une de ses faces, et leur inclinaison mutuelle, toutes les parties de la pyramide sont déterminées ainsi: *deux pyramides sont égales quand elles ont la base et une face égales, comprenant un angle dièdre égal.*

213. *Toute section d'une pyramide par un plan parallèle à la base,*

est un polygone semblable à cette base. Car, si on coupe une pyramide SABCDE (fig. 80) par un plan parallèle à la base, les côtés *ab*, *bc*, *cd*, etc., de la section, seront parallèles aux côtés AB, BC, CD etc. de la base (**172**); on aura donc : *ab* : AB :: *sb* : SB :: *bc* . BC :: *sc* : SC :: *cd* : CD, etc. De plus, les angles du polygone *abcde* sont respectivement égaux à ceux de la base, comme ayant leurs côtés parallèles et dirigés dans le même sens (**182**); donc, etc.

Il suit de là que toute section d'une pyramide régulière par un plan parallèle à la base, est un polygone régulier.

Si l'on enlève la pyramide *sabcde*, la partie restante se nomme un *tronc de pyramide*.

214. On nomme *cône droit à base circulaire*, ou simplement *cône*, une pyramide régulière d'un nombre infini de faces infiniment petites. On peut le considérer comme engendré par un triangle rectangle AOB (fig. 81) qui tourne autour de l'un des côtes de l'angle droit. Le côté fixe AO est l'*axe* du cône; on l'appelle aussi sa hauteur; le côté OB décrit un cercle, et le côté AB, nommé la *génératrice* ou le *côté* du cône, décrit la *surface conique*.

215. *Deux cônes de même base et de même hauteur sont égaux*, car ils peuvent se superposer.

216. *Toute section d'un cône, par un plan* ob *parallèle à la base, est un cercle;* cela résulte de la définition du cône, et du principe énoncé au n° **213**.

Si l'on enlève le cône A*bo*, la partie restante se nomme un *tronc de cône*.

DES POLYÈDRES EN GÉNÉRAL.

217. Tout polyèdre peut être décomposé en pyramides qui ont pour sommet commun un point intérieur de ce polyèdre, et ses faces pour bases. Tout polyèdre peut donc être décomposé en tétraèdres (**211**).

Deux polyèdres sont égaux lorsqu'ils sont décomposables en un même nombre de tétraèdres égaux et semblablement disposés.

Un polyèdre est régulier quand toutes ses faces sont des polygones réguliers égaux et également inclinés les uns sur les autres. Le plus simple de tous est le tétraèdre régulier, composé de quatre triangles équilatéraux. Le cube est aussi un polyèdre régulier.

DE LA SPHÈRE.

218. On nomme *sphère* un espace terminé par une surface dont tous les points sont également distants d'un point intérieur nommé *centre*. Le nom de sphère s'applique souvent à la surface sphérique. Toute droite menée du centre à la surface se nomme un *rayon* de la sphère; le double du rayon s'appelle *diamètre*. Tous les rayons sont égaux, ainsi que tous les diamètres.

219. *Toute section de la sphère par un plan est un cercle, dont le centre est le pied de la perpendiculaire abaissée du centre de la sphère sur ce plan.* Car les rayons menés à tous les points du contour de cette section, sont des obliques égales, qui s'écartent également du pied de la perpendiculaire (**165**).

La section de la sphère par un plan, qui passe par son centre, se nomme un *grand cercle.* Toute autre section se nomme un *petit cercle. Tous les grands cercles sont égaux;* car ils ont pour rayon, le rayon même de la sphère.

La perpendiculaire abaissée du centre sur le plan d'un cercle de la sphère prend le nom d'*axe* de la sphère: les points où l'axe rencontre la surface sont les *pôles* de ce cercle.

220. *Deux grands cercles se coupent mutuellement en deux parties égales;* car leur intersection est un diamètre (**20**, **219**).

221. On appelle *calotte sphérique* la partie de la surface sphérique située d'un même côté d'un plan qui la coupe; *segment sphérique*, la portion de la sphère comprise entre ce plan et l'une des calottes qu'il détermine. On nomme *zône sphérique*, la partie de la surface sphérique comprise entre deux plans parallèles; *tranche sphérique*, la portion de la sphère comprise entre ces plans. On appelle *fuseau sphérique*, la partie de la surface sphérique comprise entre deux plans qui se coupent au centre; *coin sphérique*, la portion de la sphère comprise entre ces plans et le fuseau qu'ils déterminent.

222. *Tout plan perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon, est tangent à la sphère, et réciproquement.* Mêmes démonstrations qu'aux n^{os} **27** et **28**.

223. On nomme *triangle sphérique*, la portion ABC (fig. 82) de la surface sphérique, comprise entre trois grands cercles qui se coupent. Les arcs de grands cercles AB, AC, BC sont les *côtés* du triangle sphérique, et les angles dièdres formés par les plans de ces grands cercles, sont les *angles* du triangle sphérique. L'angle trièdre OABC a pour angles dièdres les angles du triangle sphérique ABC, et ses faces ont pour mesure les côtés de ce triangle. Toutes les propriétés des angles trièdres (**193**, **194**, **196**, **197**, **198** et même **200**) sont donc communes aux triangles sphériques. Il suffit pour les énoncer de remplacer les mots faces, angles dièdres, par les mots côtés, angles.

224. Si l'on mène trois grands cercles perpendiculairement à chacune des arêtes de l'angle trièdre OABC, ces cercles détermineront un triangle sphérique, dont les côtés seront les suppléments des angles du premier, et donc les angles seront les suppléments des côtés du premier (**191**). Ces deux triangles sont dits *polaires* l'un de l'autre, parce que, d'après la construction du second, chaque sommet de l'un est le pôle de l'un des côtés de l'autre (**219**, **167**).

DE LA SIMILITUDE.

225. Deux polyèdres sont dits *semblables*, lorsqu'ils ont leurs angles dièdres égaux, et leurs faces semblables.

Deux polyèdres sont semblables quand ils peuvent se décomposer en tétraèdres semblables, et semblablement disposés (**217**).

226. *Toute section d'une pyramide* SABCDE (fig. 80) *par un plan parallèle à la base, détermine une pyramide* sabcde, *semblable à la première.* Car d'abord une face quelconque, ASB par exemple, est également inclinée sur les deux plans parallèles (ce qu'on rendrait évident en menant un plan perpendiculaire aux deux droites AB, *ab*, et par conséquent aux deux plans parallèles). Il suit de là que les deux pyramides ont tous leurs angles dièdres égaux ou communs. Or, le parallélisme des droites AB, *ab*, BC, *bc*, etc., entraîne la proportionalité des lignes homologues, et par conséquent la similitude des faces et des bases (**213**). Donc, etc.

DES AIRES.

227. *Les aires des surfaces des polyèdres semblables sont proportionnelles aux carrés des lignes homologues.* Cela résulte des nos **141**, **225**, et des propriétés des rapports égaux.

228. *L'aire de la surface latérale d'un prisme régulier a pour mesure le produit de sa hauteur* (ou d'une de ses arêtes **204**) *par le périmètre de sa base.* Car cette surface se compose d'une série de rectangles de même hauteur que le prisme, et qui ont pour bases les côtés de la base du prisme.

229. *L'aire de la surface cylindrique a pour mesure le produit de la hauteur du cylindre par la circonférence de sa base.* Cela résulte du numéro précédent.

230. *L'aire de la surface latérale d'une pyramide régulière a pour mesure le produit du périmètre de sa base par la moitié de la perpendiculaire abaissée du sommet sur un des côtés de cette base.* Car cette surface se compose d'une série de triangles égaux, qui ont pour sommet celui de la pyramide, et pour base l'un des côtés de la base de cette pyramide.

231. *L'aire de la surface conique a pour mesure le produit de la circonférence de sa base par la moitié de son côté.* Cela résulte du numéro précédent.

232. On obtient l'aire de la surface latérale d'un tronc de pyramide régulière, en retranchant, de l'aire de la pyramide entière, l'aire de la pyramide enlevée.

On obtient l'aire de la surface latérale d'un tronc de cône, en retranchant de l'aire du cône entier l'aire du cône enlevé.

233. L'aire d'un trapèze ayant pour mesure le produit de sa hauteur par la droite qui joint le milieu de ses côtés (**156**), l'aire

de la surface latérale du tronc de pyramide régulière ABCDE *abcde* (fig. 80), composée de trapèzes égaux, a pour mesure le produit de la hauteur de l'un de ces trapèzes par le contour de la section parallèle aux bases, faite à égale distance de ces bases (185).

234. Il suit du numéro précédent que l'aire de la surface latérale du tronc de cône engendré par la révolution du trapèze ABDC (fig. 83) autour du côté CD perpendiculaire aux bases, a pour mesure le produit du côté AB par la circonférence du cercle décrit par la ligne IH qui joint les milieux des côtés AB et CD, et son expression est AB × circ. IH.

Si l'on élève IO perpendiculaire à AB, et qu'on abaisse AP perpendiculaire sur BD, les triangles rectangles ABP, IOH seront équiangles comme ayant leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun (43); ces triangles seront donc semblables, et l'on aura AB : AP :: IO : IH. Mais les circonférences étant proportionnelles à leurs rayons (115), on a IO : IH :: circ.IO : circ.IH, et par conséquent AB : AP :: circ.IO : circ.IH; d'où

AB × circ.IH = AP × circ. IO.

L'aire du tronc de cône a donc *pour mesure le produit de sa hauteur AP par la circonférence dont le rayon est la perpendiculaire IO élevée sur le milieu de AB.*

Ce qu'on vient de dire du tronc de cône étant général, s'applique au cas où la base supérieure est nulle, c'est-à-dire au cône entier.

235. Si l'on inscrit au demi-cercle BAC, la moitié d'un polygone régulier de 16, 32, 64, etc., côtés, et qu'on fasse tourner ce cercle autour du diamètre BC, la demi-circonférence décrira une sphère, et le demi-polygone inscrit décrira une suite de cônes et de troncs de cônes dont la surface aura pour mesure le produit de la circonférence qui a l'apothème pour rayon, par la hauteur de ce tronc de cône ou de ce cône (234); la surface totale aura donc pour mesure le produit de la circonférence qui a l'apothème pour rayon par la somme des hauteurs de ces cônes et troncs de cônes, c'est-à-dire par le diamètre BC. Mais plus on multipliera le nombre des côtés du polygone inscrit, plus l'apothème approchera du rayon, et la surface décrite par ce polygone de la surface de la sphère. *L'aire de la sphère a* donc *pour mesure le produit de la circonférence d'un grand cercle par le diamètre*, ou en nommant R le rayon, $2\pi R \times 2R$ ou $4\pi R^2$, c'est-à-dire *quatre fois l'aire d'un grand cercle.*

L'aire d'une *calotte sphérique* a pour mesure le produit de sa hauteur par la circonférence d'un grand cercle. Il en est de même de l'aire d'une *zone sphérique*.

236. Un cylindre qui aurait pour base un grand cercle de la sphère dont le rayon est R et pour hauteur le diamètre, aurait pour surface latérale $2\pi R \times 2R$ ou $4\pi R^2$, son aire serait donc équivalente à celle de la sphère.

DES VOLUMES.

Volume du parallélépipède.

237. *Deux parallélépipèdes rectangles* ABCDMNOP et ABCDEFGH (fig. 85) *qui ont même base, sont entre eux comme leurs hauteurs* AM *et* AE. En effet, 1° si les hauteurs AE et AM ont une commune mesure, en les divisant en parties égales à cette commune mesure et menant par tous les points de division des plans parallèles à la base, chaque parallélépipède se trouvera partagé en autant de petits parallélépipèdes égaux que sa hauteur contient de parties égales ; on aura donc : ABCDEFGH : ABCDMNOP : : AE : AM.

2° Si AE et AM n'ont pas de commune mesure, partageons AE en 100 parties égales ; AM contiendra, je suppose, 59 de ces parties, plus un reste moindre que l'une d'elles ; et si l'on mène par tous les points de division des plans parallèles aux bases, ABCDEFGH sera partagé en 100 parallélépipèdes égaux, et ABCDMNOP contiendra 59 de ces parallélépipèdes, plus un reste moindre que l'un d'eux. Or, ces restes peuvent être rendus aussi petits que l'on voudra, en multipliant suffisamment les divisions de AE. Donc, on a rigoureusement :

ABCDEFGH : ABCDMNOP : : AE : AM.

238. *Deux parallélépipèdes rectangles quelconques* ABOCMNPD et Abocmnpd (fig. 86) *sont entre eux comme les produits des trois arêtes contiguës à un même sommet.* Prolongeons le plan *mnpd* jusqu'en *d*LTK, et le plan *onpc* jusqu'en RS*pc*. Nous aurons successivement :

A*bocmnpd* : ABR*c*LS*pd* : : A*b* : AB (**237**).
ABRCLS*pd* : ABOCLTK*d* : : A*c* : AC.
ABOCLTK*d* : ABOCMNPD : : A*d* : AD.

Multiplions par ordre et supprimons les facteurs communs, il restera :

A*bocmnpd* : ABOCMNPD : : A*b* $\times$ A*c* $\times$ A*d* : AB $\times$ AC $\times$ AD.

On peut exprimer ce résultat en disant : *deux parallélépipèdes rectangles sont entre eux comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs.*

239. Si l'on prend pour unité de volume celui du cube qui a pour arête l'unité de longueur, on pourra dire que *le volume d'un parallélipipède rectangle a pour mesure le produit des trois arêtes contiguës à un même sommet, ou le produit de sa base par sa hauteur* (**238**).

240. *Tout parallélépipède droit* ABCDEFGH (fig. 87) *est équivalent à un parallélépipède rectangle* ABIMEKLH, *ayant même*

hauteur BI *et même base* ABEH. Car les prismes triangulaires ADMHGL, BCIEFK sont égaux (**209**); et si de l'espace total ABCMHEFL on retranche successivement chacun de ces prismes, on aura pour restes le parallélépipède droit et le parallélépipède rectangle.

241. *Un parallélépipède quelconque* ABCDEFGH (fig. 88), *est équivalent à un parallélépipède droit* ABLMNOPQ *qui a même hauteur, et une base* ABLM *équivalente à la base* ABCD. Car on prouverait par la superposition que les polyèdres AHQDGPM et BENCFOL sont égaux; et si de l'espace total ABEQCFPM on retranche successivement chacun de ces polyèdres, on aura pour restes le parallélépipède quelconque et le parallélépipède droit.

242. Il résulte des nos **241** et **240**, *qu'un parallélépipède quelconque est équivalent à un parallélépipède rectangle de même hauteur, et dont la base est équivalente*. Ainsi donc, le volume d'un *parallélépipède quelconque a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur* (**239**).

Volume des prismes et du cylindre.

243. *Tout prisme triangulaire* ABCDEF (fig. 89) *est équivalent à un prisme triangulaire droit* abcdef, *ayant les mêmes arêtes*. En effet, on prouverait par la superposition que les polyèdres A*ab*BF*f* et D*dc*CE*e* sont égaux; et si on retranche successivement chacun d'eux de l'espace total A*dc*BF*e*, on a pour restes le prisme triangulaire quelconque, et le prisme triangulaire droit.

244. *Tout plan diagonal* ADEF *d'un parallélépipède* ABCDEFGH (fig. 90), *le divise en deux prismes équivalents*. Car, si on construit un parallélépipède droit *abcdefgh*, qui ait les mêmes arêtes, le prisme ACBDEF sera équivalent au prisme *abcdef* (**241**); de même, le prisme ADEFGH sera équivalent au prisme *adefgh*. Or, le parallélépipède *abcdefgh* étant droit, les deux prismes droits *abcdef*, *adefgh* sont superposables, et par conséquent égaux.

245. Il suit du numéro précédent et du no **242**, que *le volume d'un prisme triangulaire a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur*.

Par conséquent (**203**), *le volume d'un prisme quelconque a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur*.

Et, par suite, *le volume d'un cylindre a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur*.

Volume des pyramides et du cône.

246. *Deux tétraèdres* SABC, OMNP (fig. 91), *qui ont même hauteur, et des bases* ABC, MNP *équivalentes, sont équivalents*. En effet, supposons que les deux bases ABC, MNP soient placées sur un même plan; les sommets S et O appartiendront à un plan parallèle à celui des bases. Entre ces deux plans, menons une série de

plans parallèles équidistants, qui coupent les tétraèdres suivants *abc*, *a'b'c'*, *a''b''c''*, etc., et suivants *mnp*, *m'n'p'*, *m''n''p''*, etc. D'après les propriétés indiquées aux nos **185** et **226**, ces sections seront respectivement équivalentes; et si l'on achève les prismes ABCE*b*F, *abceb'f*, etc., et MNPQR*p*, *mnpqrp'*, etc., ces prismes seront respectivement équivalents (**245**). La somme des premiers équivaudra donc à la somme des seconds. Mais, en multipliant suffisamment le nombre des plans équidistants, ces deux sommes de prismes approcheront autant qu'on le voudra des tétraèdres SABC et OMNP. Donc, ces tétraèdres sont équivalents.

247. *Un tétraèdre est le tiers d'un prisme triangulaire de même base et de même hauteur.* Soit en effet SABC (fig. 92) un tétraèdre quelconque : achevons le prisme triangulaire ABCDSE, et menons le plan diagonal SDC. Les deux tétraèdres SADC et SEDC sont équivalents, comme ayant des bases équivalentes ADC, EDC et même hauteur, puisqu'ils ont même sommet S, et que leurs bases sont sur un même plan. Les tétraèdres SABC, SDEC sont équivalents, comme ayant des bases égales ABC, ESD et même hauteur, puisque cette hauteur est la distance des plans des deux bases. Les trois tétraèdres SABC, SADC, SEDC sont donc équivalents. Donc, SABC est le tiers du prisme ABCDSE.

248. Il suit du numéro précédent et du n° **245** que *le volume d'un tétraèdre a pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur.*

Par conséquent (**211**), *le volume d'une pyramide quelconque a pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur.*

Et, par suite, *le volume d'un cône a pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur.*

Volume des polyèdres quelconques, et de la sphère.

249. Le volume d'un polyèdre quelconque est la somme des volumes des pyramides dans lesquelles il peut être décomposé.

250. Le volume d'une sphère peut être considéré comme la somme d'une infinité de pyramides ayant pour sommet commun le centre de la sphère, et pour bases, des portions de sa surface tellement petites qu'on puisse les regarder comme planes, et que les hauteurs de ces pyramides soient sensiblement égales au rayon de la sphère. Par conséquent, le volume de la sphère aura pour mesure le tiers du produit du rayon par la somme de ces bases, c'est-à-dire par la surface de la sphère. Donc, *le volume d'une sphère a pour mesure le tiers du produit de sa surface par son rayon.* En désignant le rayon par R, la surface sera exprimée par $4\pi R^2$ et le volume par $\frac{4\pi R^2 \times R}{3}$ ou $\frac{4}{3}\pi R^3$.

251. On nomme *secteur sphérique* la portion de sphère engendrée

par la révolution d'un secteur circulaire OAB autour du rayon AO (fig. 95).

Le volume d'un secteur sphérique a pour mesure le tiers du produit de la calotte sphérique qui lui sert de base par le rayon. Cela résulte des mêmes raisonnements qu'au n° **250**.

On aura le volume du segment sphérique engendré par ABC, en retranchant du volume du secteur engendré par DAB, le volume du cône engendré par OBC.

Le volume d'une tranche sphérique est la différence de deux segments.

Comparaison des volumes.

252. *Les volumes de deux pyramides Sabcde,* SABCDE (fig. 80) *sont entre eux comme les cubes de leurs lignes homologues.* Car, si l'on appelle h et H les hauteurs de ces pyramides, on aura :

$h : H :: Sa : SA.$

Appelons v et V les volumes des pyramides, b et B leurs bases, on aura : $v = \frac{1}{3}\, h \times b$ et $V = \frac{1}{3}\, H \times B$, d'où $v : V :: h \times b : H \times B$. Mais $b : B :: \overline{ab}^2 : \overline{AB}^2 :: \overline{Sa}^2 : \overline{SA}^2 :: h^2 : H^2$ ou $b : B :: h^2 : H^2$; or, on a aussi $h : H :: h : H$. Multipliant par ordre, il vient $b \times h : B \times H :: h^3 : H^3$. Donc, $v : V :: h^3 : H^3$, et par suite, $v : V :: \overline{Sa}^3 : \overline{SA}^3 :: \overline{ab}^3 : \overline{AB}^3$, etc.

253. *Deux polyèdres semblables sont entre eux comme les cubes de leurs lignes homologues.* Cela résulte des n^{os} **225**, **252**, et des propriétés des rapports égaux.

254. Un cylindre qui aurait pour base un grand cercle d'une sphère, et pour hauteur le diamètre de cette sphère, aurait pour volume, en nommant R le rayon, $\pi R^2 \times 2R$ ou $2\pi R^3$. Le volume de la sphère est d'ailleurs $\frac{4}{3}\pi R^3$; elle est donc les $\frac{2}{3}$ de celui de ce cylindre.

ALGÈBRE.

PREMIÈRE PARTIE.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

1. L'*algèbre* est la partie des mathématiques qui a pour but de généraliser la solution des questions relatives aux nombres.

A cet effet, on représente les nombres par des lettres; on emploie en outre les signes abréviatifs $=$, $+$, $-$, $\times$, $:$, $\sqrt{}$ etc., déjà connus en arithmétique, et quelques autres que nous ferons connaître par la suite.

(Le signe $\times$ est souvent remplacé par un point, ou même entièrement supprimé; ainsi, $a \times b = a \,.\, b = ab$).

2. Prenons pour exemple la solution générale du problème suivant : *connaissant la somme* a *de deux nombres, et leur différence* b, *trouver chacun de ces nombres*. Si l'on appelle x le plus petit des deux nombres cherchés, le plus grand sera $x + b$, et l'on aura $x + x + b = a$ ou $2x + b = a$, d'où $2x = a - b$ et $x = \frac{a-b}{2}$. Telle est la *formule* qui donne l'*inconnue* x *en fonction* des quantités connues a et b; c'est-à-dire qui indique d'une manière générale les opérations à faire sur ces quantités connues pour en déduire l'inconnue.

On trouvera, pour la valeur du plus grand des deux nombres,

$$x + b = \frac{a-b}{2} + b = \frac{a-b}{2} + \frac{2b}{2} = \frac{a-b+2b}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

Si l'on demandait en particulier de trouver deux nombres dont la somme soit 45 et la différence 17 : il suffirait, dans les formules précédentes, de remplacer a et b par leurs valeurs 45 et 17. On trouverait ainsi que le plus petit des deux nombres cherchés est $\frac{45-17}{2}$ ou 14, et le plus grand $\frac{45+17}{2}$ ou 31. En effet, on a :

$$31 + 14 = 45, \text{ et } 31 - 14 = 17.$$

3. Toute quantité représentée par des signes algébriques se nomme *quantité algébrique*, ou *quantité littérale*, ou *expression algébrique*.

Si l'on donne des valeurs particulières à toutes les lettres qui entrent dans une expression algébrique, et qu'on effectue les opérations indiquées, on obtient pour résultat la *valeur numérique* de cette expression.

4. On appelle *polynome* toute expression algébrique composée

de plusieurs parties, séparées les unes des autres par les signes + ou —. Chacune de ces parties est un *terme* de ce polynome.

Une expression algébrique prend les noms de *monome*, *binome*, *trinome*, etc., suivant qu'elle se compose d'un, de deux, de trois termes, etc.

Les termes précédés du signe + sont dits *additifs* ou *positifs*; les termes précédés du signe — sont dits *soustractifs* ou *négatifs*.

Les monomes, et le premier terme d'un polynome, lorsqu'ils ne sont précédés d'aucun signe, sont censés avoir le signe +.

5. Le *degré* de chaque terme est le nombre de facteurs littéraux dont il se compose. Ainsi, le terme $15 . a . b^2 . c . d^3$ est du 7e degré parce qu'il équivaut au produit $15 . a . b . b . c . d . d . d$ qui contient sept facteurs littéraux. (Tous les facteurs d'un monome s'écrivent à la suite les uns des autres, sans interposition de signe; ainsi le produit $15 . a . b^2 . c . d^3$ s'écrit $15\ ab^2cd^3$).

Un polynome est dit *homogène* quand tous ses termes sont du même degré.

6. Quand un terme contient un facteur numérique, ce facteur se place le premier, et prend le nom de *coefficient* de ce terme. Tout terme qui n'a pas de coefficient est censé avoir pour coefficient l'unité.

On appelle *termes semblables*, ceux qui ne diffèrent que par le coefficient; $7ab^2$, ab^2, $19ab^2$ ec., sont des termes semblables.

7. *Tous les termes semblables d'un polynome peuvent être réduits à un seul.* Car, soit le polynome $cd^2 - ab^2 + 19\ ab^2 - 7\ ab^2 + 3\ ab^2$ qui contient quatre termes semblables. Il résulte de la nature même de l'addition et de la soustraction que *la valeur numérique d'un polynome ne change pas quelque soit l'ordre de ses termes;* on pourra donc écrire le polynome proposé comme il suit: $cd^2 + 19ab^2 + 3ab^2 - ab^2 - 7\ ab^2$. Or, la somme des termes semblables additifs est évidemment $22\ ab^2$ et celle des termes soustractifs est $8ab^2$. Le polynome proposé équivaut donc à cd^2 augmenté de la différence entre $22\ ab^2$ et $8\ ab^2$, c'est-à-dire augmenté de $14\ ab^2$. Ce polynome revient donc à $cd^2 + 14\ ab^2$; et les quatre termes semblables sont réduits à un seul.

S'il s'agissait du polynome $cd^2 + ab^2 - 19\ ab^2 + 7\ ab^2 - 3ab^2$, la somme des termes additifs étant $8\ ab^2$ et la somme des termes soustractifs $22\ ab^2$, ce polynome équivaut à cd^2 diminué de la différence entre ces deux sommes, c'est-à-dire diminué de $14\ ab^2$; il peut donc s'écrire $cd^2 - 14\ ab^2$; et tous les termes semblables sont encore réduits à un seul.

Il suit de là que, *pour opérer la réduction des termes semblables, il faut faire la somme de ceux qui sont additifs, la somme de ceux qui sont soustractifs, prendre la différence de ces deux sommes, et lui donner le signe de la plus grande.* C'est ce qu'on appelle *réduire* un polynome.

8. On dit qu'un polynome est *ordonné par rapport à une lettre* quand l'exposant de cette lettre croît ou décroît successivement d'un terme à l'autre. Ainsi,
$17a\,bc^5 + 13a^4bc^2 - 11a^3b^2c^2 + 22a^2b^2c^3 - 19ab^3c^3 + 8b^5c^5$
est un polynome ordonné par rapport à la lettre a.

DE L'ADDITION ALGÉBRIQUE.

9. Pour additionner plusieurs monomes, il est évident qu'il suffit de les écrire à la suite les uns des autres en les séparant par le signe $+$. Ainsi, la somme des monomes $3a^2b$, $5a^2bc$, abc^2 est $3a^2b + 5a^2bc + abc^2$.

10. Soient à additionner les polynomes $a - b$ et $c - d$. Si au polynome $a - b$ on ajoute c, ce qui donnera $a - b + c$, on aura un résultat trop grand de toute la quantité d; il faut donc de $a - b + c$ retrancher d, ce qui donnera $a - b + c - d$. On voit que *pour faire la somme de deux polynomes, il faut écrire à la suite du premier tous les termes du second avec leurs signes respectifs.*

Si la somme contient des termes semblables, on en opère la réduction. On trouve ainsi que la somme des deux polynomes $13a^2cd^2 - 7a^3cd + 11acd^3$ et $14acd^3 + 7a^3cd - 9a^2cd^2$ est $4a^2cd^2 + 25acd^3$.

Remarquons que deux termes égaux et de signe contraire se détruisent.

On opérerait de même l'addition de trois, quatre polynomes, etc.

DE LA SOUSTRACTION ALGÉBRIQUE.

11. Pour soustraire l'un de l'autre deux monomes, il suffit évidemment d'écrire l'un à la suite de l'autre, en les séparant par le signe $-$. Ainsi, pour retrancher $7a^3bd$ de $10a^2b^2c$, on écrira $10a^2b^2c - 7a^3bd$.

12. Pour indiquer qu'un polynome $c-d$ doit être retranché d'un autre polynome $a+b$, on écrit le second à la suite du premier, en l'enveloppant de deux parenthèses, et l'on fait précéder ces parenthèses du signe $-$ qui porte alors sur le résultat des opérations indiquées entre parenthèses. On obtient ainsi $a+b-(c-d)$.

Pour opérer cette soustraction indiquée, retranchons d'abord c de $a+b$, nous aurons $a+b-c$, résultat évidemment trop petit de toute la quantité d, puisque ce n'est pas c qu'il faut retrancher de $a+b$, mais bien c diminué de d. Il faut donc à $a+b-c$ ajouter d, ce qui donnera $a+b-c+d$. On voit que, *pour soustraire un polynome d'un autre, il faut écrire le premier à la suite du second en changeant le signe de chacun de ses termes.* Si le résultat renferme des termes semblables, on en opère la réduction. On trouve ainsi que $4ab^2c - 7bd^3 + 10a^3d$ retranché de $25a^3d + 7bd^3$ donne pour reste $15a^3d - 4ab^2c + 14bd^3$.

13. L'usage des parenthèses permet de décomposer un polynome donné en deux parties séparées entre elles par le signe —. Par exemple, le polynome $27a^4bc-8a^3bc^2+7a^2b^2c^2-10ab^2c^3+12b^3c^3$ peut s'écrire $27a^4bc-8a^3bc^2+7a^2b^2c^2-(10ab^2c^3-12b^3c^3)$, ou bien $27a^4bc-(8a^3bc^2-7a^2b^2c^2+10ab^2c^3-12b^3c^3)$ (**12**).

DE LA MULTIPLICATION ALGÉBRIQUE.

14. Soit à multiplier $4a^3b^2c$ par $3a^2bd^2$. Ces deux monomes peuvent s'écrire $4aaabbc$ et $3aabdd$; leur produit, composé de tous les facteurs qui entrent dans l'un et dans l'autre, sera donc $4.a.a.a.b.b.c.3.a.a.b.d.d$; ou en changeant l'ordre des facteurs, ce qui n'altère pas le produit, $4.3.aaaaabbbcdd$ ou enfin $12a^5b^3cd^2$. Il suit de là que, *pour faire le produit de deux monomes, il faut faire le produit des deux coefficients, écrire à la suite toutes les lettres qui entrent dans les deux monomes, et affecter chacune d'un exposant égal à la somme de ceux qu'elle a dans ces monomes.* Il suffit de se rappeler que l'exposant d'un nombre exprime combien de fois ce nombre entre comme facteur, et que, par conséquent, toute lettre qui n'a pas d'exposant est censée avoir pour exposant l'unité.

15. Pour indiquer le produit de $a+b+c$ par $d+e$, on peut écrire $(a+b+c)\times(d+e)$, ou simplement $(a+b+c)(d+e)$.

Pour opérer cette multiplication, observons que répéter la somme $a+b+c$ autant de fois qu'il y a d'unités dans la somme $d+e$, revient à répéter successivement chacune des parties de la somme $a+b+c$ autant de fois qu'il y a d'unités dans d, plus autant de fois qu'il y a d'unités dans e, on a donc

$$(a+b+c)(d+e)=ad+bd+cd+ae+be+ce.$$

On voit que *pour multiplier l'un par l'autre deux polynomes dont tous les termes sont additifs, il faut multiplier chaque terme de l'un par chacun des termes de l'autre, et faire la somme des produits.* Si le résultat contient des termes semblables, on en opère la réduction. On trouve ainsi que :

$$(4a^3b+3a^2b^2+5ab^3)(7a^2b+10ab^2)=28a^5b^2+61a^4b^3+65a^3b^4+50a^2b^5.$$

16. Soit à multiplier $a-b$ par $c-d$: cela revient à répéter $a-b$ autant de fois qu'il y a d'unités dans c, *moins* autant de fois qu'il y a d'unités dans d, ce qu'on peut exprimer ainsi :

$$(a-b)(c-d)=(a-b)\,c-(a-b)\,d.$$

Par une raison semblable, on aura :

$(a-b)c$ ou $c(a-b)=ca-cb$; de même $(a-b)d=da-db$.

Donc, $(a-b)(c-d)=(ca-cb)-(da-db)$, ou

$$(a-b)(c-d)=ca-cb-da+db=ac-bc-ad+bd \;(\mathbf{12}).$$

Il résulte de là que *le produit de deux termes de même signe doit*

être pris avec le signe $+$, et que *le produit de deux termes de signes contraires doit être pris avec le signe* $-$.

Cette règle s'étend à des polynomes d'un nombre quelconque de termes; car tout polynome, étant composé de deux parties dont l'une est la somme des termes additifs, et l'autre la somme des termes soustractifs, est de la forme $a-b$ ou $c-d$.

17. Les règles données aux nᵒˢ **14**, **15** et **16** fournissent les moyens de multiplier entre eux deux polynomes quelconques. On trouvera ainsi :

que le polynome $5a^3bc - 2a^2bc^2 + 3ab^2c^2 - 10b^2c^3$
multiplié par $4a^2b - 3abc + 5bc^2$

$$\begin{array}{l} 20a^5b^2c - 8a^4b^2c^2 + 12a^3b^3c^2 - 40a^2b^3c^3 \\ -15a^4b^2c^2 + 6a^3b^2c^3 - 9a^2b^3c^3 + 30ab^3c^4 \\ +25a^3b^2c^3 - 10a^2b^2c^4 + 15ab^3c^4 - 50b^3c^5 \end{array}$$

donne p. produit $20a^5b^2c - 23a^4b^2c^2 + 12a^3b^3c^2 + 31a^3b^2c^3$
$- 49a^2b^3c^3 - 10a^2b^2c^4 + 45ab^3c^4 - 50b^3c^5$.

18. *Lorsqu'on multiplie entre eux deux polynomes homogènes* (5), *leur produit est homogène, et d'un degré égal à la somme des degrés de ses deux facteurs.* Car si, par exemple, le multiplicande est du 5ᵉ degré et le multiplicateur du 3ᵉ, chaque terme du multiplicande contenant 5 facteurs littéraux, et chaque terme du multiplicateur en contenant 3, chaque terme du produit en contiendra $5+3$ ou 8, et sera par conséquent du 8ᵉ degré. — Cette observation peut servir à vérifier le produit.

19. *Lorsque le produit n'offre aucune réduction de termes semblables, le nombre de ses termes est le produit du nombre des termes du multiplicande par le nombre des termes du multiplicateur.* Car chaque terme du multiplicande se trouve multiplié par tous les termes du multiplicateur.

20. *Lorsque le multiplicande et le multiplicateur sont ordonnés par rapport à une lettre quelconque, le produit du premier terme de l'un par le premier terme de l'autre ne saurait se réduire avec aucun autre produit, et il en est de même du produit des deux derniers termes.* Car ces produits contiennent nécessairement la lettre par rapport à laquelle on a ordonné, affectée d'un exposant plus grand ou plus petit qu'aucun autre produit partiel, et ne sauraient par conséquent être semblables à aucun d'eux.

21. *Le carré de la somme de deux quantités se compose : du carré de la première, plus le double produit de la première par la seconde, plus le carré de la seconde.* Car on a :

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2+2ab+b^2.$$

22. *Le carré de la différence de deux quantités se compose : du carré*

de la première, moins le double produit de la première par la seconde, plus le carré de la seconde. Car on a :

$$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2+2ab+.$$

23. *La somme de deux quantités multipliée par leur différence, donne pour produit, la différence des carrés de ces quantités.* Car on a :

$$(a+b)(a-b)=a^2+ab-ab-b^2=a^2-b^2.$$

24. Les notions précédentes suffisent souvent pour décomposer un polynome en facteurs. Par exemple, on a :

$$a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2$$
$$=a^4+b^4+c^4+2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2-4a^2b^2$$
$$=(a^2+b^2)^2+c^4-2c^2(a^2+b^2)-4a^2b^2=(a^2+b^2-c^2)^2-4a^2b^2=$$
$$\Big((a^2+b^2-c^2)-2ab\Big)\Big((a^2+b^2-c^2)+2ab\Big)=\Big((a-b)^2-c^2\Big)\Big((a+b)^2-c^2\Big)$$
$$=(a-b+c)\ (a-b-c)\ (a+b+c)\ (a+b-c).$$

DE LA DIVISION ALGÉBRIQUE.

25. Soit à diviser $45a^5b^3c^2$ par $5a^2b$; il s'agit de trouver un monome qui, multiplié par $5a^2b$, donne pour produit $45a^5b^3c^2$. Or, d'après la règle de la multiplication des monomes (**14**), le coefficient du quotient cherché doit être tel qu'en le multipliant par le coefficient du diviseur, on ait pour produit le coefficient du dividende. Ce coefficient cherché est donc le quotient de 45 par 5, c'est-à-dire 9. Maintenant, le quotient ne peut contenir d'autres lettres que celles du dividende, c'est-à-dire *a*, *b*, *c*; et l'exposant de chacune d'elles dans ce quotient doit être tel, qu'en y ajoutant l'exposant de la même lettre dans le diviseur, on ait pour somme l'exposant de cette lettre dans le dividende. Ce quotient est donc $9a^3b^2c^2$.

On voit que, *pour former le quotient de deux monomes, il faut : diviser le coefficient du dividende par celui du diviseur, écrire à la suite de ce quotient numérique toutes lettres du dividende, et affecter chacune d'un exposant égal à l'excès de celui qu'elle a dans le dividende sur celui qu'elle a dans le diviseur; les lettres du dividende, qui ne font point partie du diviseur, conservent au quotient l'exposant qu'elles ont au dividende.*

Ainsi on a $\frac{105a^7bc^4d^3}{21a^4c^2}=5a^3bc^2d^3$.

26. L'expression $\frac{a^3}{a^3}$ équivaut à l'unité : or, en appliquant la règle de la division des monomes, on trouve $\frac{a^3}{a^3}=a^0$. Le sym-

bole a^0 équivaut donc à l'unité. Toute expression de même forme, telle que $\frac{b^5}{b^5}$ ou $\frac{c}{c}$ conduirait de même aux symboles b^0 ou c^0 équivalents à l'unité ; on les emploie quelquefois pour conserver la trace d'une lettre qui disparaîtrait dans une division.

Ainsi, $\frac{15a^4b^2c^3d}{5ab^2c^2d} = 3\,a^3b^0cd^0 = 3a^3c \times 1 \times 1,$

ou simplement $3a^3c$.

27. Diviser deux polynomes l'un par l'autre, c'est chercher un troisième polynome qui, multiplié par le diviseur donne pour produit le dividende. Il suit par conséquent, de la règle des signes donnée pour la multiplication, que *le quotient de deux termes de même signe doit être pris avec le signe* $+$, et que *le quotient de deux termes de signe contraire doit être pris avec le signe* $-$ (**16**).

28. Soit maintenant à diviser $15a^5b+a^4b^2-7a^3b^3+54a^2b^4--18ab^5$ par $3a^2-4ab+6b^2$. Disposons l'opération comme pour la division des nombres :

$$\begin{array}{lllllll|l} & 15a^5b & +a^4b^2 & -7a^3b^3 & +54a^2b^4 & -18ab^5 & & 3a^2-4ab+6b^2 \\ & -15a^5b & +20a^4b^2 & -30a^3b^3 & & & & \overline{5a^3b+7a^2b^2-3ab^3} \\ \hline 1^{er}\text{ reste} & & +21a^4b^2 & -37a^3b^3 & +54a^2b^4 & -18ab^5 & & \\ & & -21a^4b^2 & +28a^3b^3 & -42a^2b^4 & & & \\ \hline 2^{e}\text{ reste} & & & -9a^3b^3 & +12a^2b^4 & -18ab^5 & & \\ & & & +9a^3b^3 & -12a_2b^4 & +18ab^5 & & \\ \hline 3^{e}\text{ reste} & & & & 0 & & & \end{array}$$

Les deux polynomes proposés étant ordonnés par rapport à une même lettre a, nous savons (**20**) que le produit du premier terme du diviseur par le terme du quotient qui contient la plus haute puissance de a a dû produire le premier terme du dividende. Si donc, nous divisons le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur, nous aurons le premier terme du quotient. Or, $15a^5b$ divisé par $3a^2$ donne pour quotient $5a^3b$ (**25**), ce monome est donc le premier terme du quotient cherché. Multiplions le diviseur par ce terme, et retranchons le produit du dividende, le *premier reste* ne contiendra plus que les produits du diviseur par les termes suivants du quotient. La question est donc ramenée à diviser ce premier reste par le diviseur : pour cela on est conduit, comme plus haut, à diviser son premier terme $+21a^4b^2$ par le premier terme du diviseur $3a^2$; on trouve ainsi pour second terme du quotient $+7a^2b^2$. Multiplions le diviseur par ce terme, et retranchons le produit du premier reste, nous obtiendrons un *second reste* qui ne contiendra plus que les produits du diviseur par

les termes suivants du quotient, et la question se trouvera ramenée à diviser ce second reste par le diviseur. Pour cela, divisons son premier terme $9a^3b^3$ par le premier terme du diviseur $-3a^2$; nous trouverons pour troisième terme du quotient $-3ab^3$. Multiplions le diviseur par ce terme et retranchons le produit du second reste, nous obtiendrons pour *troisième reste* 0, ce qui prouve que la division se fait exactement et que le quotient cherché est $5a^3b+7a^2b^2-3ab^3$. On pourrait, pour s'en assurer, multiplier le diviseur par le quotient, on trouverait pour produit le dividende.

29. On déduit du nº **25** que la division de deux monomes est impossible lorsque le coefficient du diviseur ne divise pas le coefficient du dividende, ou lorsque le diviseur contient des lettres qui ne sont pas au dividende, ou lorsque le diviseur contient une des lettres du dividende affectée d'un exposant plus élevé que celui qu'elle a au dividende.

Dans la division de deux polynomes, lorsque le premier terme du diviseur ne divise pas le premier terme du dividende (ordonné par rapport à la même lettre que le diviseur) ou le premier terme de l'un des restes successifs, la division est impossible.

30. Il peut arriver que l'un des polynomes ou chacun d'eux renferme plusieurs termes affectés d'une même puissance de la lettre par rapport à laquelle on a ordonné. Par exemple, les termes $+16a^3b^2-12a^3cd+4a^3bd$. On pourrait réunir ces termes sous la forme $(+16b^2-12cd+4bd)a^3$; mais il est plus commode de les écrire verticalement comme il suit :

$$\left.\begin{array}{r} +16b^2 \\ -12\,cd \\ +\;4\,bd \end{array}\right| a^3$$

Si, dans le dividende et dans le diviseur, le facteur qui multiplie la plus haute puissance de la lettre par rapport à laquelle on a ordonné, est polynome, la division de deux monomes se trouve remplacée par une division de polynomes; mais cette circonstance ne change pas la marche de l'opération.

31. Si l'on a pour dividende un polynome tel que Pa^3+Qa^2+Ra+S dans lequel P, Q, R, S peuvent être être polynomes, et pour diviseur un monome ou un polynome quelconque D, *indépendant* de a, c'est-à-dire qui ne contienne pas cette lettre, le quotient renfermera nécessairement les mêmes puissances de a que le dividende, et sera de la forme $P'a^3+Q'a^2+R'a+S'$, et l'on aura :

$$Pa^3+Qa^2+Ra+S=(P'a^3+Q'a^2+R'a+S')D=P'Da^3+Q'Da^2+R'Da+S'D.$$

Et comme les divers produits partiels $P'Da^3$, $Q'Da^2$, etc., ne peu-

vent éprouver entre eux aucune réduction puisqu'ils contiennent des puissances différentes de a, il faut qu'on ait séparément :

$$Pa^3 = P'Da^3 \quad Qa^2 = Q'Da^2 \quad Ra = R'Da \quad S = S'D,$$

ou $$P = P'D \quad Q = Q'D \quad R = R'D \quad S = S'D.$$

Ainsi, D divise chacune des quantités P, Q, R, S. Ces quantités se nomment par analogie les *coefficients* de la lettre qu'elles multiplient, et l'on dit que *lorsque le diviseur est indépendant d'une des lettres du dividende, il faut qu'il divise séparément tous les coefficients des diverses puissances de cette lettre.*

32. Soit à diviser $a^m - b^m$ par $a-b$. On trouve pour premier terme du quotient a^{m-1} et pour premier reste $+a^{m-1}b - b^m$ qu'on peut écrire $+b(a^{m-1} - b^{m-1})$; en sorte que si $a-b$ divise $a^{m-1} - b^{m-1}$, il divisera nécessairement $a^m - b^m$. Or, $a-b$ divise $a^2 - b^2$ (**23**), donc, il divise aussi $a^3 - b^3$, donc, il divise aussi $a^4 - b^4$, et ainsi de suite ; en sorte que $a^m - b^m$ est divisible par $a-b$, quel que soit le degré m.

Le quotient est $a^{m-1} + a^{m-2}a^{m-3}b + b^2 +$, etc...$+ a^2b^{m-3} + ab^{m-2} + b^{m-1}$.

Des fractions algébriques.

33. Lorsqu'une division algébrique ne peut s'effectuer, on l'indique sous la forme d'une fraction ordinaire ; c'est ce qu'on nomme une *fraction algébrique*. On doit attacher aux fractions algébriques le même sens qu'aux fractions ordinaires, et les quatre opérations fondamentales s'opèrent sur les unes de la même manière que sur les autres, en ayant égard aux règles données précédemment pour le calcul des quantités algébriques.

34. D'après les règles données ponr la division des monomes, on reconnaît à la seule inspection si les denx termes d'une fraction monome ont des facteurs communs, et quels sont ces facteurs. Ainsi, l'on voit sur-le-champ que la fraction $\frac{14\,a^4cd^2}{21\,a^3bd^3}$ se réduit à $\frac{2\,ac}{3\,bd}$ en divisant ses deux termes par $7a\,d^2$.

A l'aide des observations faites aux n^{os} **21**, **22**, **23**, **32**, on reconnaît souvent les facteurs communs aux deux termes d'une fraction polynome ; ainsi on voit que

$$\frac{6a^4-6a^2b^2}{11a^5-22a^4b+11a^3b^2} = \frac{6a^2(a^2-b^2)}{11a^3(a^2-2ab+b^2)} = \frac{6a^2(a+b)(a-b)}{11a^3(a-b)(a-b)} = \frac{6\,(a+b)}{11a(a-b)}.$$

Lorsque les termes de la fraction sont des polynomes compliqués, il faut avoir recours à la recherche du plus grand commun diviseur.

DU PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR ALGÉBRIQUE.

35. *Le plus grand commun diviseur* de deux polynomes est le polynome du degré le plus élevé qui puisse les diviser tous deux, et en même temps celui qui a les coefficients les plus grands.

Deux polynomes sont dits *premiers entre eux* lorsqu'ils n'ont aucun diviseur commun.

36. *Si l'on divise deux polynomes* A, B, *par leur plus grand commun diviseur* D, *les quotients* Q, Q', *sont premiers entre eux*. Car si l'on avait $Q=qd$ et $Q'=q'd$; comme on a $A=QD$ et $A'=Q'D$, on aurait $A=qdD$ et $B=q'dD$. Les polynomes A et B auraient donc pour diviseur commun le produit dD, nécessairement plus grand que D, soit sous le rapport du degré, soit sous le rapport des coefficients, ce qui est contraire à la définition de D (35).

37. *Tout diviseur* D *d'un polynome* A *divise le produit de* A *par un facteur quelconque* B. Car si l'on a $A=Dq$, on aura $AB=DqB$, produit qui est nécessairement divisible par D.

38. *Tout polynome* D *qui divise le produit d'un polynome* A *par un facteur quelconque* B, *et qui est premier avec* B, *divise nécessairement* A. En effet, admettons que D et A soient ordonnés par rapport à une même lettre a; 1° supposons d'abord que B soit indépendant de a; divisons A par D, soit q le quotient et R le reste, d'un degré évidemment inférieur à D, nous aurons $A=qD+R$, d'où $BA=BqD+BR$, ou $BA-BqD=BR$. Or, puisque, par hypothèse D divise BA, la quantité $BA-BqD$ est divisible par D; il doit donc en être de même de BR. Mais R étant d'un degré inférieur à D, le produit de R par un facteur indépendant de a, reste d'un degré inférieur à D, et ne saurait être divisible par D. Il faut donc que R soit nul, c'est-à-dire que A soit divisible par D.

2° Supposons maintenant que B soit un polynome quelconque, premier avec D, et ordonné comme lui par rapport à une même lettre a. Appliquons à B et D le procédé de la recherche du plus grand commun diviseur arithmétique. Soient R, R', R'', etc., les restes successifs, q, q', q'', etc., les quotients successifs, on aura $B=qD+R$, d'où $AB=AqD+RA$, ou $AB-AqD=RA$; or, la quantité $AB-AqD$ est divisible par D, donc, RA est divisible par D. On aura de même $D=q'R+R'$, d'où $DA-q'RA=R'A$; la quantité $DA-q'RA$ étant divisible par D, il s'ensuit que R'A est divisible par D. Mais si $R^{(n)}$ est le dernier reste, on prouverait de même que $R^{(n)}A$ est divisible par D. Or, d'après la nature même des opérations, le dernier reste $R^{(n)}$ est indépendant de a; donc, d'après 1°, D doit diviser A.

39. *Tout polynome* A, *qui est premier avec le produit de deux polynomes* B *et* C, *est premier avec chacun d'eux*. Car si l'on avait, par

exemple, $A=qd$ et $B=q'd$, on aurait $CB=Cq'd$, et le diviseur d serait commun à A et à BC.

40. Il résulte du numéro précédent que *si deux polynomes* A *et* B *sont premiers entre eux, tout diviseur de l'un est premier avec l'autre.* Car si l'on a, par exemple, $A=qd$, puisque B est premier avec A, il est premier avec q et avec d.

41. *Si* D *est le plus grand commun diviseur entre deux polynomes* A *et* B, *il est aussi le plus grand commun diviseur entre* A *et* BK, K *étant un facteur quelconque premier avec* A. Car, puisque A et K sont premiers entre eux, tout diviseur de A est premier avec K (40); par conséquent tout diviseur, commun à A et à BK doit diviser B (38). Donc, le plus grand commun diviseur entre A et B est aussi le plus grand commun diviseur entre A et BK.

42. Il suit de là que *l'on peut, sans changer le plus grand commun diviseur de deux polynomes, multiplier* ou *diviser chacun d'eux par un facteur premier avec l'autre.*

43. Appliquons à deux polynomes A et B le procédé donné en arithmétique pour la recherche du plus grand commun diviseur; appelons R, R', R'' les restes successifs, Q, Q', Q'' les quotients successifs; et soit D un dernier reste, qui divise exactement le reste précédent, R'' par exemple. On aura :

$$A=BQ+R,\quad B=Q'R+R',\quad R=Q''R'+R'',\quad R'=Q'''R''+D,\quad R''=Q^{\text{iv}}D.$$

La dernière égalité nous apprend que D divise R''. Puisque D divise R'', et se divise d'ailleurs lui-même, la quantité $Q'''R''+D$ est divisible par D (37); donc, d'après l'avant-dernière égalité, D divise R'. Puisque D divise R'' et R', la quantité $Q''R'+R''$ est divisible par D; donc, d'après la troisième égalité, D divise R. En continuant ainsi, on démontrerait que D divise B et A.

Mais les égalités ci-dessus donnent :

$$A-BQ=R,\quad B-Q'R=R',\quad R-Q''R'=R'',\quad R'-Q'''R''=D.$$

Soit d un diviseur commun à A et à B, la quantité $A-BQ$ sera divisible par d; donc, d divise R. Puisque d divise B et R, la quantité $B-Q'R$ est divisible par d; donc, d divise R'. En continuant ainsi, on démontrerait que d divise D.

Donc, tout diviseur commun à A et à B divise D; et d'ailleurs D divise A et B; donc, D est le plus grand commun diviseur entre A et B.

44. Nous venons de voir que tout diviseur commun à deux polynomes divise leur plus grand commun diviseur. Le plus grand commun diviseur de deux polynomes, ordonnés par rapport à une même lettre a, renferme, en général, trois facteurs distincts : 1° un facteur monome δ, qui est le plus grand commun diviseur entre tous les termes des deux polynomes; 2° un facteur polynome

d indépendant de a, qui est le plus grand commun diviseur entre tous les facteurs polynomes qui multiplient les diverses puissances de a dans les polynomes proposés ; 3° un facteur polynome D, affecté de diverses puissances de a. En sorte que le plus grand commun diviseur entre les deux polynomes proposés est δdD.

45. Appliqnons les remarques précédentes à la recherche du plus grand commun diviseur entre les deux polynomes

$$50a^4bc-55a^3b^2c+35a^2b^3c-20ab^4c+5b^5c \text{ et } 30a^5b+25a^4b^2-40a^3b^3+10a^2b^4.$$

On reconnaît facilement que tous les termes de ces deux polynomes sont divisibles par $5b$; ce monome entrera donc comme facteur dans le plus grand commun diviseur cherché (**44**). De plus, le premier polynome contient un facteur c qui est premier avec le second, et le second un facteur a^2 qui est premier avec le premier ; on peut donc les supprimer (**42**), et il reste à opérer sur

$$10a^4-11a^3b+7a^2b^2-4ab^3+b^4 \text{ et } 6a^3+5a^2b-8ab^2+2b^3.$$

Divisons donc le premier par le second ; et, pour rendre la division possible, multiplions le dividende par le facteur 3 qui est premier avec le diviseur

$$\begin{array}{l|l}
30a^4-33a^3b+21a^2b^2-12ab^3+3ab & 6a^3+5a^2b-8ab^2+2b^3 \\
\underline{-30a^4-25a^3b+40a^2b^2-10ab^2} & \overline{+5a-29} \\
\quad -58a^3b+61a^2b^2-22ab^3+3b^4 & \\
\quad -174a^3+183a^2b-66ab^2+9b^3 & \\
\quad \underline{+174a^3+145a^2b-232ab^2+58b^3} & \\
\qquad +328a^2b-298ab^2+67b^3 \text{ (premier reste).} &
\end{array}$$

On obtient $+5a$ pour premier terme du quotient, et en retranchant du dividende le produit du diviseur par ce terme, il reste :

$$-58a^3b+61a^2b^2-22a^3b+3b^4$$

Pour continuer la division, supprimons le facteur b commun à tous les termes de ce dividende partiel, et qui est premier avec le diviseur, et multiplions le dividende partiel par le facteur 3, premier avec le diviseur. On obtient -29 pour second terme du quotient, et en retranchant du dividende partiel le produit du diviseur par ce second terme, on trouve :

$$+328a^2b - 298ab^2 + 67b \quad \text{pour } \textit{premier reste} \text{ de l'opération.}$$

Divisons $6a^3 + 5ab - 8ab^2 + 2b^2$ par ce premier reste, dans lequel nous pouvons supprimer le facteur b, qui est premier avec le dividende, et, pour rendre la division possible, multiplions le

dividende par le facteur 328, premier avec le nouveau diviseur :

$$
\begin{array}{l|l}
1968a^3+1640a^2b-2624ab^2+656b^3 & 328a^2-298ab+67b^2 \\
-1968a^3+1788a^2b-\ 402ab^2 & +6a+1714 \\
\hline
\qquad +3428a^2b-3026ab^2+656b^3 & \\
\qquad +1714a^2-1513ab+328b^2 & \\
\qquad +562192a^2-496264ab+107584b^2 & \\
\qquad -562192a^2+510772ab-114838b^2 & \\
\hline
\qquad\qquad +14508ab-7254b^2 & \text{(second reste.)}
\end{array}
$$

On obtient pour premier terme du quotient + 6a, et en retranchant du dividende le produit du diviseur par ce terme, il reste

$$+ 3428a^2b - 3026ab^2 + 656b^3.$$

Pour continuer la division, supprimons dans ce dividende partiel le facteur $2b$, commun à tous ses termes, et premier avec le diviseur, et multiplions le par le nombre 328 qui est premier avec le diviseur. On obtient ainsi + 1714 pour second terme du quotient, et, en retranchant du dividende partiel le produit du diviseur par ce second terme, on trouve :

$+ 14508ab - 7254b^2$ pour *second reste* de l'opération.

Divisons $328a^2 - 298ab + 67b^2$ par ce second reste, dans lequel on peut supprimer le facteur $7254b$, commun à tous ses termes.

$$
\begin{array}{l|l}
+328a^2-298ab+67b^2 & 2a-b \\
-328a^2+164ab & +164a-1 \\
\hline
\qquad -134ab+67b^2 & \\
\qquad\quad -2a+b & \\
\qquad\quad +2a-b & \\
\hline
\qquad\qquad 0 & \text{(dernier reste.)}
\end{array}
$$

En opérant comme précédemment, on trouve 0 pour *dernier reste* de l'opération. Le plus grand commun diviseur entre les deux polynomes proposés est donc $2a - b$, multiplié par le facteur monome $5b$, c'est-à-dire $10ab - 5b^2$.

46. Comme dans les restes successifs que l'on obtient par ce procédé l'exposant de la lettre par rapport à laquelle on a ordonné diminue de plus en plus, si les deux polynomes proposés étaient premiers entre eux, aucun reste ne divisant le reste précédent, on arriverait nécessairement à un dernier reste indépendant de cette lettre.

DES ÉQUATIONS.

47. La résolution d'un problème se compose toujours de deux parties: dans la première, on exprime, à l'aide des signes algébriques, les relations que l'énoncé du problème établit entre la quantité inconnue, représentée par une lettre (ordinairement x, y ou z) et les quantités connues, représentées par des nombres ou par des lettres : on arrive ainsi à une expression d'égalité entre deux quantités. Cette expression est ce qu'on nomme une *équation*. Dans la seconde partie, on fait subir à cette équation les transformations nécessaires pour en tirer la valeur de l'inconnue. Trouver l'équation que fournissent les conditions du problème, est ce qu'on nomme *mettre le problème en équation*; et tirer de l'équation la valeur de l'inconnue est ce qui s'appelle *résoudre l'équation*.

Les problèmes où il y a plusieurs inconnues fournissent ordinairement plusieurs équations.

48. L'ensemble des quantités qui précèdent le signe $=$ forme le *premier membre* d'une équation ; l'ensemble de celles qui suivent ce signe forme le *second membre*.

On appelle équation *identique* toute équation telle qu'en effectuant les opérations indiquées, les deux membres deviennent identiquement les mêmes. Ainsi, $(a-b)^2 = a^2 - 2\,ab - b^2$ est une équation identique.

On appelle *numériques* les équations où l'inconnue seule est représentée par une lettre, et *littérales* celles où une ou plusieurs quantités regardées comme connues, sont également représentées par des lettres.

On appelle équations du *premier*, du *second*, du *troisième* degré, etc., celles où l'inconnue n'entre qu'à la première, à la seconde, à la troisième puissance, etc.

49. On peut dire que résoudre une équation c'est trouver une quantité qui, mise à la place de l'inconnue, rende cette équation identique.

Équations du premier degré à une seule inconnue

50. Il est évident qu'on peut faire subir à une équation toutes les transformations qui ne troublent pas l'égalité des deux membres. Ainsi, on peut leur ajouter ou en retrancher une même quantité, les multiplier ou les diviser par une même quantité, etc.

Soit à résoudre l'équation du premier degré

$$\frac{2a(x+a)}{b^2} - \frac{(a+2)a^2}{5b} = \frac{abx}{a-2} + \frac{a^2}{bc}$$

On devra :

1° *Faire disparaître les dénominateurs;* pour cela, il faut réduire tous les termes au plus petit dénominateur commun, d'après les

règles données en arithmétique, et en se conformant à celles qui ont été établies pour le calcul des quantités algébriques.

On trouvera que ce plus petit dénominateur commun est $5b^2c(a-2)$; l'équation proposée deviendra :

$$\frac{5ac(a-2)(x+a)}{5b^2c(a-2)}-\frac{a^2bc(a-2)(a+2)}{5b^2c(a-2)}=\frac{5ab^3cx}{5b^2c(a-2)}+\frac{5a^2b(a-2)}{5b^2c(a-2)}.$$

On pourra alors multiplier les deux membres par le dénominateur commun, ce qui revient à supprimer ce dénominateur, et on aura :

$$5ac(a-2)(x+a)-a^2bc(a-2)(a+2)=5ab^3cx+5a^2b(a-2).$$

2° *Effectuer les opérations indiquées*, ce qui donnera :

$$5a^2cx-10acx+5a^3c-10a^2c-a^4bc+4a^2bc=5ab^3cx+5a^3b-10a^2b.$$

3° *Faire passer dans un membre tous les termes qui contiennent x, et dans l'autre tous ceux qui ne le contiennent pas*. Pour cela, on remarque que si, dans un membre d'une équation quelconque, on supprime un terme positif, tel que $+K$, on diminue ce membre de la valeur de K; pour conserver l'égalité, il faut donc, dans l'autre membre, écrire $-K$. Si au contraire on supprime dans un membre un terme négatif, tel que $-K$, on supprime la soustraction de la quantité K, on augmente donc de fait ce membre de la quantité K, et, pour conserver l'égalité, il faut écrire $+K$ dans l'autre membre. En sorte qu'*un terme quelconque passe d'un membre dans l'autre en changeant simplement de signe*. D'après cela, l'équation précédente pourra s'écrire

$$5a^2cx-10acx-5ab^3cx=5a^3b-10a^2b-5a^3c+10a^2c+a^4bc-4a^2bc.$$

4° *Opérer*, s'il y a lieu, *la réduction des termes semblables*.

5° *Mettre l'inconnue en facteur commun*, dans le membre où elle se trouve, c'est-à-dire transformer ce membre en un produit dont l'inconnue soit un des deux facteurs ; on aura ainsi :

$$(5a^2c-10ac-5ab^3c)x=5a^3b-10a^2b-5a^3c+10a^2+ca^4bc-4a^2bc,$$

6° *Diviser les deux membres par le facteur qui multiplie l'inconnue*, on aura :

$$x=\frac{5a^3b-10a^2b-5a^3c+10a^2c+a^4bc-4a^2bc}{5a^2c-10ac-5ab^3c}.$$

7° *Réduire la valeur de l'inconnue à sa plus simple expression*, s'il y a lieu.

Équations du premier degré à deux inconnues.

51. Les problèmes qui offrent deux inconnues fournissent généralement deux équations. Toute équation du premier degré à

deux inconnues peut être réduite à la forme $ax+by=c$, dans laquelle a, b, c peuvent être des polynomes. Soit $a'x+b'y=c'$ une seconde équation entre les mêmes inconnues; pour ramener la question à la résolution d'une équation du premier degré à une seule inconnue, on peut tirer de l'une des équations la valeur de y par exemple, et substituer cette valeur à la place de y dans l'autre équation qui ne contiendra plus que x et des quantités connues; c'est ce qu'on appelle *éliminer* l'une des inconnues.

Le moyen d'élimination le plus simple consiste à multiplier les deux membres de chaque équation par le coefficient qu'a dans l'autre l'inconnue que l'on veut éliminer, et à soustraire ensuite les deux équations l'une de l'autre. Si, par exemple, on multiplie la première des deux équations ci-dessus par b' et la seconde par b, elles deviendront $ab'x+bb'y=b'c$

et $a'bx+bb'y=bc'$;

et en les retranchant, membre à membre, il viendra

$$ab'x-a'bx=b'c-bc' \qquad \text{d'où } x=\frac{b'c-bc'}{ab'-a'b}:$$

En opérant pour y d'une manière analogue, on trouverait :

$$y=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}.$$

52. Ces valeurs générales de x et de y sont des formules qui peuvent servir à résoudre tous les cas particuliers. Si, par exemple, on avait à résoudre les deux équations $3x+5y=30$, et $2x+7y=31$, on aurait: $a=3$, $b=5$, $c=30$, $a'=2$, $b'=7$, $c'=31$; par conséquent

$$x=\frac{7\times30-5\times31}{3\times7-5\times2}=\frac{210-155}{21-10}=\frac{55}{11}=5$$

et $$y=\frac{3\times31-2\times30}{3\times7-5\times2}=\frac{93-60}{21-10}=\frac{33}{11}=3.$$

En mettant pour x et y ces valeurs dans les équations proposées, on trouve en effet $3\times5+5\times3=30$ et $2\times5+7\times3=31$. C'est ce qu'on exprime en disant que les valeurs trouvées pour x et pour y *vérifient* les équations proposées.

53. On arriverait plus promptement à ces valeurs en opérant directement sur les équations proposées comme nous avons opéré (51) sur les équations générales.

Si l'une des inconnues avait le même coefficient dans les deux équations, on en opérerait immédiatement l'élimination, en retranchant ces équations membre à membre.

Si les coefficients d'une même inconnue étaient de signe contraire dans les deux équations, pour éliminer cette inconnue il faudrait ajouter les équations membre à membre, après avoir multiplié chacune par le coefficient de cette inconnue dans l'autre.

Ainsi, les équations $4x - 3y = 3$, et $x + 2y = 20$, deviendraient $8x - 6y = 6$, et $3x + 6y = 60$; et en les ajoutant membre à membre, on aurait $8x + 3x = 6 + 60$, ou $11x = 66$, ou $x = \frac{66}{11} = 6$.

En mettant ensuite pour x cette valeur dans l'une des équations proposées, par exemple, dans la seconde, on aurait $6 + 2y = 20$; d'où

$$2y = 20 - 6 = 14, \text{ et } y = \tfrac{14}{2} = 7.$$

Équations du premier degré à trois inconnues.

54. Soient à résoudre les trois équations :

$$ax + by + cz = d$$
$$a'x + b'y + c'z = d'$$
$$a''x + b''y + c''z = d''$$

Éliminons z entre la première et la seconde, d'après le procédé indiqué au nº 51, nous aurons :

$$(ac' - a'c)\,x + (bc' - b'c)\,y = dc' - d'c$$

Éliminons de même z entre la seconde et la troisième, nous aurons :

$$(a'c'' - a''c')\,x + (b'c'' - b''c')\,y = d'c'' - d''c'.$$

Éliminons maintenant y entre ces deux dernières équations, il viendra :

$$\big((ac'-a'c)(b'c''-b''c')-(a'c''-a''c')(bc'-b'c)\big)\,x$$
$$=(dc'-d'c)(b'c''-b''c')-(d'c''-d''c)(bc'-b'c).$$

Si l'on effectue les opérations indiquées, que l'on réduise et qu'on divise les deux membres par c', il restera :

$$\left(ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''\right)x$$
$$= db'c''-dc'b''+cd'b''-bd'c''+bc'd''-cb'd''$$

d'où $$x = \frac{db'c'' - dc'b'' + cd'b'' - bd'c'' + bc'd'' - cb'd''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'd'' - cb'd''}$$

Remarquons que, pour former le dénominateur de cette expression, il suffit d'écrire d'abord $ab - ab + ab - ba + ba - ba$, d'introduire ensuite tour à tour la lettre c à la troisième, à la seconde, et à la première place, ce qui donne $abc - acb + cab - bac + bca - cba$, et de mettre un accent à la lettre qui occupe le milieu de chaque terme, et deux accents à celle qui en occupe la droite. Pour former le numérateur, il suffit de remplacer dans le dénominateur la lettre a qui représente les coefficients de x par la lettre d qui représente les termes connus.

On obtient de même les valeurs de y et de z; elles ont le même dénominateur que celle de x; pour former le numérateur de y, il

faut, dans le dénominateur commun, remplacer la lettre b qui représente les coefficients de y par la lettre d qui représente les termes connus ; de même, pour obtenir le numérateur de z, il faut remplacer, dans le dénominateur commun, la lettre c par la lettre d.

Par des procédés analogues aux précédents, on résoudrait 4 équations à 4 inconnues, et ainsi de suite.

Des quantités négatives.

55. Proposons-nous, *connaissant une somme* a, *composée de deux parties, et l'une de ces parties* b, *de trouver l'autre partie* x, nous aurons $b+x=a$, d'où $x=a-b$, et cette formule répondra à tous les cas particuliers. Or, si l'on fait $a=7$ et $b=10$, nous aurons $x=7-10$, ou $x=7-7-3$, ou, enfin, $x=-3$, valeur dite *négative*.

Pour interpréter cette valeur, observons que les suppositions faites pour a et b ne sauraient s'accorder avec l'idée d'ajouter un nombre à b pour produire a ; mais que, si l'on se propose, au contraire, de chercher quel nombre il faudrait retrancher de b pour produire a, ces suppositions s'accorderont avec la question ; car l'on aura $10-x=7$; d'où $10-7=x$ ou $x=3$. La valeur négative -3 indique donc un changement à faire dans l'énoncé pour justifier les suppositions faites pour a et b, et ce nouveau problème conduit à une équation qui ne diffère de la première que par le signe du terme en x.

Ceci est général ; toute équation du premier degré à une seule inconnue x, qui donne pour x une valeur négative, est nécessairement de la forme $x=a-b$, ou $b+x=a$; et si l'on fait dans l'énoncé du problème les changements convenables, on obtiendra une équation $b-x=a$, qui ne diffèrera de la première que par le signe du terme en x, et qui donnera pour x une valeur positive dont la grandeur absolue sera la même que celle de la valeur négative en question.

56. L'usage du calcul algébrique et le besoin d'en généraliser les résultats ont fait étendre aux quantités monomes les règles des signes établis pour les différents termes des quantités polynomes.

Ainsi, $+a+(-b)$, ou $+a-b$, est une *somme* algébrique (**10**); de même $+a-(-b)$, ou $+a+b$, est une *différence* algébrique (**12**). Pour la multiplication, on aura de même :

$$+a\times+b=+ab,\ +a\times-b=-ab,\ -a\times+b=-ab,\ -a\times-b=+ab \quad (\mathbf{16}).$$

Et de même encore pour la division :

$$\frac{+a}{+b}=+\frac{a}{b},\ \frac{+a}{-b}=-\frac{a}{b},\ \frac{-a}{+b}=-\frac{a}{b},\ \frac{-a}{-b}=+\frac{a}{b} \quad (\mathbf{27}).$$

57. Le premier avantage de ces conventions est de faire voir que les valeurs négatives vérifient les équations qui les ont fournies. Ainsi, l'équation $10 + x = 7$, qui a donné pour x la valeur -3, est vérifiée par cette valeur, car on a : $10 + (-3) = 7$, ou $10 - 3 = 7$.

De même, l'équation $20 - x + \frac{3x}{5} = 86 + 4x$, qui donne $22x = -330$, ou $x = -15$, est satisfaite par cette valeur, car on a : $20 - (-15) + \frac{3 \times -15}{5} = 86 + 4 \times -15$,
ou $20 + 15 - 9 = 86 - 60$,
ou $35 - 9 = 86 - 60$, ou $26 = 26$.

57. *On considère les quantités négatives comme plus petites que* 0, *et d'autant plus petites que leur valeur absolue est plus grande.* Car, si d'un nombre quelconque, 4 par exemple, on retranche successivement 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, etc., on aura, pour différences, $4-1$, $4-2$, $4-3$, $4-4$, $4-5$, $4-6$, $4-7$, etc., ou 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, etc.

Les premières allant toujours en diminuant, on est conduit par analogie à regarder les suivantes comme allant également en diminuant.

58. Il suit de là que, si l'on a $a > b$, on aura $-a < -b$; ce qui permet d'appliquer aux inégalités les transpositions de termes dont on fait usage pour les équations.

Des valeurs infinies et indéterminées.

59. Soit l'équation $ax = bx + c$; d'où $x = \frac{c}{a-b}$, si l'on y fait $a = b$, il vient $x = \frac{c}{0}$. Pour interpréter cette valeur, remarquons que plus la différence $a-b$ diminue, plus la valeur $\frac{c}{a-b}$ augmente : c'est pour cette raison que lorsque le dénominateur $a-b$ est nul, la valeur $\frac{c}{0}$ est dite *infinie*. Toute quantité de la forme $\frac{c}{0}$ est le *symbole* l'infini; on le représente aussi par le signe ∞.

Ce symbole indique nécessairement une absurdité dans l'énoncé, si toutefois on demande pour l'inconnue une valeur finie ; car il n'y a aucune quantité finie pour laquelle on puisse avoir $ax = ax + c$.

Mais la valeur infinie $\frac{c}{0}$ vérifie l'équation qui l'a fournie, en ce sens que l'équation proposée donnant $a - b = \frac{c}{x}$, plus on prendra x grand, et plus le second membre de cette équation approchera d'être égal au premier qui est supposé nul.

60. Si, en même temps que $a-b$ est nul, c l'était aussi, on aurait $x=\frac{0}{0}$. Or, dans ce cas, l'équation se réduirait à $ax=ax$ équation qui est vérifiée par telle valeur de x que l'on voudra; voilà pourquoi l'expression $\frac{0}{0}$ est regardée comme le symbole d'une indétermination, et dite valeur *indéterminée.*

61. On arrive quelquefois à une valeur $\frac{0}{0}$ sans que, pour cela il y ait indétermination dans la question : cela tient à un facteur, commun aux deux termes de la valeur de l'inconnue, et qui s'évanouit dans certaines suppositions. Si, par exemple, on avait $x=\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$, cette valeur se réduirait à $\frac{0}{0}$ pour $a=b$. Mais si l'on supprime le facteur $a-b$ commun aux deux termes de cette expression, elle devient $x=\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$ valeur qui, pour $a=b$, se réduit à $x=\frac{3a^2}{2a}=\frac{3}{2}a$.

Il est donc important de supprimer les facteurs qui peuvent être communs au numérateur et au dénominateur de la valeur de l'inconnue.

62. Appliquons ces observations aux valeurs de x et de y trouvées dans le n° **51**, $x=\frac{b'c-bc'}{ab'-a'b}$ et $y=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}$

Si l'on suppose $ab'=a'b$ ces valeurs deviennent infinies. Or, si nous reprenons les équations $ax+by=c$ et $a'x+b'y=c'$ et que dans la seconde nous mettions pour a' sa valeur $\frac{ab'}{b}$ tirée de la relation ci-dessus, cette équation deviendra $\frac{ab'x}{b}+b'y=c'$ ou $ax+by=\frac{cb}{b}$ équation incompatible avec $ax+by=c$. Les valeurs infinies répondent donc à une incompatibilité des équations qui les ont fournies.

63. Si en même temps on avait aussi $b'c=bc'$, on aurait $x=\frac{0}{0}$; et, en effet, cette relation donne $\frac{c'b}{b'}=b$; ainsi, les deux équations $ax+by=c$ et $ax+by=\frac{c'b}{b'}$ n'en font qu'une. Il y a donc alors insuffisance dans les équations, et de là l'indétermination.

Dans ce cas, on a aussi $y=\frac{0}{0}$, car si l'on multiplie membre à membre les deux relations $a'b=ab'$ et $cb'=bc'$ on trouve $a'cbb'=ac'bb'$ ou $a'c=ac'$.

Analyse indéterminée du premier degré.

64. Si un problème fournit plus d'équations distinctes que

d'inconnues, par exemple, 4 équations à 3 inconnues, on peut de 3 de ces équations tirer les valeurs des inconnues et les substituer dans la quatrième qui devient une *équation de condition.*

Si, au contraire, un problème fournit moins d'équations que d'inconnues, par exemple, 4 équations à 5 inconnues, on peut de trois de ces équations tirer les valeurs de 3 inconnues et les substituer dans la quatrième équation qui ne contiendra plus que deux inconnues.

Résoudre une équation à deux inconnues, c'est trouver tous les systèmes de valeurs *entières* qui peuvent la vérifier.

65. Remarquons d'abord que si dans l'équation $ax + by = c$, a et b ont un facteur commun qui ne divise pas c, aucun système de valeurs entières ne pourra vérifier l'équation ; car si on avait $a = a'd$ et $b = b'd$, on aurait $a'dx + b'dy = c$ d'où $a'x + b'y = \frac{c}{d}$, équation dont le premier membre serait entier et le second fractionnaire. Il faut donc que l'on ait $c = c'd$, et l'équation se réduit à $a'x + b'y = c'$, où a' et b' sont premiers entre eux.

66. Soit maintenant à résoudre l'équation $17x + 23y = 280$, d'où $x = \frac{280-23y}{17} = 16 - y + \frac{8-6y}{17}$. Posons $\frac{8-6y}{17} = z$, nous aurons [1] $x = 16 - y + z$, et $17z + 6y = 8$.

De la seconde équation, on tire $y = \frac{8-17z}{6} = 1 - 2z + \frac{2-5z}{6}$.

Posons $\frac{2-5z}{6} = u$, nous aurons [2] $\cdot\cdot\; y = 1 - 2z + u$,

et $6u + 5z = 2$, d'où $z = \frac{2-6u}{5} = -u + \frac{2-u}{5}$.

Posons $\frac{2-u}{5} = t$, nous aurons [3] $\cdot\cdot\; z = -u + t$ et $5t + u = 2$, d'où [4] $u = 2 - 5t$. L'équation [3] devient donc $z = -2 + 5t + t$ ou $z = 6t - 2$; l'équation [2] devient $y = 1 + 4 - 12t + 2 - 5t$, ou $y = 7 - 17t$; et l'équation [1] devient $x = 16 - 7 + 17t + 6t - 2$ ou $x = 7 + 23t$.

On n'aura plus qu'à donner à t des valeurs entières, pour avoir des systèmes de valeurs entières pour x et y. Ainsi $t = 0$ donne $x = 7$ et $y = 7$; de même $t = 1$ donne $x = 30$ et $y = 10$, etc.

En opérant d'une manière analogue sur une équation quelconque $ax + by = c$, où a et b sont premiers entre eux, on parvient toujours à une équation de même espèce, telle que $u + mt = n$, où l'une des inconnues a pour coefficient l'unité; on en tire $u = n - mt$, et il devient facile, en remontant des dernières relations aux premières, d'exprimer x et y en fonctions entières de t. On n'a plus alors qu'à donner à t des valeurs entières.

ALGÈBRE.

SECONDE PARTIE.

(Cette seconde partie n'est point exigée des candidats au baccalauréat ès-sciences physiques.)

EXTRACTION DE LA RACINE CARRÉE DES QUANTITÉS ALGÉBRIQUES.

67. Soit ka^mbc^p un monome où k représente un coefficient numérique, on a généralement :

$$(ka^mb^nc^p)^2 = ka^mb^nc^pka^mb^nc^p = k^2a^{2m}b^{2n}c^{2p}.$$

Un monome ne peut donc être un carré parfait qu'autant que son coefficient est un carré parfait et que ses exposants sont pairs. Pour extraire la racine carrée d'un monome, il suffit d'extraire la racine carrée du coefficient et de diviser tous les exposants par 2. Ainsi, on a : $\sqrt{81\,a^4\,b^6\,c^2} = 9\,a^2\,b^3\,c.$

Quand un monome n'est pas un carré parfait, sa racine carrée est *irrationnelle.*

68. *La racine carrée d'un produit est égale au produit de la racine carrée de ses facteurs.* Car on a :

$$(\sqrt{abc})^2 = abc\text{, et } (\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c})^2 = (\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2(\sqrt{c})^2 = abc.$$

On se sert de cette observation pour simplifier un monome irrationnel. Ainsi, on a :

$$\sqrt{162a^5b^6c^3} = \sqrt{81a^4b^6c^2 \times 2ac} = \sqrt{81a^4b^6c^2}\,\sqrt{2ac} = 9a^2b^3c\sqrt{2ac}.$$

Le signe $\sqrt{}$ est un *radical*, et la quantité qui le multiplie se nomme le coefficient de ce radical.

69. On a généralement : $+a \times + a = + a^2$, et $-a \times -a = +a^2$. Ainsi, la racine carrée de a^2 est $+a$ ou $-a$. Donc, toute racine carrée doit être affectée du double signe $\pm$.

Il suit encore de là que la racine carrée d'une quantité négative est un symbole d'absurdité. Les quantités de cette nature sont dites

imaginaires. Ainsi, $\sqrt{-81a^4b^6c^2}$ ou $9a^2b^3c\sqrt{-1}$ est une expression imaginaire.

70. Le carré d'un polynome se compose en général du carré de chacun de ses termes, plus du double produit de ces termes pris deux à deux.

Un trinome, ordonné par rapport à une lettre quelconque, ne peut être un carré parfait, qu'autant que ses termes extrêmes sont des carrés parfaits, et que son second terme est le double produit de leurs racines carrées. La racine carrée de ce trinome se compose alors des racines carrées de ses termes extrêmes, affectées du même signe ou de signes contraires, suivant que le terme moyen est positif ou négatif. Ainsi,

$$\sqrt{9a^4b^2 \pm 24a^2b^2c + 16b^2c^2} = \pm(3a^2b \pm 4bc).$$

On extraira de même la racine carrée d'un polynome quelconque, s'il peut être mis sous la forme $a^2 \pm 2ab + b^2$. Ainsi,

$$\sqrt{9a^2b^2 - 12a^2bc + 4a^2c_2 + 6ab\,c - 4abc^2 + b^2c^2}$$

$$= \sqrt{(9a^2b^2 - 12a^2bc + 4a^2c^2) + 2(3ab - 2ac)\,bc + b^2c^2}$$

$$= \sqrt{(3ab - 2ac)^2 + 2(3ab - 2ac)\,bc + b^2c^2} = 3ab - 2ac + bc.$$

71. On a généralement : 1° $a\sqrt{c} \pm b\sqrt{c} = (a \pm b)\sqrt{c}$.

2° $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ et $m\sqrt{a} \times n\sqrt{b} = mn\sqrt{ab}$.

3° $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$; car le carré de chaque membre est $\frac{a}{b}$;

4° $m\sqrt{a} = \sqrt{m^2}\sqrt{a} = \sqrt{m^2a}$.

5° $\frac{a}{b + \sqrt{c}} = \frac{a(b - \sqrt{c})}{(b + \sqrt{c})(b - \sqrt{c})} = \frac{ab - a\sqrt{c}}{b^2 - c}$;

et de même $\frac{a}{b - \sqrt{c}} = \frac{ab + a\sqrt{c}}{b^2 - c}$.

ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ.

72. Par les transformations indiquées au n° **50**, on peut toujours ramener une équation du second degré à une seule inconnue, soit à la forme $mx^2 = n$ qui revient à $x^2 = a$, d'où $x = \pm\sqrt{a}$; soit à la forme $ax^2 + bx = c$ qui revient à $x^2 + px = q$, où les lettres p et q désignent des quantités numériques ou algébriques, monomes ou polynomes, affectées ou non d'un dénominateur.

Pour résoudre cette équation, ajoutons $\frac{p^2}{4}$ aux deux membres,

nous aurons : $x^2 + px + \frac{p^2}{4} = q + \frac{p^2}{4}$, ou $(x + \frac{p}{2})^2 = q + \frac{p^2}{4}$;
d'où l'on tire

$$x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{q + \frac{p^2}{4}} \text{ et } x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}.$$

Ainsi, toute équation du second degré à une inconnue donne deux valeurs pour cette inconnue. Ces valeurs se nomment les *racines* de l'équation.

On peut résoudre tous les cas particuliers, soit à l'aide de cette formule générale, soit en opérant directement sur l'équation proposée, comme nous venons de faire pour l'équation générale.

On peut s'assurer directement que chacune des deux valeurs générales, trouvées pour x, vérifie l'équation qui les fournit.

73. Soient a et b les racines de l'équation $x^2 + px = q$, on aura

$$a = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q} \quad \text{et } b = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}.$$

Si q est positif, quel que soit p, a sera positif et b négatif.

Si q est négatif et plus petit que $\frac{p^2}{4}$, a et b seront tous deux de même signe que p.

Si q est négatif et égal à $\frac{p^2}{4}$, a et b sont égaux, et de même signe que p.

Si q est négatif et plus grand que $\frac{p^2}{4}$, a et b sont imaginaires.

74. L'équation $ax^2 + bx = c$ donnant $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$, la supposition $a = 0$ donne $x = \frac{0}{0}$ et $x = \frac{-b}{0}$; et les suppositions simultanées $a = 0$ et $b = 0$ donnent pour les deux valeurs $x = \frac{0}{0}$. Mais, dans les deux cas, l'indétermination n'est qu'apparente. Car si l'on pose $x = \frac{1}{y}$, ce qui donne $\frac{a}{y^2} + \frac{b}{y} = c$ ou $cy^2 - by = a$, la supposition $a = 0$ donnera $y = 0$ et $y = \frac{b}{c}$ d'où $x =$ infini, et $x = \frac{c}{b}$; et les suppositions simultanées $a = 0$ et $b = 0$ donnent toutes deux pour x une valeur infinie.

FORMATION DES PUISSANCES DES QUANTITÉS ALGÉBRIQUES.

75. Soit $K.a^m.b^n.c^p$ un monome qu'il s'agit d'élever à la puissance r ; cette puissance équivaudra à un produit composé de r

facteurs égaux à K, de r facteurs égaux à a^m, de r facteurs égaux à b^n, et de r facteurs égaux à c^p, et sera par conséquent $K^r.a^{mr}.b^{nr}.c^{pr}$. On voit donc qu'*il faut élever le coefficient à la puissance* r, *et multiplier tous les exposants par* r.

Si l'on élève le monome $-a$ successivement à la 2ᵉ, à la 3ᵉ, 4ᵉ, 5ᵉ puissance, etc., on trouvera successivement $+a^2$, $-a^3$, $+a^4$, $-a^5$, etc. Il suit de là que *toute puissance paire d'une quantité négative est positive, et que toute puissance impaire est négative.*

Toutes les puissances d'une quantité positive sont positives.

Formule du binome.

76. Si l'on fait le produit de m facteurs $x+a$, $x+b$, $x+c$, etc., il est facile de voir qu'il se composera : 1° de la mième puissance de x; 2° de x^{m-1} multiplié par la somme des quantités a, b, c, etc.; 3° de x^{m-2} multiplié par la somme des produits 2 à 2 de ces quantités; 4° de x^{m-3} multiplié par la somme des produits 3 à 3 de ces quantités, etc., etc.; enfin, du produit de ces mêmes quantités. En effet, si cette loi est vraie pour le degré m, en appelant A la somme des quantités a, b, c, etc., B la somme de leurs produits 2 à 2, C celle de leurs produits 3 à 3, etc., et U le produit de ces quantités, le produit des m facteurs $x+a$, $x+b$, $x+c$, etc., sera $x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}.....+U$.

Multiplions par un nouveau facteur $x+k$, nous aurons :

$$\begin{array}{l|l|l|l} x^m+A & x^{m-1}+B & x^{m-2}+C & x^{m-3}.......+KU. \\ \quad +K & \quad +KA & \quad +KB & \end{array}$$

Or, A+K est la somme des quantités a,b,c...K; B+AK est la somme de leurs produits 2 à 2; C+BK celle de leurs produits 3 à 3 etc., et enfin KU est le produit de ces quantités. Donc, la loi en question étant vraie pour m facteurs, est vraie pour $m+1$ facteurs : mais on peut s'assurer *a priori* qu'elle est vraie pour 2,3,4 facteurs, donc, elle est vraie pour 5,6, etc., facteurs.

77. Si l'on suppose $a=b=c=$ etc., le produit des m facteurs $x+a$, $x+b$, etc., deviendra la mième puissance du binome $x+a$, et, si l'on appelle A, B, C, etc. le nombre des combinaisons possibles de m lettres prises 1 à 1, 2 à 2, 3 à 3, 4 à 4 etc., il est facile de voir qu'on aura :

$$(x+a)^m=x^m+Aax^{m-1}+Ba^2x^{m-2}+Ca^3x^{m-3}\ .\ .\ .\ .\ .\ +a^m,$$

78. Deux lettres a, b, peuvent être *permutées* de deux manières ab, ba.

Si l'on considère 3 lettres a, b, c, on voit qu'en mettant à part

chacune d'elles, et en écrivant à sa droite les 2 permutations fournies par les deux autres, on obtient en tout 2×3 permutations.

Si l'on considère 4 lettres a, b, c, d, on voit qu'en mettant à part chacune d'elles, et en écrivant à sa droite les 2×3 permutations fournies par les 3 autres, on obtient en tout $2 \times 3 \times 4$ permutations.

On voit donc qu'en général, n lettres peuvent éprouver un nombre de permutations marqué par $1 \times 2 \times 3 \times 4 \ldots \times n$.

79. m lettres prises 1 à 1, donnent m *arrangements*.

Si à chacune de ces m lettres on réunit une des $m-1$ autres, on obtient $m\,(m-1)$ arrangements 2 à 2.

Si à chacun de ces $m\,(m-1)$ arrangements 2 à 2, on réunit une des $m-2$ lettres restantes, on obtient $m\,(m-1)\,(m-2)$ arrangements 3 à 3.

On voit donc qu'en général, m lettres, prises n à n, fournissent un nombre d'arrangements marqué par

$$m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3) \ldots\ldots (m-n).$$

80. Remarquons enfin que chacun des arrangements de m lettres n à n pouvant éprouver un nombre de permutations marqué par $1 \times 2 \times 3 \times 4 \ldots\ldots \times n$, le nombre des *combinaisons* réelles de m lettres n à n, c'est-à-dire le nombre des arrangements qui diffèrent au moins par une lettre, n'est de fait que de $\dfrac{m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3) \ldots (m-n)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \ldots\ldots \times n}$

81. Si dans la formule précédente on fait successivement n égal à 1, à 2, à 3, etc., on aura : $A = m$, $B = \dfrac{m\,(m-1)}{1 \times 2}$, $C = \dfrac{m(m-1)\,(m-2)}{1 \times 2 \times 3}$ et la formule du n° 77 deviendra :

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + \frac{m\,(m-1)}{1.2}a^2x^{m-2} + \frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}a^3x^{m-3} \ldots \text{etc.} \ldots + a^m$$

Le terme général de cette formule est donc :

$$\frac{m\,(m-1)\,(m-2) \ldots (m-n)}{1\,.\,2\,.\,3 \ldots n}\; a^n x^{m-n}.$$

Telle est la formule donnée par Newton, pour le développement d'une puissance quelconque d'un binome.

82. Il est facile de voir que chaque terme peut s'obtenir au moyen du précédent; pour cela, il faut multiplier le coefficient de ce terme par l'exposant de x, et le diviser par le nombre des termes qui précèdent celui qu'on veut obtenir, augmenter d'une unité l'exposant de a, et diminuer d'une unité celui de x.

La formule devant être symétrique, par rapport à a et à x, il

s'ensuit que les termes à égale distance des extrêmes ont le même coefficient.

On trouvera d'après la formule précédente :

$$(x+a)^5 = x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5$$

$$(x+a)^6 = x^6 + 6ax^5 + 15a^2x^4 + 20a^3x^3 + 15a^4x^2 + 6a^5x + a^6$$

83. Si le second terme du binome était négatif, tous les termes affectés des puissances impaires de ce second terme seraient négatifs (**75**) ; ainsi, les termes de la formule seraient alternativement positifs et négatifs.

On peut, à l'aide de la formule du binome, développer la puissance m^{ième} d'un binome quelconque, et par suite d'un polynome quelconque.

EXTRACTION DES RACINES D'UN DEGRÉ QUELCONQUE.

84. Pour indiquer la racine $m^{\text{ième}}$ de a, on se sert du signe $\sqrt[m]{a}$. On a, en général : $\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$. Car, si l'on pose $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = b$, on en tire $\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m = b^m$ ou $\sqrt[n]{a} = b^m$; puis de même $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = b^{mn}$, ou $a = b^{mn}$; et, par conséquent, $\sqrt[mn]{a} = b = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$.

Il suffit donc de savoir extraire les racines dont le degré est marqué par un nombre premier.

On pourrait, d'après le développement de la 5e puissance du binome, et à l'aide de considérations analogues à celles qui ont été employées en arithmétique pour l'extraction des racines carrées et cubiques, parvenir à extraire la racine 5e d'un nombre quelconque.

85. Il résulte du n° **75** que *pour extraire la racine* m^{ième} *d'un monome, il faut extraire la racine* m^{ième} *de son coefficient, et diviser tous ses exposants par* m.

Toute racine impaire d'une quantité négative, est négative; toute racine paire d'une quantité négative est imaginaire.

Toute racine impaire d'une quantité positive est positive; toute racine paire d'une quantité positive doit être affectée du double signe $\pm$.

86. Pour extraire la racine $m^{\text{ième}}$ d'un polynome, il faudrait, à l'aide de la formule du binome, s'assurer que ce polynome est une $m^{\text{ième}}$ puissance exacte : on opérerait en suite d'une manière analogue à ce qui a été dit au n° **70**.

87. On a en général : 1° $a\sqrt[n]{c} \pm b\sqrt[n]{c} = (a \pm b)\sqrt[n]{c}$;

2° $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$; car la $n^{ième}$ puissance des deux membres est ab. On a de même $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$;

3° $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{a} \ldots = \sqrt[n]{a^m}$;

4° $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$; cela résulte du n° 84.

Il suit de là que l'on a $\sqrt[m]{a} = \sqrt[mn]{a^n}$, ce qui permet de réduire plusieurs radicaux au même degré.

Des exposants fractionnaires et négatifs.

88. On a vu (83) que, pour extraire la racine n de a^m, il faut diviser m par n; en étendant cette règle au cas où n ne divise pas m, on peut écrire $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$. Les règles données pour les exposants entiers s'appliquent aux exposants fractionnaires. Car, 1° on a :

$$\sqrt[n]{a^m} \times \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \times \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq} \times a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}}.$$

par conséquent $a^{\frac{m}{n}} + a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$. C'est la règle du n° 14.

2° On démontrerait de même que l'on a $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$. C'est la règle du n° 25.

3° On a $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p = \sqrt[n]{a^{mp}}$ (87, 5°), donc $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p = a^{\frac{m}{n}\times p}$. C'est la règle du n° 75.

4° On a : $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a^m}} = \sqrt[pn]{a^m}$ (87, 4°), donc $\sqrt[p]{a^{\frac{m}{n}}} = a^{\frac{m}{n} : p}$. C'est la règle du n° 86.

5° En combinant les résultats de 3° et 4°, on trouvera que l'on a en général : $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}\times\frac{p}{q}}$.

89. On a vu (25) que, pour diviser a^m par a^n, il faut soustraire n de m; en étendant cette règle au cas où n est plus grand que m, on obtient un exposant négatif. Si, par exemple, $n = m + p$, on aura :

$$a^m : a^n = a^{m-n} = a^{-p}. \quad \text{Ainsi } a^{-p} = \frac{1}{a^p}.$$

Les règles données pour les exposants entiers s'appliquent aux exposants fractionnaires. Car, 1° on a : $\frac{1}{a^m}\times\frac{1}{a^n}=\frac{1}{a^{m+n}}$;

donc, $a^{-m}\times a^{-n}=a^{-(m+n)}$.

2° On a : $\frac{1}{a^m}:\frac{1}{a^n}=\frac{a^n}{a^m}=\frac{1}{a^{m-n}}$; donc, $a^{-m}:a^{-n}=a^{-(m-n)}$.

3° On a : $\left(\frac{1}{a^m}\right)^n=\frac{1}{a^{mn}}$; donc, $\left(a^{-m}\right)^n=a^{-mn}$.

4° On a : $\frac{1}{\left(\frac{1}{a^m}\right)^n}=a^{mn}$; donc, $\left(a^{-m}\right)^{-n}=a^{mn}$.

On démontrerait de même que toutes les règles données pour les exposants entiers, s'appliquent aux exposants fractionnaires et négatifs combinés entre eux.

Application des logarithmes aux formules algébriques.

90. On a vu en arithmétique que : 1° $\log. ab=\log. a+\log. b$; 2° $\log. \frac{a}{b}=\log. a-\log. b$; 3° $\log. a^m=m\log. a$.

Si l'on a $\sqrt[m]{a}=b$, on en déduit $a=b^m$ et $\log. a=m\log. b$; donc, $\log.\left(\sqrt[m]{a}\right)=\frac{\log. a}{m}$.

Ces principes suffisent pour appliquer les logarithmes à toute formule algébrique. Soit, par exemple :

$$x=\frac{a^2\sqrt[3]{2a^4-6a^2bc+4b^2c^2}}{6a^2-6b^2}.$$

Posons $2a^4=m$, $6a^2bc=n$, $4b^2c^2=p$; nous aurons :

$$x=\frac{a^2\sqrt[3]{m-n+p}}{6(a+b)(a-b)};$$

Et, en appliquant les logarithmes,

$$\log. x=2\log. a+\tfrac{1}{3}\log.(m-n+p)-[\log. 6+\log.(a+b)+\log.(a-b)].$$

Les quantités m, n, p, pourront se calculer par logarithmes, puisqu'on aura :

$\log. m=\log. 2+4\log. a$, $\log. n=\log. 6+2\log. a+\log. b+\log. c$,

et $\log. p=\log. 4+2\log. b+2\log. c$.

DES ÉQUATIONS EXPONENTIELLES.

91. On appelle *exponentielles* les équations où l'inconnue entre

comme exposant. La plus simple est $a^x = b$ qui donne :

$x \log. a = \log. b$ et par conséquent $x = \frac{\log. b}{\log. a}$. Si a est la base du système logarithmique, on a $\log. a = 1$ et $x = \log. b$.

L'équation $a^{b^x} = c$, dite exponentielle du second ordre, donne $b^x \times \log. a = \log. c$, et $x \log. b + \log. \log. a. = \log. \log. c$, d'où l'on tire :

$$x = \frac{\log. \log. c - \log. \log. a}{\log. b}.$$

On résoudrait de même une équation exponentielle d'un ordre supérieur.

92. Il est facile, à l'aide de l'équation $a^x = b$, et en supposant que a soit la base du système logarithmique, de s'assurer que :

1° Le logarithme de a^n est n, quelque soit n ;

2° Le logarithme d'un nombre b ne peut être commensurable, qu'autant que b est une puissance entière ou fractionnaire de la base, dont l'exposant est commensurable ;

3° Les logarithmes des quantités positives et entières sont positifs, et d'autant plus grands que ces quantités sont plus grandes ;

4° Les logarithmes des quantités fractionnaires et positives, sont négatifs, et leur valeur absolue est d'autant plus grande que ces quantités sont plus petites;

5° Les logarithmes des quantités négatives sont des expressions imaginaires, lorsque la base est positive ;

6° Le logarithme de la base est 1, celui de l'unité est 0, et le logarithme de 0 est l'infini négatif, $-\infty$.

93. Pour résoudre directement l'équation $a^x = b$, on forme les puissances successives de a; on trouve que b est compris entre a^n et a^{n+1}; on pose alors $x = n + \frac{1}{x'}$, ce qui donne $a^{n+\frac{1}{x'}} = b$, d'où $\left(\frac{b}{a^n}\right)^{x'} = a$. On opère sur cette équation comme sur la proposée, et l'on trouve que x' est compris entre n' et $n'+1$; on pose $x' = n' + \frac{1}{x''}$; etc. En continuant ainsi on obtient une suite d'équations, telles que

$$x = n + \frac{1}{x'},\ x' = n' + \frac{1}{x''},\ x'' = n'' + \frac{1}{x'''},\ \text{etc.};$$

à l'aide desquelles il sera facile de déterminer x en fonction de la dernière inconnue, ou du nombre entier qui en approche le plus.

Plus il y aura de ces équations, et plus la valeur de x sera approchée.

94. On pourrait employer la méthode précédente pour calculer les logarithmes des nombres, dans le système dont la base est 10.

Connaissant le logarithme de b, dans le système dont la base est 10, on en déduit le logarithme de b, dans le système dont la base est a, par la relation $a^x = b$, qui donne $x = \frac{\log. b}{\log. a}$. La quantité $\frac{1}{\log. a}$ par laquelle il faut multiplier le logarithme de b dans le système dont la base est 10, pour avoir le logarithme de b dans le système dont la base est a, se nomme le *module* de ce second système.

Formules générales des progressions par quotient.

95. D'après ce qui a été dit en arithmétique, si l'on nomme a le premier terme d'une progression par quotient, q la raison, n le nombre des termes, S leur somme, et l le dernier terme, on aura :

$$l = aq^{n-1} \text{ et } S = \frac{lq-a}{q-1}, \text{ ou } S = \frac{a(q^n-1)}{q-1}.$$

On a à résoudre une équation du premier degré quand l'inconnue est a, l ou S ; elle est encore du premier degré quand on cherche q connaissant a, l et S; elle est du degré $n-1$ quand on cherche q, connaissant seulement b et a; elle est encore du degré $n-1$ quand on cherche q, connaissant S et a, car q^n-1 est divisible par $q-1$; enfin elle est exponentielle quand l'inconnue est n.

96. Dans les questions d'intérêts composés, en nommant a le capital primitif, t le taux de l'intérêt, n le nombre d'années du placement, et A le capital définitif, on a :

$$A = a\left(\frac{100+t}{100}\right)^n.$$

Cette équation est du premier degré par rapport à A et à a, du degré n par rapport à t, et exponentielle par rapport à n.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES D'UN DEGRÉ QUELCONQUE.

97. Toute équation numérique du degré m, à une seule inconnue peut être ramenée à la forme

$y^m + \frac{p}{p'} y^{m-1} + \frac{q}{q'} y^{m-2} \ldots\ldots\ldots + \frac{t}{t'} y + \frac{u}{u'} = o$, et si l'on pose

$$y = \frac{x}{p'.q'\ldots t'.u'}$$

on la ramène à la forme $x^m + Px^{m-1} + Qx_{m-2} \ldots\ldots + Tx + U = o$ dans laquelle P, Q.... T, U sont des nombres entiers, positifs ou négatifs.

On appelle *racine* de cette équation, toute quantité positive ou négative, entière ou incommensurable, réelle ou imaginaire, qui mise pour x la vérifie.

98. Si l'on divise par $x-a$ le premier membre de l'équation ci-dessus, que nous désignerons pour abréger par $X = o$, on trouve

pour reste $a^m+Pa^{m-1}+Qa^{m-2}....+Ta+U$; en sorte que *si a est une racine de la proposée* x — a *divise exactement son premier membre.*

99. On regarde comme évident que toute équation a au moins une racine. Cela posé, soit a une racine de $X=o$, et X' le quotient de X par $x-a$, on aura $X=(x-a)\ X'$, et la proposée pourra être vérifiée par $x=a$ ou par $X'=o$. Soit b une racine de cette seconde équation, et X'' le quotient de X' par $x-b$, on aura $X'=(x-b)\ X''$ et $X=(x-a)\ (x-b)\ X''$, en sorte que la proposée pourra être vérifiée par $x=a$, par $x=b$ ou par $X''=o$. Soit c une racine de cette troisième équation, et X''' le quotient de X'' par $x-c$, on aura :

$$X''=(x-c)\ X''' \text{ et } X=(x-a)\ (x-b)\ (x-c)\ X'''.$$

Or, les polynomes X, X', X'', X'''.... vont en baissant successivement d'un degré ; ainsi, après avoir mis en évidence $m-1$ facteurs du premier degré, on arrivera à un dernier polynome X_1 qui sera du premier degré, et par conséquent de la forme $x-k$; en sorte qu'on aura :

$$X=(x-a)\ (x-b)\ (x-c)\ (x-d)\ ......\ (x-k) \qquad (1)$$

Donc, *le premier membre de l'équation proposée est décomposable en* m *facteurs du premier degré.*

Il suit de là que *toute équation du degré* m *à* m *racines*, car la proposée est vérifiée par $x=a$, $x=b$, etc., $x=k$.

Elle ne saurait d'ailleurs avoir d'autres racines, car si α était une autre racine, $x-\alpha$ devrait, d'après le numéro précédent, diviser le second membre de l'équation (1).

100. Il suit encore de l'identité (1) que l'on doit avoir :

$P=-(a+b+c....+k)$, ou la somme des racines, prise en signe contraire ;

$Q=(ab+ac+bc+...+ak+bk...)$, ou la somme des produits deux à deux des racines, prise avec son signe ;

$R=-(abc+abd+bcd...\ +abk)$, ou la somme des produits trois à trois des racines, prise en signe contraire ;

$U=\pm abc.d...k$, ou le produit de toutes les racines, pris avec son signe, ou en signe contraire, suivant que m est pair ou impair.

Toute équation dont le dernier terme est nul a *zéro* pour racine.

101. *Si deux nombres* p *et* q *mis pour* x *dans X donnent deux résultats de signe contraire, il y a au moins une racine réelle comprise entre ces deux nombres.*

En effet, si l'on remplace x par $x+\alpha$, soit $A+B\alpha+C\alpha^2...+\alpha^m$ le résultat de cette substitution que l'on pourra écrire :

$$A+\alpha(B+C\alpha....+),$$

on conçoit que l'on pourra toujours prendre et assez petit pour que le terme $\alpha\ (B+C\alpha\ ....\ +\alpha^{m-1})$ soit aussi petit que l'on voudra.

On peut donc faire croître x depuis p jusqu'à q de manière que le résultat de cette substitution varie par degrés insensibles ; par conséquent, ce résultat ne pourra changer de signe sans passer par 0.

Ce résultat pouvant du reste passer par 0 un nombre impair quelconque de fois, il s'en suit qu'*il peut y avoir entre* p *et* q *un nombre impair quelconque de racines réelles*.

Si p et q donnaient deux résultats de même signe, pour passer de l'un à l'autre par degrés insensibles, il ne serait plus nécessaire de passer par zéro, ou, si l'on y passait, cela devrait avoir lieu un nombre pair quelconque de fois; par conséquent, *entre deux nombres qui substitués pour* x *donnent des résultats de même signe, ou bien il n'y a aucune racine réelle comprise, ou bien il y en a un nombre pair.*

102. On appelle *limite supérieure* des racines positives d'une équation tout nombre plus grand que la plus grande racine positive de cette équation. *Si K est le plus grand coefficient négatif de l'équation et* n *le nombre des termes qui le précèdent, $1+\sqrt[n]{K}$ sera une limite supérieure des racines positives.* En effet, la somme des termes négatifs sera évidemment moindre que

$$Kx^{m-n}+Kx^{m-n-1}\quad .....+Kx+K \text{ ou que } K\frac{x^{m-n+1}-1}{x-1} \quad (32)$$

Or, si l'on pose $\sqrt[n]{K}=h$, d'où $K=h^n$ et que l'on fasse $x=h+1$, l'expression précédente devient $h^{n-1}\left[(h+1)^{m-(n-1)}-1\right]$, ou bien $\left(\frac{h}{h+1}\right)^{n-1}\times(h+1)^m-h^{n-1}$ quantité évidemment moindre que $(h+1)$, c'est-à-dire moindre que le résultat de la substitution de h 1 à la place de x dans le premier terme x^m de l'équation. La supposition $x=\sqrt[n]{K}+1$ rendra donc positif le premier membre de l'équation proposée.

Lorsque le plus grand coefficient négatif est celui du second terme, on a $n=1$ et la limite est alors $K+1$, c'est la limite ordinairement employée.

On obtient la limite supérieure des racines négatives en changeant x en $-x$ dans l'équation proposée, et si L est la limite positive de cette nouvelle équation, $-$ L est la limite supérieure des racines négatives de la proposée.

On obtient la *limite inférieure* des racines en changeant x en $\frac{1}{x}$ et si l est la limite supérieure des racines de cette nouvelle équation, $\frac{1}{l}$ est la limite inférieure des racines de la proposée.

On obtiendrait la limite inférieure des racines négatives en changeant x en $-\frac{1}{x}$.

103. Il résulte du n° **101** que *toute équation de degré impair a au moins une racine réelle de signe contraire à son dernier terme.* Car, soit L la limite supérieure de ses racines positives, et $-$L′ la limite supérieure de ses racines négatives ; si le dernier terme est négatif, en faisant $x = o$, on aura un résultat négatif, et, en faisant $x = \mathrm{L}$, un résultat positif ; il y aura donc une racine réelle entre o et $+$L ; si le dernier terme est positif, en faisant $x = o$, on aura un résultat positif, et, en faisant $x = -\mathrm{L}'$, un résultat négatif, puisque le premier terme est de degré impair ; il y aura donc une racine réelle entre o et $-$L′.

104. On démontre de même que *toute équation de degré pair, dont le dernier terme est négatif, a au moins deux racines réelles, l'une positive et l'autre négative.*

105. Remarquons que toute équation qui n'a que des *permanences* de signes, c'est-à-dire dont tous les termes sont positifs, ne saurait avoir de racines positives. Par une raison analogue, toute équation complète qui n'a que des *variations* de signes, c'est-à-dire dont les termes sont alternativement positifs et négatifs, ne saurait avoir de racines négatives.

106. *Les racines imaginaires sont toujours en nombre pair.* Car supposons que l'on divise le premier membre de la proposée par tous les facteurs du premier degré, qui correspondent à ses racines réelles, si le quotient n'était pas de degré pair, il aurait une racine réelle (**103**), ce qui est contraire à la supposition

107. Si l'on multiplie le polynome

$$x^m + \mathrm{P}x^{m-1} + \mathrm{Q}x^{m-2} \ldots\ldots + \mathrm{T}x + \mathrm{U} \text{ par } x - a,$$

on a pour produit :

$$\begin{array}{r|r|r|r} x^{m+1} + \mathrm{P} & x_m + \mathrm{Q} & x^{n-1} \ldots\ldots + \mathrm{T}x^2 + \mathrm{U} & x \\ -a & -a\mathrm{P} & \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots - a\mathrm{T} & -a\mathrm{U} \end{array}$$

Le signe inférieur de chaque terme est contraire au signe supérieur du terme précédent : ainsi, ce produit aura au moins une variation de signe de plus que le premier polynome. Il suit de là que toute racine positive introduit dans une équation au moins une variation de plus. On démontre de même que toute racine négative introduit au moins une permanence de plus. Il suit de là que *dans toute équation qui n'a que des racines réelles, le nombre des racines positives est égal au nombre des variations, et le nombre des racines négatives est égal au nombre des permanences.* C'est en cela que consiste *la règle des signes* de Descartes.

108. De l'équation $a^m + Pa^{m-1} + Qa^{m-2} .... + Sa^2 + Ta + U = o$ on tire $\frac{U}{a} = -a^{m-1} - Pa^{m-2} - Qa^{m-3} .... - Sa - T.$

Posons $\frac{U}{a} + T = T'$, nous aurons : $\frac{T'}{a} = -a^{m-2} - Pa^{m-3} .... Ra - S.$

Posons $\frac{T'}{a} + S = S'$, nous aurons : $\frac{S'}{a} = -a^{m-3} - Pa^{m-4} .... - R.$

En continuant ainsi, on voit que a doit diviser successivement toutes les quantités U, T', S', etc., pour être une racine entière de la proposée ; ce qui fournit un moyen de reconnaître les racines d'une équation parmi les diviseurs du dernier terme, compris entre les diverses limites des racines.

109. Supposons qu'en substituant pour x dans la proposée la suite des nombres 1, 2, 3, etc., on reconnaisse, d'après ce qui a été dit au n° **101**, qu'il y a une seule racine réelle comprise entre les nombres a et $a + 1$, posons $x = a + \frac{1}{y}$, et soit $Y = o$, l'équation résultante, qui sera encore du degré m. Il y aura nécessairement une seule valeur réelle de y correspondante à la valeur réelle de x dont nous nous occupons ; ainsi, en substituant dans $Y = o$, pour y, les nombres 1, 2, 3, etc., on obtiendra tôt ou tard deux résultats consécutifs de signe contraire, qui comprendront une seule racine réelle de y. Soient b et $b + 1$ les nombres qui donnent ces résultats, posons $y = b + \frac{1}{z}$, et soit $Z = o$ l'équation résultante. Opérons sur cette équation comme sur les précédentes, nous obtiendrons un changement de signe entre les suppositions $z = c$ et $z = c + 1$; nous pourrons donc poser $z = c + \frac{1}{u}$, et ainsi de suite. En rapprochant les relations

$$x = a + \frac{1}{y},\ y = b + \frac{1}{z},\ z = c + \frac{1}{u},\ \text{etc.},$$

on obtiendra la valeur de x avec une approximation d'autant plus grande que l'opération aura été poussée plus loin. Cette méthode est due à Lagrange.

110. La méthode précédente exige que l'on ait obtenu deux nombres consécutifs qui ne comprennent qu'une seule racine réelle. Mais il est évident qu'elle serait encore applicable au cas où ces deux nombres comprendraient plus d'une racine réelle, pourvu qu'on en sût déterminer le nombre ; car si, par exemple, on savait que a et $a + 1$ comprennent 3 racines réelles de $X = o$; on serait certain qu'en substituant pour y les nombres 1, 2, 3..... dans $Y = o$, on obtiendrait tôt ou tard 3 changements de signe. On opérerait donc sur chacun d'eux en particulier, comme il vient d'être dit ci-dessus.

Nous verrons bientôt un moyen de déterminer le nombre des racines réelles comprises entre deux substitutions.

Des polynomes dérivés.

111. Si, dans $X = o$, on fait $x = x' + \delta$, on trouvera, en développant et ordonnant par rapport aux puissances ascendantes de δ

$$
\left.\begin{array}{ll}
x'^{m} & + m x'^{m-1} \\
+ P x'^{m-1} & + (m-1) P x'^{m-2} \\
+ Q x'^{m-2} & + (m-2) Q x'^{m-3} \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
+ R x'^{2} & + 2 R x' \\
+ T x' & + T \\
+ U &
\end{array}\right| \delta + \left.\begin{array}{l}
\dfrac{m(m-1)}{2} x'^{m-2} \\
+ \dfrac{(m-1)(m-2)}{2} P x'^{m-3} \\
+ \dfrac{(m-2)(m-3)}{2} Q x'^{m-4} \\
\cdots\cdots\cdots \\
+ R
\end{array}\right| \delta^2 \cdots\cdots + \delta^m = 0
$$

résultat que l'on peut écrire $X' + X_1 \delta + X_2 \delta^2 + \ldots \delta^m = o$. Le polynome X' est le résultat de la substitution de x' au lieu de x dans la proposée; les polynomes X_1, X_2, etc., sont les *polynomes dérivés de* X.

Chaque coefficient de cette équation *transformée* se forme du précédent en le multipliant par l'exposant de x' dans ce terme, divisant par le nombre des termes qui précèdent celui que l'on forme, et diminuant d'une unité l'exposant de x'.

Des racines égales.

112. Si dans l'équation $X = o$ on fait $x = x' + \delta$, x' étant une des racines de la proposée, on aura :

$$X' = o \text{ et } X_1 + X_2 \delta + X_3 \delta^2 \ldots\ldots + \delta^{m-1} = o.$$

Or, δ exprime les différences entre la racine x', et toutes les autres. Si donc la proposée a deux racines égales à x', l'équation en δ doit être vérifiée par $\delta = o$; il faut pour cela que l'on ait $X_1 = o$. Les deux équations $X' = o$ et $X = o$ ne peuvent être vérifiées à la fois par une même valeur de x' qu'autant que X' et X_1 ont un facteur commun.

Or, comme rien n'empêche de remplacer x' par x, on voit que *pour débarrasser une équation de ses racines égales, il faut chercher le plus grand commun diviseur entre le premier membre de cette équation et son premier dérivé, et diviser ce premier membre par ce plus grand commun diviseur.*

Si le plus grand commun diviseur ne passe pas le second degré, en l'égalant à zéro on aura deux racines de la proposée, ce qui permettra d'abaisser encore de deux unités le degré de cette équation.

113. On se sert de la substitution $x = x' + \delta$ pour *faire disparaître le second terme d'une équation*; en ordonnant par rapport à x',

le second terme de la transformée est $(m\delta + P)\,x^{m-1}$; et si l'on pose $m\delta + P = o$ ce qui donne $\delta = -\frac{P}{m}$ et qu'on substitue pour δ cette valeur dans les autres termes, on obtient une équation privée de second terme.

Théorème de M. Sturm.

114. Soit $X = o$ une équation débarrassée de ses racines égales, et soit X_1 son premier dérivé. Appliquons à X et X_1 le procédé de la recherche du plus grand commun diviseur; appelons q, q', q''.... les quotients successifs, changeons en opérant le signe de chaque reste, et soient $R, R_1\ R_2$ etc., ces restes, nous aurons :

$$\begin{aligned} X &= qX_1 - R \\ X_1 &= q'R - R_1 \\ R &= q''R_1 - R_2 \\ R_1 &= q'''R_2 - R_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_{n-1} &= qR_n - R_{n+1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Faisons croître x depuis p jusqu'à q, en mettant entre chaque supposition une différence insensible δ. Aucune de ces suppositions ne saurait annuler à la fois deux termes consécutifs de la série X, X_1, R, R_1, R_2 etc.; car, si par exemple, R_2 et R_3 devenaient nuls, d'après les équations ci-dessus, R_1, R, X_1 et X deviendraient nuls, ce qui est impossible puisque la proposée n'a pas de racines égales.

Si la supposition $x=a$ annulle quelques-uns de ces termes, par exemple le terme R, sans annuler X, le nombre des variations et permanences formées par ces termes ne sera pas changé; car la relation

$R_{n-1} = QR_n - R_{n+1}$ montre que si pour $x=a$, R_n est nul, R_{n-1} et R_{n+1}

sont nécessairement des signes contraires, et ces trois quantités formeront, quant aux signes, l'une des suites $+\ o\ -$ ou $-\ o\ +$ qui donnent toujours une variation et une permanence, soit que l'on prenne o avec le signe $+$ ou avec le signe $-$.

Si la supposition $x=a$ annulle X, il y aura une variation changée en permanence. Car si l'on fait $x = a + \delta$, appelons Δ, Δ_1 ce que deviendront X et X_1, et désignons par A, A', A''' etc., et A_1, A'_1, A''_1 ce que deviennent les dérivés de X et de X_1 par la supposition $x = a + \delta$, on aura :

$$\Delta = A + A'\delta + A''\delta^2 \ldots \text{etc., et } \Delta_1 = A_1 + A'_1\delta + A''_1\delta^2 \ldots \text{etc.}$$

Or, puisque a annulle X, on a $A = o$; d'ailleurs, d'après la nature des polynomes dérivés (**111**) on a $A' = A_1$ donc il vient :

$$\Delta = A'\delta + A''\delta^2 \text{ etc. et } \Delta_1 = A_1 + A'_1\delta \ldots + \text{etc.}$$

Mais on peut toujours prendre δ assez petit pour que Δ et Δ_1 soient de même signe que leur premier terme, donc, X et X_1 sont de même signe pour $x = a + \delta$ et de signe contraire pour $x = a - \delta$; donc, dans le passage de la seconde supposition à la première, il y aura une variation changée en permanence.

Or, si x continue à croître, chaque fois qu'il deviendra égal à une des racines réelles de la proposée il y aura une variation changée en permanence. Donc, *si l'on compte les nombres de variations correspondant, aux suppositions* $x = p$ *et* $x = q$, *la différence de ces deux nombres de variations exprimera le nombre des racines réelles comprises entre* p *et* q.

Ce théorême complète la méthode de résolution exposée aux n^os^ **109** et **110**.

De l'élimination.

115. Soient $F = o$ et $F' = o$ deux équations d'un degré quelconque en x et en y; ordonnons-les par rapport à x et cherchons le plus grand commun diviseur entre F et F'. Ces deux polynomes étant en général premiers entre eux, nous finirons par obtenir un dernier reste, indépendant de x. Nommons Y ce reste. Si l'on pose $Y = o$, chaque racine tirée de cette équation annulant Y, en substituant cette valeur dans F et F', ces deux polynomes auront un diviseur commun, puisque le reste Y est nul, et seront par conséquent annulés par une même valeur de x. Cette valeur de x, conjointement avec la valeur de y ci-dessus, vérifiera donc les équations proposées. L'équation $Y = o$ se nomme l'équation finale.

Si F et F' avaient un facteur commun D, tout système de valeur qui annulerait D annulerait aussi F et F'; par conséquent la question serait indéterminée.

De l'équation aux carrés des différences.

116. On a quelquefois besoin de former l'équation qui a pour racines les différences entre les racines de la proposée prises deux à deux. Pour cela on change x en $x' + y$, l'inconnue y exprime alors la différence entre une valeur de x et toutes les autres. Nous savons que la transformée est $X' + X_1 y + X_2 y^2 \ldots + y^m = o$; mais puisque x' est racine on a $X' = o$ et par conséquent $X_1 + X_2 y \ldots + y^{m-1} = o$. Si, d'après la méthode du n° précédent on élimine x' entre ces deux équations, l'équation en y qu'on obtiendra sera l'équation cherchée.

Si $a - b$ est une racine de cette équation $b - a$ en est une autre,

en sorte que si son premier membre a pour facteur $y-\alpha$, il a aussi pour facteur $y+\alpha$, et par conséquent $y^2-\alpha^2$. Cette équation n'a donc que les termes affectés des puissances paires de y, et si l'on pose $y^2=z$ l'équation en z qui en résultera sera l'équation aux carrés des différences.

L'équation aux différences est du degré $m(m-1)$; par conséquent, l'équation aux carrés des différences est du degré $\frac{m(m-1)}{2}$.

TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

1. La *Trigonométrie* est la partie des mathématiques qui traite de la mesure des triangles; c'est-à-dire qui enseigne à calculer les parties inconnues d'un triangle à l'aide des parties connues. Nous savons que ces parties connues doivent être au nombre de 3, parmi lesquelles il doit y avoir au moins un côté.

La difficulté d'introduire dans le calcul les angles ou les arcs, leur a fait substituer des lignes droites qui en dépendent et que l'on nomme *lignes trigonométriques*.

2. Si du sommet O, d'un angle AOB (fig. 94), comme centre avec un rayon OA, arbitraire, mais le même pour tous les angles que l'on considère, on décrit une circonférence, que l'on élève au point A, une perpendiculaire au rayon OA, prolongée jusqu'à la rencontre du prolongement du rayon OB en T, et que du point B on abaisse sur OA la perpendiculaire BP, cette perpendiculaire BP sera le *sinus* de l'angle AOB, la perpendiculaire AT sera sa *tangente* et le rayon prolongé OT sera sa *sécante*.

Si l'on tire le rayon OC perpendiculaire à OA, l'angle COB sera le complément de l'angle AOB, et si l'on élève en C une perpendiculaire à OC, arrêtée au prolongement de OB en S, et qu'on abaisse sur OC la perpendiculaire BQ, cette perpendiculaire BQ sera le sinus de l'angle COB, la perpendiculaire CS sera sa tangente et le rayon prolongé OS sera sa sécante.

Le sinus, la tangente, la sécante du complément d'un angle se nomment le *cosinus*, la *cotangente*, la *cosécante* de cet arc. Ainsi, BQ ou son égal OP est le cosinus de l'angle AOB, CS est sa cotangente, et OS sa cosécante. De même, BP ou son égal OQ est le cosinus de l'angle COB, AT est sa cotangente et OT sa cosécante.

Le sinus, la tangente, la sécante, le cosinus, la cotangente, la cosécante de l'angle AOB, que nous appellerons *a* se désignent respectivement par *sin.a*, *tang.a*, *séc.a*, *cos.a*, *cot.a*, *coséc a.*

On prend ordinairement pour unité de mesure le rayon R.

3. Prenons $A'B' = A'B'' = AB''' = AB$ et construisons les lignes trigonométriques des arcs ACB', ACB'', ACB''', en désignant les points homonologues par les mêmes lettres accentuées.

1° Si l'on considère l'arc ACB' = ACA' — A'B' = $\pi - a$, en appelant π la demi-circonférence dont le rayon est 1, on verra que le sinus B'P' = BP; donc, sin. $(\pi - a)$ = sin. a.

La tangente, qui est AT''', est égale à AT, mais comme elle a une position inverse par rapport au diamètre AA', on est convenu de la regarder comme négative;

donc, $$\text{tang.}\ (\pi - a) = -\ \text{tang.}\ a.$$

On peut faire les mêmes observations pour la sécante qui est OT''' = OT; comme elle est dans une position inverse par rapport au centre, on la regarde comme négative;

donc, $$\text{séc.}\ (\pi - a) = -\ \text{séc.}\ a.$$

Le cosinus, qui est OP'; est égal à OP, mais comme il a une position inverse par rapport au centre, on le regarde comme négatif, en sorte que cos. $(\pi - a) = -$ cos. a.

La cotangente, qui est CS', est égale à CS; mais comme elle a une position inverse, par rapport au diamètre CC', on la regarde comme négative;

donc, $$\text{cot.}\ (\pi - a) = -\ \text{cot.}\ a.$$

Enfin la cosécante, qui est OS' est égale à OS, et l'on a :

$$\text{coséc.}\ (\pi - a) = \text{coséc.}\ a.$$

2° Si l'on considère l'arc ACB'', on verra facilement que : sin. $(\pi + a) = -$ sin. a, tang. $(\pi + a)$ tang. a, séc. $(\pi + a) = -$ séc. a, cos. $(\pi + a) = -$ cos. a, cot. $(\pi + a)$ = cot. a, et coséc. $(\pi + a)$ = — coséc. a.

3° Si l'on considère l'arc ACB''', on trouvera de même que : sin. $(2\pi - a) = -$ sin. a, tang. $(2\pi - a) = -$ tang. a, séc. $(2\pi - a)$ = séc. a, cos. $(2\pi - a)$ = cos. a, cot. $(2\pi - a) = -$ cot. a, et coséc. $(2\pi - a) = -$ coséc. a.

4° Si l'on considère l'arc AB''' qui peut être considéré comme égal à —AB, on verra que : sin. $(-a) = -$ sin. a, tang. $(-a) = -$ tang. a, séc. $(-a)$ = séc. a, cos. $(-a)$ = cos. a, cot. $(-a) = -$ cot. a, et coséc. $(-a) = -$ coséc. a.

On verrait sans peine que ces relations s'étendent à des arcs négatifs dont la valeur absolue est plus grande que le quadrant.

4. Si l'on suppose que le rayon OB, d'abord couché sur OA, s'en écarte de plus en plus, de manière que le point B parcoure successivement tous les points de la circonférence, et qu'on observe en même temps ce que deviennent les lignes trigonométriques de l'arc parcouru à partir du point A, on pourra former le tableau suivant :

ARC.	SIN :	TANG :	SÉC :	COS :	COT :	COSÉC :
= 0	= 0	=0	= 1	= 1	=	∞ =
de 0 à 90°	augm. :	augm:	augm :	dimin :	dimin :	dimin :
= 90°	= 1	= ∞	= ∞	= 0	= 0	= 1
de 90° à 180°	dimin. :	nég : dim :	nég : dim :	nég : aug :	nég : aug :	augm :
= 180°	= 0	= 0	= −1	= −1	= −∞	= ∞
de 180° à 270°	nég : aug :	pos : aug :	nég : aug :	nég : dim :	pos : dim :	nég : dim :
= 270°	= −1	= ∞	= −∞	= 0	= 0	= −1
de 270° à 360°	nég : dim :	nég : dim :	pos : dim :	pos : aug :	nég : aug :	nég : aug :
= 360°	= 0	= 0	= 1	= 1	= −∞	= −∞

5. Remarquons qu'en prenant pour unité le rayon, les lignes trigonométriques n'expriment plus des longueurs, mais seulement les rapports de ces longueurs au rayon, rapports qui sont évidemment les mêmes, quel que soit ce rayon. Or, on verra que ce sont ces rapports seulement qui entrent dans les calculs, et non la valeur absolue des lignes trigonométriques.

FORMULES TRIGONOMÉTRIQUES.

Relations entre les lignes trigonométriques d'un même arc.

6. Le triangle rectangle OPB donne $\overline{BP}^2 + \overline{OP}^2 = \overline{OB}^2$; les triangles semblables OBP, OAT donnent AT : BP : : OA : OP et OT : OB : : OA : OP; les triangles semblables OBQ, OSC donnent de même :

SC : BQ ou OP : : OC : OQ ou BP

et OS : OB : : OC : OQ ou BP.

On tire de là :

$$\sin.^2 a + \cos.^2 a = 1,\ \text{tang.}\ a = \frac{\sin.\ a}{\cos.\ a},\ \text{séc.}\ a = \frac{1}{\cos.\ a},$$

$$\cot.\ a = \frac{\cos.\ a}{\sin.\ a},\ \text{et coséc.}\ a = \frac{1}{\sin.\ a}.$$

Il est facile de voir, d'après ce qui a été dit au n° 3, que ces équations ont lieu, quelle que soit la valeur de a.

De la première on tire :

$$\sin.\ a = \sqrt{1-\cos.^2 a}\ \text{et}\ \cos.\ a = \sqrt{1-\sin.^2 a}.$$

Il suit de là que :

$$\text{tang.}\ a = \frac{\sin.\ a}{\sqrt{1-\sin.^2 a}},\ \text{d'où l'on tire}\ \sin.\ a = \frac{\text{tang.}\ a}{\sqrt{1+\text{tang.}^2 a}}.$$

On obtiendrait de même, $\cos.\ a = \frac{1}{\sqrt{1+\text{tang.}^2 a}}$.

Les triangles rectangles OAT, OCS donnent encore :

$$\text{séc.}^2 a = 1 + \text{tang.}^2 a \quad \text{et coséc.}^2 a = 1 + \cot.^2 a.$$

7. En général, l'une quelconque des lignes trigonométriques étant donnée, on en déduit sans peine la valeur de toutes les autres. On a vu au n° 3 qu'une même ligne trigonométrique peut appartenir à plusieurs angles : la nature même de la question indique presque toujours celui qu'il faut choisir; dans le cas contraire, chacun de ces angles est une solution.

Relations entre les sinus et cosinus de deux arcs a, b, et les sinus et cosinus de leur somme ou de leur différence.

8. Soit AB $= a$ (fig. 95) et BC $=$ BC' $= b$; le centre O, le point B, et le milieu de la droite CC' qui joint les points C et C', seront sur un même rayon.

Abaissons sur OA les perpendiculaires CD, IK, BP et C'P'; abaissons de même IE et C'E' perpendiculaires sur CD et sur IK. Les triangles CEB, IE'C' seront égaux, et l'on aura : CE $=$ IE' et BE $=$ C'E'; et par suite DK $=$ KD'.

$$\text{Mais}\ \sin.(a+b) = \sin.\ AC = CD = DE + EC = IK + EC;$$

$$\sin.(a-b) = \sin.\ AC' = C'D' = IK - IE' = IK - EC;$$

$$\cos.(a+b) = \cos.\ AC = OD = OK - DK = OK - EB;$$

$$\cos.(a-b) = \cos.\ AC' = OD' = OK + KD' = OK + EB.$$

Or, les triangles semblables IOK, BOP donnent :

IK : IO :: BP : BO et OK : IO :: OP : BO.

De plus, le triangle BEC, ayant ses côtés respectivement perpendiculaires à ceux du triangle OIK, lui est semblable ainsi qu'au triangle OBP, et l'on a :

EC : CB :: OP : OB et BE : CB :: BP : OB.

Et comme on a $IO = \cos.b$, $BP = \sin.a$, $OP = \cos.a$, $CB = \sin.b$, et $OB = 1$, il s'ensuit que $IK = \sin.a, \cos.b$ $OK = \cos.a \cos.b$, $EC = \sin b, \cos. a$, et $BE = \sin.a, \sin.b$.

Par conséquent,
$$\sin.(a+b) = \sin.a \cos.b + \sin.b \cos.a;$$
$$\sin.(a-b) = \sin.a \cos.b - \sin.b \cos.a \quad (A)$$
$$\sin.(a+b) = \cos.a \cos.b - \sin.a \sin.b;$$
$$\cos.(a-b) = \cos.a \cos.b + \sin.a \sin.b.$$

En répétant cette construction et ces raisonnements on démontrerait que ces formules ont lieu pour toutes les valeurs de a et de b.

9. Si, dans les formules qui donnent $\sin.(a+b)$ et $\cos.(a+b)$ on fait $a = b$, on aura :

$$\sin.2a = 2\sin.a\cos.a, \text{ et } \cos.2a = \cos.^2a - \sin.^2a \quad (B).$$

Si dans ces mêmes formules on fait $b = 2a$, on aura : $\sin.3a$ et $\cos.3a$ en fonction de $\sin.a$, $\cos.a$, $\sin.2a$ et $\cos.2a$; et si pour ces dernières on met les valeurs ci-dessus, on aura : $\sin.3a$ et $\cos.3a$ en fonction de $\sin.a$, et $\cos.a$ seuls :

$$\sin.3a = 3\sin.a - 4\sin.^3a \quad \text{et } \cos.3a = 4\cos.^3a - 3\cos.a \quad (C).$$

En continuant ainsi on obtiendrait les valeurs de $\sin.ma$ et $\cos.ma$ en fonction de $\sin.a$ et $\cos.a$. On ne rencontrerait d'autre obstacle que la longueur des calculs.

10. De la seconde formule (B), nº 9, on tire :

$\cos.2a = 2\cos.^2a - 1$; d'où $\cos.a = \sqrt{\frac{1+\cos.2a}{2}}$;

il est facile d'en déduire $\sin.a = \sqrt{\frac{1-\cos.2a}{2}}$; et en y changeant a en $\frac{1}{2}a$, elles deviennent :

$$\cos.\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1+\cos.a}{2}} \text{ et } \sin.\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1-\cos.a}{2}} \quad (D)$$

formules qui donneront les sinus et cosinus de la moitié d'un arc en fonction du cosinus de cet arc.

Les équations (C) montrent que le problème de la trisection de l'angle conduit à une équation du 3ᵉ degré.

Formules usitées qui se déduisent des précédentes.

11. Les formules (A), n° 8, donnent :

$$\text{tang.}\,(a+b) = \frac{\sin.\,(a+b)}{\cos.\,(a+b)} = \frac{\sin.\,a\cos.\,b + \sin.\,b\cos.\,a}{\cos.\,a\cos.\,b - \sin.\,a\sin.\,b}$$

$$= \frac{\dfrac{\sin.\,a\cos.\,b}{\cos.\,a\cos.\,b} + \dfrac{\sin.\,b\cos.\,a}{\cos.\,b\cos.\,a}}{1 - \dfrac{\sin.\,a\sin.\,b}{\cos.\,a\cos.\,b}} = \frac{\text{tang.}\,a + \text{tang.}\,b}{1 - \text{tang.}\,a\,\text{tang.}\,b}$$

On aurait de même : $\text{tang.}\,(a-b) = \dfrac{\text{tang.}\,a - \text{tang.}\,b}{1 + \text{tang.}\,a\,\text{tang.}\,b}$.

12. Si dans la première formule du numéro précédent, on fait $a = b$, on trouve : $\text{tang.}\,2a = \dfrac{2\,\text{tang.}\,a}{1 - \text{tang.}^2\,a}$

13. Les formules (D), n° 10, donnent :

$$\frac{\sin.\,\frac{1}{2}a}{\cos.\,\frac{1}{2}a} = \frac{\sqrt{\dfrac{1-\cos.\,a}{2}}}{\sqrt{\dfrac{1+\cos.\,a}{2}}} \quad \text{ou} \quad \text{tang}\,\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1-\cos.\,a}{1+\cos.\,a}}.$$

14. Les formules (A), n° 8, donnent, en les combinant par addition et soustraction :

$$2\sin.a\cos.a = \sin.\,(a+b) + \sin.\,(a-b),$$
$$2\cos.a\sin.b = \sin.\,(a+b) - \sin.\,(a-b),$$
$$2\cos.a\cos.b = \cos.\,(a+b) + \cos.\,(a-b),$$
$$2\sin.a\sin.b = \cos.\,(a-b) - \cos.\,(a+b).$$

15. Si, dans les formules précédentes, on fait $a + b = p$ et $a - b = q$, d'où l'on tire : $a = \frac{p+q}{2}$ et $b = \frac{p-q}{2}$, elles deviendront, en changeant les deux membres de place :

$$\sin.\,p + \sin.\,q = 2\sin.\,\tfrac{1}{2}(p+q)\cos.\,\tfrac{1}{2}(p-q),$$
$$\sin.\,p - \sin.\,q = 2\cos.\,\tfrac{1}{2}(p+q)\sin.\,\tfrac{1}{2}(p-q),$$
$$\cos.\,p + \cos.\,q = 2\cos.\,\tfrac{1}{2}(p+q)\cos.\,\tfrac{1}{2}(p-q),$$
$$\cos.\,q - \cos.\,p = 2\sin.\,\tfrac{1}{2}(p+q)\sin.\,\tfrac{1}{2}(p-q),$$

16. Si l'on divise membre à membre les deux premières formules du numéro précédent, on obtient :

$$\frac{\sin. p + \sin. q}{\sin. p - \sin. q} = \frac{\sin. \frac{1}{2}(p+q) \cos. \frac{1}{2}(p-q)}{\cos. \frac{1}{2}(p+q) \sin. \frac{1}{2}(p-q)} = \frac{\text{tang.} \frac{1}{2}(p+q)}{\text{tang.} \frac{1}{2}(p-q)}$$

Si l'on divise au contraire, membre à membre, la première par la troisième, on obtient ;

$$\frac{\sin. p + \sin. q}{\cos. p + \cos. q} = \frac{\sin. \frac{1}{2}(p+q) \cos. \frac{1}{2}(p-q)}{\cos. \frac{1}{2}(p-q) \cos. \frac{1}{2}(p+q)} = \text{tang.} \frac{1}{2}(p+q)$$

On obtiendrait des formules analogues en combinant entre elles les autres équations.

Construction et usage des tables trigonométriques.

17. Il existe quelques arcs dont les lignes trigonométriques peuvent être calculées directement. Par exemple, le côté du carré inscrit sous-tendant un quart de circonférence, la moitié de ce côté est le sinus de l'arc de 45°. Or, si le rayon est 1, le côté du carré inscrit est $\sqrt{1^2+1^2}$ ou $\sqrt{2}$, et le sinus de 45° est par conséquent $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ ou $\frac{1}{\sqrt{2}}$; le cosinus de cet arc est égal à son sinus, et sa tangente est égale au rayon 1.

De même, le côté de l'hexagone inscrit étant égal au rayon 1, la moitié de ce rayon, ou $\frac{1}{2}$, est le sinus de la moitié de l'angle au centre, c'est-à-dire de la moitié de $\frac{360°}{6}$, ou enfin de 30°. Son cosinus est $\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}$ ou $\frac{1}{2}\sqrt{3}$; sa tangente est $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}$ ou $\frac{1}{\sqrt{3}}$

De même encore, le côté du décagone inscrit étant x, $\frac{1}{2}x$ sera le sinus de la moitié de $\frac{360°}{10}$, c'est-à-dire le sinus de 18°. Or, x est donné par la proportion $1 : x :: x : 1 - x$,

d'où $\quad x^2 + x = 1$ et $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$;

Donc, le sinus de l'angle de 18° est $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$,

son cosinus est, par conséquent, $\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$;

et sa tangente $\quad \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}}$ (9).

18. A l'aide de ces dernières valeurs et des formules du n° 13, on pourra calculer les lignes trigonométriques de l'arc de 9° ; et à l'aide des formules du n° 8, on obtiendra celles des arcs de 27°, 36°, 45°, 54°, 63°, 72°, 81°,

19. Pour calculer les lignes trigonométriques des arcs intermédiaires, on se fonde sur ce principe qu'un arc, moindre que 90°, est toujours compris entre son sinus et sa tangente. En effet, soit AB un arc (fig. 96), AI son sinus, AT sa tangente; si on fait tourner la figure autour de OT, comme charnière, jusqu'à ce que le point A vienne s'appliquer en A', on aura évidemment $AA' < ABA'$ et $ABA' < AT + TA'$; donc, $\frac{1}{2} AA' < \frac{1}{2} ABA'$, c'est-à-dire $AI < AB$, et $\frac{1}{2} ABA' < \frac{AT + TA'}{2}$ ou $AB < AT$.

Il suit de là que, lorsqu'un arc est assez petit pour que son sinus et sa tangente se confondent sensiblement, on peut prendre l'arc pour le sinus. Or, la demi-circonférence, dont le rayon est 1 étant $\pi = 3{,}1415926.....$, et la demi circonférence contenant $180 \times 60 \times 60$ secondes, en divisant π par ce nombre, on aura la valeur de l'arc d'une seconde, qu'on pourra prendre pour son sinus. On pourrait alors calculer successivement de seconde en seconde par les formules du n° 8, les sinus de tous les arcs; mais l'arc de 10'' pouvant encore être pris pour son sinus, on se contente de calculer les sinus des arcs de 10'' en 10''. Les valeurs indiquées au n° 18 servent de vérification. Les cosinus, tangentes, etc., se déduisent des sinus.

Du reste, les géomètres ont trouvé depuis long-temps, pour abréger ces calculs, des méthodes qui ne sauraient trouver place ici.

20. Comme il est moins utile, dans les calculs, de connaître les lignes trigonométriques que leurs logarithmes, ce sont ces logarithmes que les tables donnent, de 10'' en 10'', pour le premier degré, puis, de minute en minute, jusqu'à 45°. Les sinus et tangente de l'arc $45° + a$ étant les cosinus et cotangente de l'arc $45° - a$, et réciproquement, il est inutile d'étendre les tables au-delà de 45°. Les tables ne donnent point les logarithmes des sécantes et cosécantes, parce qu'on les déduit sans peine de ceux des cosinus et sinus, et que d'ailleurs ces lignes sont rarement employées.

Le rayon des tables est 10^{10} dont le logarithme est 10; il est donc important, dans toutes les formules trigonométriques précédentes, de rétablir le rayon; pour cela, il suffit de rendre ces formules homogènes en introduisant le rayon comme facteur, un nombre convenable de fois, à tous les termes dont le degré n'est pas assez élevé. Par exemple, la formule $\cos. 2a = 2 \cos.^2 a - 1$ deviendra $R \cos. 2a = 2 \cos.^2 a - R^2$; et ainsi des autres.

Lorsqu'il s'agit de trouver le logarithme du sinus, de la tangente, d'un arc, si cet arc ne contient que des degrés et minutes, on trouvera le logarithme cherché en regard de cet arc dans la table; si cet arc contient des secondes, il faudra avoir recours aux *différences*, à l'aide d'une proportion entièrement analogue à

celle dont on fait usage dans la recherche des logarithmes des nombres.

Mêmes observations lorsqu'il s'agit de trouver l'arc correspondant à un logarithme donné.

Relations entre les côtés d'un triangle et les lignes trigonométriques de ses angles.

21. *Dans tout triangle rectangle* CDA (fig. 97) *l'un des côtés de l'angle droit,* CD, *est égal au produit de l'hypothénuse* CA *par le sinus de l'angle opposé à ce côté.* Car, si l'on prend Ac égal au rayon des tables, et qu'on abaisse le sinus *cd*, on aura : CD : CA : : *cd* : *ca*

ou $$\text{CD} : \text{CA} :: \sin.\ \text{CAD} : 1,\ \text{d'où}\ \text{CD} = \text{CA} \sin.\ \text{CAD}.$$

Comme sin. CAD = cos. ACD on a aussi : CD = CA cos. ACD.

22. *Dans tout triangle rectangle* CDA, *l'un des côtés de l'angle droit,* CD, *est égal à l'autre côté* AD, *multiplié par la tangente de l'angle opposé au premier côté.* Car, si l'on prend Ad égal au rayon des tables, et qu'on élève la tangente *dc*, on aura CD : DA : : *cd* : *d*A, ou CD : DA : : tang. CAD : 1, d'où CD = DA tang. CAD.

23. *Dans tout triangle* ABC (fig. 97), *les côtés sont entre eux comme les sinus des angles opposés à ces côtés.* Car, si on abaisse la perpendiculaire CD, on aura :

AC : 1 : : CD : sin. CAD et BC : 1 : : CD : sin. CBD ;

les moyens de ces deux proportions étant les mêmes, les produits des extrêmes sont égaux, et l'on a :

$$\text{AC} \times \sin.\ \text{CAD} = \text{BC} \times \sin.\ \text{CBD},$$

d'où $$\text{AC} : \text{BC} :: \sin.\ \text{CBD} : \sin.\ \text{CAD}.$$

24. *Dans tout triangle* ABC, *le carré de l'un des côtés,* CB, *est égal à la somme des carrés des deux autres côtés,* AC, AB, *moins le double produit de ces deux côtés par le cosinus de l'angle qu'ils comprennent.*

En effet, si l'on abaisse la perpendiculaire CD, comme on a B = AD + DB, on trouve en élevant au carré :

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DB}^2 + 2\,AD \times DB,$$

mais on a aussi : $\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2$ et $\overline{CB}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DB}^2$.

Si l'on ajoute membre à membre les deux premières équations, et qu'on retranche la troisième, on aura :

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{CB}^2 = 2\,\overline{AD}^2 + 2\,AD \times DB,$$

d'où $$\overline{CB}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\,AD(AD + DB),$$

ou $$\overline{CB}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\,AD \times AB.$$

Mais le triangle rectangle ADC donne (22) :

$$AD = AC \sin. ACD = AC \cos. CAD,$$

donc, $\overline{CB}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\,AB \times AC \cos. CAD.$

RÉSOLUTION DES TRIANGLES.

Résolution des triangles rectangles.

25. Appelons a et b les côtés de l'angle droit, c l'hypothénuse, A et B les angles opposés aux côtés a et b.

Étant donnés l'hypothénuse c *et l'un des angles aigus* A, *trouver les côtés* a *et* b. On aura : $B = 90° - A$;

puis $a = c \sin. A$ et $b = a \text{ tang. } B$.

26. *Étant donnés le côté* a *et l'angle aigu B, trouver l'hypothénuse* c *et le côté* b. On aura : $A = 90° - B$; puis $a = c \sin. A$,

d'où $c = \frac{a}{\sin. A}$, et $b = a \text{ tang } B$.

27. *Étant donnés l'hypothénuse* c *et un côté* a, *trouver les angles et le côté* b. On aura : $a = c \sin. A$, d'où $\sin. A = \frac{a}{c}$,

puis $B = 90° - A$, et $b = a \text{ tang. } B$.

On pourrait encore obtenir b par la relation

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(c+a)(c-a)}.$$

28. *Étant donnés les deux côtés* a *et* b, *trouver les angles et l'hypothénuse* c. On aura : $a = b \text{ tang. } A$, d'où $\text{tang. } A = \frac{a}{b}$,

puis $B = 90° - A$, et $a = c \sin. A$, d'où $c = \frac{a}{\sin. A}$.

Résolution des triangles obliquangles.

29. Soient a,b,c, les trois côtés, et A,B,C, les angles opposés.

Étant donnés un côté a *et deux angles B,C, trouver les autres parties.* On aura d'abord : $A = 180° - (B + C)$; puis $a : b :: \sin. A : \sin. B$ et $a : c :: \sin. A : \sin. C$, d'où $b = \frac{a \sin. B}{\sin. A}$ et $c = \frac{a \sin. C}{\sin. A}$.

30. *Étant donnés deux côtés* a,b, *et l'angle compris C, trouver les angles A,B et le côté* c. La proportion $a : b :: \sin. A : \sin B$ donne $a + b : a - b :: \sin. A + \sin B : \sin. A - \sin. B$, ou, d'après le n° 16, $a + b : a - b :: \text{tang. } \frac{1}{2}(A + B) : \text{tang. } \frac{1}{2}(A - B)$. Or, $A + B = 180° - C$; la proportion précédente contient donc 3 termes connus et donnera $\text{tang. } \frac{1}{2}(A + B)$. Connaissant A+B et A—B, on en déduira A et B; puis on aura c par la relation $c : a :: \sin. C : \sin. A$,

d'où $c = \frac{a \sin. C}{\sin. A}$.

31. *Étant donnés deux côtés a,b, et l'angle A opposé à l'un d'eux, trouver les autres parties.* On aura : $a : b :: \sin. A : \sin. B$, d'où l'on tire $\sin. B = \frac{b \sin. A}{a}$. Connaissant A et B, on aura :

$C = 180° - (A + B)$, puis $c : a :: \sin. C : \sin. A$, d'où $c = \frac{a \sin. C}{\sin A}$.

Lorsque l'angle connu, est droit ou obtus, il n'y a qu'une solution; mais s'il est aigu, et qu'on ait $a < b$, il peut y avoir deux triangles ACB, ACB' (fig. 47.) qui satisfassent à la question, l'angle B qui n'est donné que par son sinus pouvant être aigu ou obtus.

32. *Étant donnés les 3 côtés, trouver les angles.* On aura :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos. A, \text{ d'où } \cos. A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Cette formule est incommodepour les logarithmes ; mais on en tire :

$$1 + \cos. A = 2 \cos.^2 \tfrac{1}{2} A = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc};$$

$$\text{d'où } \cos. \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(b + c)^2 - a^2}{4bc}} = \sqrt{\frac{(b + c - a)(b + c + a)}{4bc}};$$

et si l'on fait $a + b + c = 2p$,

on aura : $b + c - a = 2p - 2a = 2(p - a)$;

ainsi $\cos. \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{p(p - a)}{bc}}$.

Applications.

33. *Trouver la hauteur AC d'un édifice* (fig. 98) *dont le pied est accessible.* On mesure à partir du pied A une base horizontale AB ; au point B on établit un graphomètre à l'aide duquel on mesure l'angle HOC formé par le rayon visuel OC avec l'horizontale OH=AB, on calcule CH d'après la méthode du n° **26** ; et en y ajoutant la hauteur AH qui est celle de l'instrument, on obtient la hauteur cherchée AC.

34. *Trouver la distance CD de deux points inaccessibles* (fig. 99). On mesure sur le même plan horizontal une base AB et les angles CAB, DAB, CBA, DBA que forme cette base avec les rayons visuels AC, AD, BC, BD. On calcule les triangles ACB, ADB d'après la méthode du n° **29** ; connaissant ensuite les côtés AC, AD du triangle ACD, ainsi que l'angle compris CAD qui est la différence des angles CAB, DAB, on calcule CD d'après la méthode du n° **30**. On obtiendrait de même CD à l'aide du triangle CBD.

La première partie de la solution précédente servirait à *trouver la distance AC d'un point donné A à un point inaccessible C.*

35. *Trouver la hauteur HC d'un édifice* (fig. 100) *dont le pied est*

visible mais inaccessible. On mesure une base horizontale AB, ainsi que les angles CAB, CBA que forme cette base avec les rayons visuels AC, BC; on calcule AC d'après la méthode du n° **29**; on obtient ensuite CH, d'après la méthode du n° **33**.

TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

36. On a vu en géométrie qu'un triangle sphérique est la portion de la surface de sphère interceptée par les plans de trois grands cercles qui se coupent. Ces plans déterminent au centre un angle trièdre dont les angles dièdres sont les côtés du triangle sphérique, et dont les faces sont les côtés de ce triangle. Trois quelconques de ces 6 parties suffisent pour déterminer les 3 autres.

Si l'on mène par le centre de la sphère trois plans respectivement perpendiculaires aux arêtes de l'angle trièdre correspondant à un triangle sphérique, on détermine un angle trièdre supplémentaire, c'est-à-dire dont les angles dièdres sont les suppléments des faces du premier, et réciproquement. Ce second angle trièdre détermine sur la sphère un second triangle sphérique dont les angles sont les suppléments des côtés du premier, et réciproquement. Ce second triangle sphérique prend, par rapport au premier, le nom de triangle *polaire*, parceque, comme on l'a vu, ses côtés ont pour pôle les sommets du premier, et réciproquement.

On sait que la somme des faces d'un angle trièdre est toujours plus petite que 4 angles droits; si donc, on appelle a, b, c, les côtés d'un triangle sphérique, A, B, C, les angles opposés, a', b', c', A', B', C', les parties correspondantes du triangle polaire, on aura, en nommant q le quadrant :

$$a + b + c < 4q \text{ et } a' + b' + c' < 4q.$$

Mais $a' = 2q - A$, $b' = 2q - B$, $c' = 2q - C$; par conséquent,

$$6q - (A + B + C) < 4q, \text{ d'où } A + B + C > 2q.$$

On aurait de même : $A' + B' + C' > 2q$.

D'après ce qui a été dit des angles trièdres, *chaque côté d'un triangle sphérique quelconque est toujours plus petit que la somme des deux autres, et plus grand que leur différence. La même relation, existe entre les suppléments de ses angles*, comme le montre la considération du triangle polaire.

Un triangle sphérique est dit *rectangle*, *birectangle*, *trirectangle* lorsqu'il a *un*, *deux* ou *trois* angles droits.

FORMULES FONDAMENTALES.

37. Soit ABC (fig. 101) un triangle sphérique, OABC son angle trièdre au centre.

Par le point A menons un plan perpendiculaire à OA qui coupe les plans AOC, AOB suivant AR et AT ; joignons RT. L'angle RAT mesurera l'angle des plans AOC, AOB et sera par conséquent égal à l'angle A du triangle sphérique ; et si l'on prend pour unité le rayon OA, on aura :

$$\text{AR} = \text{tang. AOC} = \text{tang.}\, b, \quad \text{AT} = \text{tang. AOB} = \text{tang.}\, c,$$
$$\text{OR} = \text{séc.}\, b \text{ et OT} = \text{séc.}\, c.$$

Or, les triangles RAT et ROT donnent respectivement :

$$\overline{\text{RT}}^2 = \overline{\text{AR}}^2 + \overline{\text{AT}}^2 - 2\text{AR} \times \text{AT} \cos.\, \text{A}$$
$$\overline{\text{RT}}^2 = \overline{\text{OR}}^2 + \overline{\text{OT}}^2 - 2\text{OR} \times \text{OT} \cos.\, a\,; \qquad \text{d'où}$$
$$\overline{\text{OR}}^2 - \overline{\text{AR}}^2 + \overline{\text{OT}}^2 - \overline{\text{AT}}^2 - 2\text{OR} \times \text{OT} \cos. a + 2\text{AR} \times \text{AT} \cos. \text{A} = 0,$$
$$\text{ou } \overline{\text{OA}}^2 + \overline{\text{OA}}^2 - 2\text{OR} \times \text{OT} \cos.\, a + 2\text{AR} \times \text{AT} \cos.\, \text{A} = 0.$$

Si l'on met pour OA, OR, OT, AR, AT leurs valeurs, et qu'on divise par 2, on aura :

$$1 - \text{séc.}b \text{ séc.}c \cos.a + \text{tang.}b \text{ tang.}c \cos.\text{A} = 0$$

Mais

$$\text{séc.}\, b = \frac{1}{\cos.\, b}, \ \text{séc.}\, c = \frac{1}{\cos.\, c}, \ \text{tang.}\, b = \frac{\sin.\, b}{\cos.\, b}, \ \text{tang.}\, c = \frac{\sin.\, c}{\cos.\, c},$$

on a donc : $1 - \dfrac{\cos.\, a}{\cos.\, b \cos.\, c} + \dfrac{\sin.\, b \sin.\, c \cos.\, \text{A}}{\cos b \cos.\, c} = 0$; d'où l'on tire

enfin $\cos.\, \text{A} = \dfrac{\cos.\, a - \cos.\, b \cos.\, c}{\sin.\, b \sin.\, c}$; on aurait de même :

$$\cos.\, \text{B} = \frac{\cos.\, b - \cos.\, a \cos.\, c}{\sin.\, a \sin.\, c}, \quad \text{et}$$

$$\cos.\, \text{C} = \frac{\cos.\, c - \cos.\, a \cos.\, b}{\sin.\, a \sin.\, b}.$$

38. D'après les formules précédentes, on aurait dans le triangle polaire :

$$\cos.\, \text{A}' = \frac{\cos.\, a' - \cos.\, b' \cos.\, c'}{\sin.\, b' \sin.\, c'}\,;$$

Mais $\text{A}' = 2q - a$, $a' = 2q - \text{A}$, $b' = 2q - \text{B}$, $c' = 2q - \text{C}$; par conséquent :

$\cos.\, \text{A}' = -\cos.\, a$, $\cos.\, a' = -\cos.\, \text{A}$, $\cos.\, b' = -\cos.\, \text{B}$, $\cos.\, c' = -\cos.\, \text{C}$, $\sin.\, b' = \sin.\, \text{B}$ et $\sin.\, c' = \sin.\, \text{C}$ .... (3).

Il vient donc : $-\cos. a = \frac{-\cos. A - \cos. B \cos. C}{\sin. B \sin. C}$; ou bien

$$\cos. a = \frac{\cos. A + \cos. B \cos. C}{\sin. B \sin. C}.$$ On aura de même :

$$\cos. b = \frac{\cos. B + \cos. A \cos. C}{\sin. A \sin. C}$$

$$\cos. c = \frac{\cos. C + \cos. A \cos. B}{\sin. A \sin. B}.$$

39. La première des trois équations trouvées au n° **37** donne :

$$\sin.^2 A = 1 - \cos.^2 A = 1 - \left(\frac{\cos. a - \cos. b \cos. c}{\sin. b \sin. c}\right)^2$$ d'où

$$\sin.^2 A = \frac{\sin.^2 b \sin.^2 c - \cos.^2 a + 2 \cos. a \cos. b \cos. c - \cos.^2 b \cos.^2 c}{\sin.^2 b \sin.^2 c}$$

ou bien, en mettant pour $\sin.^2 b$ et $\sin.^2 c$ leurs valeurs $1 - \cos.^2 b$ et $1 - \cos.^2 c$, et réduisant,

$$\sin.^2 A = \frac{1 - \cos.^2 a - \cos.^2 b - \cos.^2 c + 2 \cos. a \cos. b \cos. c}{\sin.^2 b \sin.^2 c}, \text{ et}$$

par conséquent, $\frac{\sin.^2 A}{\sin.^2 a} = \frac{1 - \cos.^2 a - \cos.^2 b - \cos.^2 c + 2 \cos. a \cos. b \cos. c}{\sin.^2 a \sin.^2 b \sin.^2 c}$.

Or, le second membre étant symétrique par rapport à a, b, c ne changerait pas si l'on remplaçait les lettres A, a par B, b ou par C, c, et réciproquement.

Il suit de là qu'on a : $\frac{\sin.^2 A}{\sin.^2 a} = \frac{\sin.^2 B}{\sin.^2 b} = \frac{\sin.^2 C}{\sin.^2 c}$; et comme tous ces sinus sont positifs, puisque les angles auxquels ils appartiennent sont plus petits que 180°, on a : $\frac{\sin. A}{\sin. a} = \frac{\sin. B}{\sin. b} = \frac{\sin. C}{\sin. c}$; c'est-à-dire que *les sinus des angles sont entre eux comme les sinus des côtés opposés.*

40. Si l'on considère les formules du n° **37**, et qu'on élimine $\cos. c$ entre la première et la troisième, on trouvera :

$$\cos. a - \cos. a \cos^2 b = \cos. A \sin. b \sin. c + \cos. C \sin. a \sin. b \cos. b$$

Si, dans le premier membre, on remplace $\cos.^2 b$ par sa valeur $1 - \sin.^2 b$, que l'on réduise, et qu'on divise tout par $\sin. b$, il viendra :

$$\cos. a \sin. b = \cos. A \sin. c + \cos. C \sin. a \cos. b.$$

Divisons tout par $\sin. a$, et observons qu'on a : $\frac{\sin. c}{\sin. a} = \frac{\sin. C}{\sin. A}$, et que d'ailleurs $\frac{\cos. a}{\sin. a} = \cot. a$ et $\frac{\cos. A}{\sin. A} = \cot. A$, il restera :

$$\cot. a \sin. b = \cot. A \sin. C + \cos. C \cos. b.$$

On aurait de même :

$\cot. b \sin. c = \cot. B \sin. A + \cos. A \cos. c$

$\cot. c \sin. a = \cot. C \sin. B + \cos. B \cos. a$

$\cot. a \sin. c = \cot. A \sin. B + \cos. B \cos. c$

$\cot. b \sin. a = \cot. B \sin. C + \cos. C \cos. a$

$\cot. c \sin. b = \cot. C \sin. A + \cos. A \cos. b$

41. Si l'un des angles du triangle sphérique est droit, A par exemple :

1° on tirera des formules n° 37 : $\cos. a = \cos. b \cos. c$;

2° des formules n° 38 :

$\cos. a = \cot. B \cot. C$, $\cos. B = \cos. b \sin. C$, $\cos. C = \cos. c \sin. B$;

3° des formules n° 39 : $\sin. b = \sin. B \sin. a$, $\sin. c = C \sin. a$;

4° des formules n° 40 :

$\text{tang.}\, b = \text{tang.}\, a \cos. C = \text{tang.}\, B \sin. c$ et

$\text{tang.}\, c = \text{tang.}\, a \cos. B = \text{tang.}\, C \sin. b$.

RÉSOLUTION DES TRIANGLES SPHÉRIQUES.

Résolution des triangles sphériques rectangles.

42. L'angle A étant droit, 1° si l'on donne a et b, on emploiera les formules : $\cos. c = \dfrac{\cos. a}{\cos. b}$, $\sin. B = \dfrac{\sin. b}{\sin. a}$ (41, 3°),

et $\cos. C = \dfrac{\text{tang.}\, b}{\text{tang.}\, a}$, (41).

2° Si l'on donne b et c, on emploira les formules :

$\cos. a = \cos. b \cos. c$, $\text{tang.}\, B = \dfrac{\text{tang.}\, b}{\sin. c}$ et $\text{tang.}\, C = \dfrac{\text{tang.}\, c}{\sin. b}$ (41).

3° Si l'on donne a et B, on emploiera les formules :

$\sin. b = \sin. B \sin. a$, $\text{tang.}\, c = \text{tang.}\, a \cos. B$ et

$\cot. C = \dfrac{\cos. a}{\cot. B} = \cos. a \ \text{tang.}\, B$ (41).

4° Si l'on donne b et B, on emploiera les formules :

$\sin. a = \dfrac{\sin. b}{\sin. B}$, $\sin. c = \dfrac{\text{tang.}\, b}{\text{tang.}\, B}$, et $\sin. C = \dfrac{\cos. B}{\cos. b}$ (41).

5° Si l'on donne b et c, on emploiera les formules :

$\text{tang.}\, a = \dfrac{\text{tang.}\, b}{\cos. C}$, $\text{tang.}\, c = \text{tang.}\, C \sin. b$, et $\cos. B = \cos. b \sin. C$ (41).

6° Enfin, si l'on donne B et C, on emploiera les formules :

$\cos. a = \cot. B \cot. C$, $\cos. b = \dfrac{\cos. B}{\sin. C}$ et $\cos. c = \dfrac{\cos. C}{\sin. B}$

43. Lorsqu'un côté d'un triangle sphérique est de 90°, le triangle polaire est nécessairement rectangle, et il suffit de résoudre celui-ci pour en déduire le triangle proposé.

Résolution des triangles sphériques quelconques.

44. 1° Si l'on donne les 3 côtés, on obtiendra les angles par les formules du n° 37.

2° Si l'on donne les 3 angles, on obtiendra les côtés par les formules du n° 38. Ces formules peuvent être mises, ainsi que celles du n° 37, sous une forme plus commode pour les logarithmes, à l'aide d'une transformation analogue à celle qui a été employée au n° 32.

3° Si l'on donne deux côtés a, b et l'angle compris C, on calculera les autres angles à l'aide des formules du n° 40 ; on trouvera ainsi :

$$\text{cot. A} = \frac{\text{cot. A sin. } b - \text{cos. C cos. } b}{\text{sin. C}} \quad \text{et cot. } b = \frac{\text{cot. } b \text{ sin. } a - \text{cos. C cos. } a}{\text{sin. C}};$$

On obtiendra ensuite le côté c à l'aide d'une des formules du n° 39.

4° Si l'on donne deux angles A, B, et le côté c adjacent à ces angles, on calculera les autres côtés à l'aide des formules du n° 40 ; on aura :

$$\text{cot. } a = \frac{\text{cot. A sin. B} + \text{cos. B cos. } c}{\text{sin. } c} \quad \text{et cot. } b = \frac{\text{cot. B sin. A} + \text{cos. A cos. } c}{\text{sin } c};$$

on obtiendra ensuite l'angle C à l'aide d'une des formules du n° 39.

5° Si l'on donne deux côtés a,b et l'angle A opposé à l'un d'eux, on calculera l'angle B à l'aide de la formule :

$$\text{sin. } a : \text{sin. A} :: \text{sin. } b : \text{sin. B} \ (39).$$

Pour calculer ensuite le 3e côté c, on prendra deux des formules du n° 37, que l'on peut écrire :

$$\text{cos. } b - \text{cos. } a \text{ cos. } c = \text{sin. } a \text{ sin. } c \text{ cos. B}$$

$$\text{cos. } a - \text{cos. } b \text{ cos. } c = \text{sin. } b \text{ sin. } c \text{ cos. A}$$

En éliminant sin.c, et résolvant par rapport à cos. c, on trouvera :

$$\text{cos. } c = \frac{\text{cos. } a \text{ sin. } a \text{ cos. B} - \text{cos. } b \text{ sin. } b \text{ cos. A}}{\text{sin. } a \text{ cos. } b \text{ cos. B} - \text{cos. } a \text{ sin. } b \text{ cos. A}};$$

et à l'aide de la relation sin. a : sin. b :: sin. A : sin. B, il est facile de transformer cette valeur en celle-ci :

$$\text{cos. } c = \frac{\text{cos. } a \text{ tang. A} - \text{cos. } b \text{ tang. B}}{-\text{cos. } b \text{ tang. A} - \text{cos. } a \text{ tang. B}};$$

6° Si l'on donne deux angles A, B, et le côté a opposé à l'un d'eux, on opérera d'une manière analogue à ce qui précède, sur deux des formules du n° 38.

45. Comme les formules précédentes sont incommodes pour les logarithmes, on leur substitue les formules suivantes, qui peuvent se déduire des équations des n^{os} **37** et **38**, par une suite de transformations trop longues pour trouver place ici :

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(a+b) = \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}c.\ \frac{\cos.\ \frac{1}{2}(A-B)}{\cos.\ \frac{1}{2}(A+B)}$$

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(a-b) = \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}c.\ \frac{\sin.\ \frac{1}{2}(A-B)}{\sin.\ \frac{1}{2}(A+B)}$$

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(A+B) = \cot.\ \tfrac{1}{2}C.\ \frac{\cos.\ \frac{1}{2}(a-b)}{\cos.\ \frac{1}{2}(a+b)}$$

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(A-B) = \cot.\ \tfrac{1}{2}C.\ \frac{\sin.\ \frac{1}{2}(a-b)}{\sin.\ \frac{1}{2}(a+b)}.$$

Ces quatre formules sont connues sous le nom d'*analogies de Neper.*

46. Remarquons que toutes les fois qu'un angle n'est donné que par son sinus, ce même sinus pouvant correspondre à deux arcs supplémentaires, il semble qu'il doive toujours y avoir dans ce cas deux solutions. Mais, souvent, l'une de ces solutions doit être rejetée comme ne satisfaisant pas aux conditions indiquées au n° **36**. Dans d'autres cas, les données peuvent être telles qu'il n'y ait aucune solution possible ; on en est alors averti par les formules mêmes. Enfin, il y a un cas où la question est indéterminée : c'est lorsqu'on donne $A = 90°$, $a = 90°$ et $b = 90°$ on trouve en effet : cos. $c = \frac{0}{0}$ et cos. $C = \frac{0}{0}$.

Applications.

47. *Réduire un angle à l'horizon.* Soit AHB (fig. 100) un angle situé dans un plan quelconque, HC une verticale, et CAB un plan horizontal qui rencontre en A et B les droites HA et HB. Réduire l'angle AHB à l'horizon, c'est calculer l'angle ACB connaissant les angles AHC, AHB, BHC. Or, l'angle ACB mesure l'angle dièdre ACHB ; la question revient donc à calculer un angle dièdre d'un angle trièdre dont on connaît les trois faces : cette question est résolue au n° **44**, 1°.

48. *Étant données les latitudes* a, b *et les longitudes* L, l, *de deux points du globe, trouver la distance de ces points.* Ces deux points, et l'un des pôles, déterminent un triangle sphérique dans lequel on connait deux côtés, savoir $90° \pm a$ $90° \pm b$, et l'angle compris, qui est la différence $L - l$ des longitudes ; cette question est résolue au n° **44**, 3°.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

1. On appelle *Géométrie analytique* la partie des mathématiques qui a pour but d'appliquer l'Algèbre à la résolution des questions de Géométrie. La Trigonométrie est donc une branche de la Géométrie analytique.

La résolution analytique d'un problème de Géométrie se compose de trois opérations principales :

1° *Mettre le problème en équations* : pour cela on exprime algébriquement les relations que les théorèmes connus de Géométrie établissent entre les parties connues et les parties inconnues; l'emploi de certaines lignes auxiliaires facilite souvent cette opération. Afin d'arriver à des équations dont le degré soit le moins élevé possible, on doit choisir pour inconnues les quantités qui sont susceptibles de moins de valeurs différentes, ou dont les valeurs offrent plus de symétrie.

2° *Résoudre les équations* : cette opération est purement algébrique.

3° *Construire les valeurs obtenues* : si l'on rapporte à une unité de mesure les diverses parties connues, elles pourront être exprimées par des nombres, et l'on obtiendra les valeurs définitives des inconnues par de simples opérations d'Arithmétique; mais il est souvent plus avantageux de traduire les valeurs algébriques des inconnues par des constructions géométriques.

CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE DES FORMULES D'ALGÈBRE.

2. Remarquons d'abord que toutes les relations fournies par les théorèmes de Géométrie étant homogènes, toutes les équations qu'on en pourra déduire seront elles-mêmes homogènes, à moins que l'une des quantités qui entrent dans ces relations n'ait été prise pour unité, auquel cas on rendra l'équation homogène en introduisant cette quantité comme facteur, un nombre de fois suffisant à tous les termes dont le degré ne serait pas assez élevé : nous avons vu des exemples de cette circonstance dans la Trigonométrie.

3. La valeur d'une inconnue tirée d'une équation homogène du premier degré est en général composée d'un numérateur dont le degré peut être désigné par n et d'un dénominateur dont nous désignerons le degré par d; et suivant que l'inconnue sera une ligne trigonométrique, une ligne, une surface, ou un volume, on devra, d'après la nature même de ces quantités avoir ou $n = d$, ou $n = d + 1$, ou $n = d + 2$, ou $n = d + 3$.

On va voir comment on peut construire les formules algébriques lorsque l'inconnue est une ligne ; les autres cas pourront toujours être traités d'une manière analogue. Si, par exemple, on a trouvé $x = a$, et que l'inconnue doive représenter une surface, en nommant u l'unité de longueur, on aura $x = au$; et l'on obtiendra le carré équivalent à ce rectangle en cherchant une moyenne proportionnelle entre les deux lignes a et u.

4. Soit XAY (fig. 102) un angle que nous appellerons α ; menons ED perpendiculaire à AX, et soit fait ED $= a$; prenons AB $= a$; menons BC parallèle à ED, et BP perpendiculaire à AY. D'après les propriétés trigonométriques des triangles rectangles, on aura :

$$a \cos. \alpha = \mathrm{AP},\ a \sin. \alpha = \mathrm{BP},\ a \text{ tang. } \alpha = \mathrm{BC},\ \frac{a}{\cos. \alpha} = \mathrm{AC},$$

$$\frac{a}{\sin. \alpha} = \mathrm{AD},\ \frac{a}{\text{tang. } \alpha} = \mathrm{AE}.$$

Ces diverses espèces d'expressions peuvent donc toujours être ramenées à des lignes.

5. Soit à construire $x = a + b$; sur une droite indéfinie (fig. 103) on prendra AB $= a$ et BC $= b$; on aura : $x =$ AC.

6. Soit à construire $x = a - b$ et supposons $a > b$; sur une droite indéfinie on portera de A vers C une longueur AC éga à a, puis de C vers A une longueur CB égale à b, et l'on aura : $x =$ AB.

Supposons que l'on ait $b > a$ ce qui suppose x négatif ; en suivant la construction précédente, on portera de B vers C une longueur BC égale à a, puis de C vers B une longueur CA égale à b, et l'on aura : $x =$ BA.

Remarquons que : *de deux longueurs* BC, BA, *comptées sur une même droite à partir d'un point* B, *l'une dans un sens et l'autre dans l'autre, si l'une* BC *est regardée comme positive, l'autre* BA *est regardée comme négative*. Cette convention, que la pratique justifie, est générale : nous en avons déjà fait l'application en Trigonométrie.

7. Soit à construire $x = ab$; en nommant toujours u l'unité de longueur, on aura : $x = \frac{ab}{u}$; et l'on obtiendra x en cherchant une 4ᵉ proportionnelle aux trois lignes u, a, et b.

8. Soit à construire $x = \frac{a}{b}$; on aura : $x = \frac{au}{b}$, et l'on obtiendra x en cherchant une 4ᵉ proportionnelle aux trois lignes b, a, u.

9. Soit à construire $x = \frac{abcd}{mnp}$;

on posera : $y = \frac{ab}{m}$, $z = \frac{yc}{n}$, $t = \frac{zd}{p}$,

et, par une suite de 4ᵉˢ proportionnelles, on obtiendra successive-

ment y, z et t; cette dernière valeur sera celle de x, puisqu'on aura :

$$x = \frac{ab}{m} \times \frac{cd}{np} = y\,\frac{cd}{np} = \frac{yc}{n} \times \frac{d}{p} = z\,\frac{d}{p} = \frac{zd}{p} = t.$$

Toutes les fois que la valeur de l'inconnue x se présentera sous la forme d'une fraction algébrique à termes monomes, elle pourra être ramenée à avoir, comme l'expression ci-dessus, un facteur de plus au numérateur qu'au dénominateur : il suffira pour cela de multiplier l'un des deux termes par une puissance convenable de l'unité u. Une fois ramenée à cette forme, l'expression se construira comme précédemment.

10. On construirait de la même manière les expressions

$$x = abc,\ x = abcd, \text{ etc., puisqu'elles équivalent à}$$

$$x = \frac{abcd}{u \times u};\ x = \frac{abcd}{u \times u \times u}, \text{ etc.}$$

11. En combinant les procédés des nos 10, 5, 6, et 8, on construira une valeur quelconque de x, donnée par une équation rationnelle du premier degré.

12. Toute équation du second degré pouvant être ramenée à la forme $x^2 + px = q$, la construction de toute valeur de x fournie par une équation du second degré, se réduit à celle des racines de l'équation précédente.

Si l'on a égard aux signes de p et q, on pourra avoir les 4 équations suivantes :

$$x^2 + px = q,\ x^2 - px = q,\ x^2 + px = -q, \text{ et } x^2 - px = -q.$$

La première et la troisième se ramènent aux deux autres en y changeant x en $-x$: tout se réduit donc à construire les racines de la seconde et de la quatrième que l'on peut écrire :

$$x\,(x - p) = q \text{ et } x\,(p - x) = q;$$

et comme on peut toujours convertir q en un carré r^2 (3), on aura :

$$x\,(x - p) = r^2 \text{ et } x\,(p - x) = r^2.$$

Pour construire les valeurs de x qui répondent à la première de ces deux équations, décrivons un cercle sur un diamètre AB (fig. 104), égal à p; au point A, élevons sur AB la perpendiculaire $AC = r$; par le point C et par le centre du cercle menons la droite CD qui rencontre la circonférence en E et en D; les valeurs de x seront CD et $-$ CE; car, en observant que $ED = AB$, on aura :

$$CD \times (CD - AB) = \overline{AC}^2 \text{ et}$$

$$-CE \times (-CE - AB) = \overline{AC}^2 \text{ ou } CE \times (CE + AB) = \overline{AC}^2$$

Ces deux valeurs seront toujours réelles.

Pour construire les valeurs de x qui répondent à la seconde équation, décrivons une demi-circonférence sur le diamètre AB (fig. 105) égal à p; au point A élevons sur AB la perpendiculaire $AD = r$; menons DN, parallèle à AB, qui rencontre la circonférence au point M, et abaissons sur AB la perpendiculaire MP; les valeurs de x seront AP et BP; car, en observant que $MP = AD$, on aura :

$$AP \times (AB - AP) = \overline{AD}^2 \text{ et } BP \times (AB - BP) = \overline{AD}^2.$$

Pour que ces valeurs soient réelles, il faut que AD soit moindre que le rayon CH, c'est-à-dire moindre que la moitié de AB, il faut donc qu'on ait $r < \frac{p}{2}$, d'où $q < \frac{p^2}{4}$; condition connue.

13. On peut encore construire de la même manière les valeurs de x qui seraient données par une équation du 4ᵉ degré, de la forme $x^4 + px^2 = q$. Car, si l'on pose $x^2 = y$, d'où $x = \pm\sqrt{y} = \pm\sqrt{yu}$, après avoir construit les valeurs de y d'après le numéro précédent, on obtiendra les valeurs correspondantes de x en cherchant une moyenne proportionnelle entre y et l'unité u.

14. Les valeurs irrationnelles de x, qui ne peuvent pas être ramenées à ne contenir que des radicaux du second degré, ne sauraient être construites par la règle et le compas.

Remarquons que les valeurs particulières $x = \sqrt{a^2+b^2}$, ou $x = \sqrt{a^2-b^2}$ se construisent directement en s'appuyant sur les propriétés des triangles rectangles; ces constructions sont d'un usage fréquent, parce qu'il arrive souvent qu'un polynome, placé sous un radical du second degré, puisse être décomposé en une somme ou une différence de carrés.

PROBLÈMES DÉTERMINÉS.

15. *Connaissant les côtés d'un triangle, trouver sa surface.* Soit ABC (fig. 97) le triangle proposé; faisons $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$; appelons h la perpendiculaire CD, et S la surface cherchée, nous aurons : $S = \frac{ch}{2}$.

Or, $\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2AB \times AD$, d'où $AD = \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}$;

mais $\overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AD}^2$;

On a donc : $h^2 = b^2 - \frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4c^2} = \frac{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{4c^2}$,

et par conséquent,

$$S = \tfrac{1}{4}\sqrt{[4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2} = \tfrac{1}{4}\sqrt{[2bc-(b^2+c^2-a^2)]\,[2bc+(b^2+c^2-a^2)]},$$

ou bien

$$S = \tfrac{1}{4}\sqrt{[a^2-(b-c)^2]\,[(b+c)^2-a^2]} = \tfrac{1}{4}\sqrt{a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)(a+b+c)},$$

et, si l'on fait $a + b + c = 2p$, il viendra :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Si l'on a $a < b + c$, on aura : $2a < b + c + a$, ou $a < p$; ainsi, le facteur $(p - a)$ sera positif; si donc le triangle est possible, S sera réel.

Si l'on a $a > b + c$, on aura : $b < a + c$ et $c < a + b$; il s'ensuivra donc $a > p$, $b < p$, $c < p$; le seul facteur $(p - a)$ étant négatif, S sera imaginaire.

Si l'on a $a = p + c$, on aura : $a = p$ et $S = o$.

16. *Par un point* M (fig. 106), *également distant de deux droites perpendiculaires* X'X et Y'Y, *mener une droite* AM, *telle que la partie* AB, *comprise entre les deux perpendiculaires, soit égale à une ligne donnée* a.

Appelons h la perpendiculaire MP, ou la perpendiculaire MQ qui lui est égale, et prenons pour inconnue la longueur OA que nous appellerons x, nous aurons :

$$\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OB}^2, \text{ et } OB : MP :: AO : AP, \text{ ou } OB : h :: x : x + h,$$

d'où l'on tire $OB = \dfrac{hx}{x+h}$. La première équation devient donc

$$a^2 = x^2 + \frac{h^2x^2}{(x+h)^2}$$

Cette équation devient :

$$x^4 + 2hx^3 + (2h^2 - a^2)x^2 - 2a^2hx - a\ \ h = 0;$$

le problème dépend donc d'une équation du 4[e] degré.

Élevons sur AB la perpendiculaire AR, qui rencontre en R le prolongement de MQ; élevons AS perpendiculaire à X'X, appelons y la distance QR, et z la distance AR. Les triangles RSA et BQM sont égaux, puisque AS = MP = QM; donc, MB = AR = z. Dans le triangle MAR, on aura :

$$\overline{MR}^2 = \overline{AR}^2 + \overline{MA}^2 \text{ ou } (h+y)^2 = z^2 + (a+z)^2.$$

Les triangles semblables RSA et MRA donneront :

MR : AR :: MA : AS, ou bien MR × AS = MA × AR,

ou $$(h+y)h = (a+z)z.$$

Si de la première équation on retranche membre à membre le double de la seconde, on aura :

$$(h+y)^2 - 2h(h+y) = z^2 + (a+z)^2 - 2z(a+z),$$

$$\text{ou } y^2 - h^2\ [(a+z)-z]^2 = a^2, \text{ d'où } y = \pm\sqrt{a^2+h^2}$$

On voit combien la question est simplifiée par un heureux choix d'inconnue.

PROBLÈMES INDÉTERMINÉS.

17. Lorsqu'un problème indéterminé conduit à une seule équation à deux inconnues x et y, il y a une infinité de systèmes de valeurs qui satisfont à la question ; et si le problème consiste à trouver un point qui jouisse d'une certaine propriété, il y a une infinité de points qui jouissent de cette propriété. Si l'on donne à x une valeur x', qui diffère infiniment peu de x, on en déduira une valeur y', qui différera infiniment peu de y; et de quelque manière que le point cherché dépende de x et de y, on aura pour x' et y' un point qui différera infiniment peu de celui qui est déterminé par x et y; en sorte que tous les points qui satisfont à la question se succèdent d'une manière continue et appartiennent à une ligne, qui est le *lieu géométrique* du point cherché. Voilà comment les équations à deux inconnues peuvent servir à représenter les lignes, et à en étudier les propriétés. Cette étude devient le but principal de la Géométrie analytique.

DES COORDONNÉES.

18. Pour fixer sur un plan la position d'un point M (fig. 107) on trace dans ce plan deux droites fixes XX', YY' que l'on nomme *axes*, et l'on considère ce point comme un sommet d'un parallélogramme APMQ dont les axes sont des côtés prolongés. La distance MQ, ou son égale AP est dite *l'abscisse* du point M, et la distance MP, ou son égale AQ est dite *l'ordonnée* de ce point. L'abscisse et l'ordonnée d'un point sont les *coordonnées* de ce point ; et le point A où les axes se coupent se nomme *l'origine* des coordonnées.

On représente ordinairement les abscisses par la lettre x, et les ordonnées par la lettre y.

On regarde comme positives les abscisses comptées de A vers X, et comme négatives celles qui sont comptées de A vers X'. De même, on regarde comme positives les ordonnées comptées de A vers Y, et comme négatives celles qui sont comptées de A vers Y'.

D'après cela, si l'on considère 4 points M, M', M'', M''' dont les coordonnées aient les mêmes valeurs absolues x et y, celles du point M seront $+x$ et $+y$, celles du point M' seront $-x$ et $+y$, celles du point M'' seront $-x$ et $-y$, et celles du point M''' seront $+x$ et $-y$.

Ainsi, la position d'un point sur un plan est parfaitement connue quand on sait la valeur absolue et le signe de ses coordonnées.

L'axe XX' sur lequel se comptent les abscisses, se nomme *l'axe des abscisses*, ou *l'axe des x*; pour tous les points de cet axe, on a $y = o$.

L'axe YY', sur lequel se comptent les ordonnées, se nomme *l'axe des ordonnées*, ou *l'axe des y*; pour tous les points de cet axe, on a : $x = o$.

Les coordonnées du point A, origine des coordonnées, sont donc $x = o$ et $y = o$.

19. Toute équation entre x et y exprime une propriété commune à tous les points dont les coordonnées satisfont à cette équation. Cette équation représente donc le lien géométrique de ces points.

Si l'on donne à x une suite de valeurs positives et négatives, peu distantes les unes des autres, et qu'on tire de l'équation les valeurs de y correspondantes, on déterminera sur le plan une série de points, peu distants les uns des autres, appartenant tous au lien géométrique que l'équation représente; et en faisant passer une ligne par ces divers points on aura ce lien géométrique.

Transformation des coordonnées.

20. On conçoit que l'étude d'une ligne soit d'autant plus facile que son équation est plus simple, et que le degré de simplicité de cette équation dépende du choix des axes; il est donc utile de savoir passer d'un système d'axes à un autre.

21. Soient AX et AY (fig. 108) les axes des coordonnées anciennes x et y, et soient A'X' et A'Y', les axes des coordonnées nouvelles x' et y'. Soient MP et AP les coordonnées d'un point M, rapportées aux premiers axes, MP' et A'P' les coordonnées de ce même point, rapportées aux derniers. Menons BA'y et P'IK parallèles à AY, et P'N et A'Ix parallèles à AX. Appelons φ l'angle YAX, α l'angle X'A'x et β l'angle Y'A'x; soient enfin a et b les coordonnées AB et A'B de la nouvelle origine, rapportées aux premiers axes. On aura :

$$MP = NP + MN = P'I + IK + MN = A'B + P'I + MN$$
$$AP = AB + BK + KP = AB + A'I + P'N \qquad (a).$$

Mais $\quad MN : MP' :: \sin. MP'N : \sin. MNP'$

ou $MN : y' :: \sin. \beta : \sin (180^\circ - \varphi)$, d'où $MN = \dfrac{y' \sin. \beta}{\sin. \varphi}$,

$$P'N : MP' :: \sin. P'MN : \sin. MNP',$$

ou $\qquad P'N : y' :: \sin. y A'Y' : \sin. \varphi, \qquad$ ou encore

$P'N : y' :: \sin. (\varphi - \beta) : \sin. \varphi, \qquad$ d'où $P'N = \dfrac{y' \sin. (\varphi - \beta)}{\sin. \varphi}$,

$P'I : A'P' :: \sin. P'A'I : \sin. P'IA'$ ou
$P'I : A'P' :: \sin. \alpha : \sin. (180^\circ - \varphi)$, ou encore
$P'I : x' :: \sin. \alpha : \sin. \varphi$, d'où $P'I = \frac{x' \sin. \alpha}{\sin. \varphi}$,
$A'I : A'P' :: \sin. A'P'I \sin. P'IA'$ ou
$A'I : A'P' :: \sin. \gamma A'X' : \sin. \varphi$, ou encore
$A'I : x' :: \sin. (\varphi - \alpha) : \sin. \varphi$, d'où $A'I = \frac{x' \sin. (\varphi - \alpha)}{\sin. \varphi}$,
substituant ces valeurs dans les équations (a) on trouve :

$$y = b + \frac{x' \sin. \alpha + y' \sin. \beta}{\sin. \varphi} \text{ et } x = a + \frac{x' \sin. (\varphi - \alpha) + y' \sin. (\varphi - \beta)}{\sin. \varphi} \ldots (A)$$

Si $\varphi = 90^\circ$ ces équations deviennent :

$$y = b + x' \sin. \alpha + y' \sin. \beta \text{ et } x = a + x' \cos. \alpha + y' \cos. \beta .. (B).$$

Si l'angle Y'A'X' est droit, on aura : $\beta - \alpha = 90^\circ$ d'où, $\beta = 90^\circ + \alpha$: par conséquent, $\sin. \beta = \cos. \alpha$ et $\cos. \beta = -\sin. \alpha$; et les formules ci-dessus deviennent :

$$y = b + x' \sin. \alpha + y' \cos. \alpha \text{ et } x = a + x' \cos \alpha - y' \sin. \alpha \ldots (C).$$

Si l'on veut passer d'un système de coordonnées obliques à un système de coordonnées rectangulaires, il faudra, dans les formules (A) faire $\beta = 90^\circ + \alpha$; on aura alors :

$$\sin. \beta = \cos. \alpha, \ \sin. (\varphi - \beta) = \sin. (\varphi - \alpha - 90^\circ) = -\sin. (90^\circ - (\varphi - \alpha))$$
$$= -\cos. (\varphi - \alpha),$$

et l'on aura :

$$y = b + \frac{x' \sin. \alpha + y' \cos. \alpha}{\sin. \varphi} \text{ et } x = a + \frac{x' \sin. (\varphi - \alpha) - y' \cos. (\varphi - \alpha)}{\sin. \varphi} \ldots (D)$$

On démontrerait directement que les formules (A), et par conséquent celles que l'on en déduit, sont vraies quels que soient φ, α, β, a et b.

DES LIGNES DU PREMIER DÉGRÉ.

22. On appelle *lignes du premier degré* celles qui sont représentées par des équations du premier degré à deux inconnues, ou comme on dit, à deux *variables* x et y.

Toute équation du premier degré en x et y peut être mise sous la forme $Cy = Ax + B$ ou $y = ax + b$.

Si dans cette équation on fait $x = o$, on aura $y = b$; le terme b est donc l'ordonnée du point où la ligne représentée par l'équation ci-dessus rencontre l'axe des y. Soit B (fig. 109) ce point ; menons Bx parallèle à l'axe des x, et soient M, M', M'', etc., divers points dont les coordonnées MP, AP, MP', AP', etc. satisfont à la proposée. Cette équation donnant

$$\frac{y - b}{x} = a, \text{ on en déduit } \frac{MP - NP}{AP} = \frac{M'P' - N'P'}{AP'} = \frac{M''P'' - N''P''}{AP''} = \text{etc.};$$

et comme on a $NP = N'P' \pm N''P'' =$ etc., à cause des parallèles Bx, AX, il suit que l'on a :

$$\frac{MN}{NB} = \frac{M'N'}{N'B} = \frac{M''N''}{N''B} = \text{etc.} = a.$$

Les points M. M', M'' sont donc en ligne droite.

Dans le triangle MNB, on a, en nommant φ l'angle YAX et α l'angle MBx,

$$\frac{MN}{NB} = \frac{\sin.\ \alpha}{\sin.\ (\varphi-\alpha)}.\ \text{On a donc : } a = \frac{\sin.\ \alpha}{\sin.\ (\varphi-\alpha)}.$$

Si les axes sont rectangulaires on a $\sin.\ (\varphi-\alpha) = \sin.\ (90^\circ-\alpha) = \cos.\ \alpha$,

$$\text{d'où } a = \frac{\sin.\ \alpha}{\cos.\ \alpha} = \text{tang.}\ \alpha.$$

Ainsi *l'équation* $y=ax+b$, *rapportée à des axes rectangulaires, est celle d'une ligne droite qui rencontre l'axe des* y *en un point dont l'ordonnée est* b *et fait avec l'axe des* x *un angle dont la tangente est* a.

L'équation $y=ax$ représente une droite qui passe par l'origine des coordonnées.

23. Il serait facile de voir que les résultats précédents s'appliquent aux équations :

$$y = ax - b,\ y = -ax + b,\ y = -ax - b.$$

La droite que représente l'équation proposée rencontre l'axe des y au-dessus ou au-dessous de l'axe des x, suivant que b est positif ou négatif, et fait avec l'axe des x un angle plus petit ou plus grand que celui des axes, suivant que a est positif ou négatif.

L'équation $y=b$ représente une parallèle à l'axe des x ; l'équation $y=o$ représente l'axe des x même.

L'équation $x=m$ représente une parallèle à l'axe des y ; l'équation $x=o$ représente l'axe des y même.

24. Réciproquement : *toute droite peut être représentée par une équation du premier degré en* x *et* y. Car en reprenant à l'inverse les raisonnements du nº **22**, on obtiendra pour chaque point de cette droite :

$$\frac{y-b}{x} = \frac{\sin.\ \alpha}{\sin.\ (\varphi-\alpha)} = a,\ \text{d'où } y = ax + b.$$

25. *Trouver l'équation d'une droite qui passe par deux points dont les coordonnées sont* x', y' *et* x'', y''. Soit $y=ax+b$ l'équation cherchée, on aura : $y'=ax'+b$ et $y''=ax''+b$, d'où l'on déduit par soustraction :

$$y'-y'' = a\,(x'-x'') \text{ et } a = \frac{y'-y''}{x'-x''}.$$

Mais on aurait de même :

$$y-y' = a\,(x-x'),\ \text{et par conséquent } y-y' = \frac{y'-y''}{x'-x''}\,(x-x'),$$

équation en x et y, qui sera celle de la droite cherchée.

Si l'on a $x' = 0$ et $y' = 0$, cette équation devient $y = \frac{y''}{x''} x$.

26. *Trouver l'équation d'une parallèle à une droite donnée passant par un point donné dont les coordonnées sont x', y'.* Soit $y = ax + b$ l'équation de la droite donnée, et $y = a'x' + b'$ celle de sa parallèle, on devra avoir $a' = a$, et $y' = a'x + b'$ ou $y' = ax' + b'$; par conséquent $y - y' = a(x - x')$, équation qui sera celle de la parallèle demandée.

27. *Trouver l'intersection de deux droites données.* Soient $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$ les équations de ces deux droites; pour le point d'intersection les coordonnées représentées par x et y sont les mêmes : en éliminant donc x et y entre ces deux équations, on obtiendra les coordonnées du point d'intersection. On trouvera ainsi :

$$x = \frac{b - b'}{a' - a} \quad \text{et } y = \frac{a'b - ab'}{a' - a}.$$

Si les droites sont parallèles, on a $a' = a$ et les coordonnées du point d'intersection deviennent infinies.

Si l'on a en même temps $b' = b$, les deux droites se confondent, et les coordonnées du point de rencontre deviennent indéterminées.

28. *Trouver la distance de deux points dont on connaît les coordonnées.* Soient M et M' les deux points donnés, $MP = x$, $AP = y$, et $MP' = x'$, $AP' = y'$ leurs coordonnées rapportées aux axes rectangulaires AX, AY (fig. 110). Menons MN parallèle à AX, on aura : $MM' = \sqrt{\overline{M'N}^2 + \overline{MN}^2}$. Mais $M'N = MP' - MP = y' - y$,

et $\qquad MN' = AP' - AP = x' - x$.

Ainsi donc, $\qquad MN = \sqrt{(y' - y)^2 + (x' - x)^2}$.

Si l'on a $y' = 0$, et $x' = 0$, la distance se réduit à $\sqrt{y^2 + x^2}$.

29. *Étant données les équations de deux droites, trouver l'angle de ces droites.* Soient $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$ les équations de ces droites, rapportées à des axes rectangulaires, α et α' les angles qu'elles font avec l'axe des x et β l'angle qu'elles font entre elles, on aura : $\beta = \alpha - \alpha'$

$$\text{d'où tang. } \beta = \frac{\text{tang. } \alpha - \text{tang. } \alpha'}{1 + \text{tang. } \alpha \text{ tang. } \alpha'} = \frac{a - a'}{1 + aa'}.$$

Quand les droites sont parallèles, on a $a = a'$ et tang. $\beta = 0$. Quand les droites sont perpendiculaires, on a tang. $\beta = \infty$, ce qui exige en général $1 + aa' = 0$ d'où $a' = -\frac{1}{a}$.

30. *Mener par un point donné une perpendiculaire à une droite donnée.* Soit $y = ax + b$ l'équation de la droite donnée, $y = a'x + b'$ celle de sa perpendiculaire, y' et x' les coordonnées du point donné. On aura : $y' = a'x' + b'$, et par conséquent $y - y' = a'(x - x')$. Or, d'après le n° précédent, on a $a' = -\frac{1}{a}$. L'équation cherchée est donc: $y - y' = -\frac{1}{a}(x - x')$.

Si on élimine x et y entre cette équation et $y = ax + b$, on trouvera pour les coordonnées x_1 et y_1 du pied de la perpendiculaire :

$$x_1 = x' + \frac{a(y' - ax' - b)}{1 + a^2} \text{ et } y_1 = y' - \frac{(y' - ax' - b)}{1 + a^2}.$$

La longueur de cette perpendiculaire étant $p = \sqrt{(x_1 - x')^2 + (y_1 - y')^2}$ (28), en substituant pour x_1 et y_1, leurs valeurs, il viendra : $p = \pm \frac{(y' - ax' - b)}{\sqrt{1 + a^2}}$; expression dont on ne devra prendre que la valeur absolue.

Si le point donné est sur la droite donnée, on a : $y'_1 = ax' + b$ et par conséquent $p = o$.

Si le point donné est à l'origine des coordonnées, on a : $x' = o$ et $y' = o$, et p se réduit à $\frac{\pm b}{\sqrt{1 + a^2}}$.

En nommant α l'angle dont a est la tangente, cette valeur de p devient : $$p = \frac{\pm b \cos. \alpha}{\sqrt{\cos.^2 \alpha + \sin.^2 \alpha}} = \pm b \cos. \alpha.$$

Si donc la droite donnée est parallèle à l'axe des x, on aura : $\alpha = o$ et $p = \pm b$. Si la droite donnée est parallèle à l'axe des y, elle se confondra avec cet axe, et l'on aura en effet $\alpha = 90°$, d'où $p = o$.

DES COURBES DU SECOND DEGRÉ.

31. L'équation générale du second degré à deux variables x et y peut être mise sous la forme :

$$(a) \qquad Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = o.$$

En la résolvant par rapport à y, on trouve :

$$y = -\frac{B}{2A}x - \frac{D}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{(B^2 - 4AC)x^2 + 2(BD - 2AE)x + D^2 - 4AF},$$

qu'on peut écrire $y = ax + b \pm K\sqrt{nx^2 + px + q}$, ou plus simplement encore $y = ax + b \pm Y$.

Si BC (fig. 111) est la droite représentée par l'équation $y = ax + b$, en prolongeant l'ordonnée PR de cette droite, et prenant $MP = NP = Y$

les points M et N appartiendront à la courbe que représente l'équation (*a*). On obtiendrait de même les points M', N', M'', N'' etc. La ligne BC qui divise en deux parties égales les cordes parallèles MN, M'N', M''N'' etc. se nomme un *diamètre* de la courbe.

32. On a vu en Algèbre que lorsqu'un polynome est ordonné par rapport aux puissances décroissantes d'une lettre x, on peut toujours trouver une valeur de x qui rende le premier terme plus grand que la somme de tous les autres. Il suit de là qu'il existe deux valeurs de x, l'une positive et l'autre négative, au-delà desquelles la quantité nx^2+px+q sera de même signe que son premier terme, c'est-à-dire de même signe que n, et d'autant plus grande que x sera plus grand. Par conséquent :

1° Si n est négatif, au-delà de certaines valeurs de x, l'une positive et l'autre négative Y, et par suite y, seront toujours imaginaires. La courbe sera donc limitée dans tous les sens.

2° Si n est positif, au-delà de certaines valeurs de x, l'une positive et l'autre négative, Y, et par suite y, seront toujours réelles. La courbe sera donc illimitée dans tous les sens.

3° Si $n=o$, on aura : $Y=K\sqrt{2px+q}$. Si l'on prend x de même signe que p, Y, et par suite y, seront toujours réelles au-delà d'une certaine valeur de x ; mais si l'on prend x de signe contraire à p, Y, et par suite y, deviendront imaginaires, au-delà d'une certaine valeur de x. La courbe sera donc limitée dans un sens, et illimitée dans l'autre.

4° Si le coefficient C est nul, on a : $n=B^2$ quantité positive ; la courbe est donc illimitée dans les deux sens. Si $A=o$, en résolvant l'équation (*a*) par rapport à x, on arriverait au même résultat.

5° Si A et C sont tous deux nuls à la fois, l'équation (*a*) se réduit à $Bxy+Dy+Ex+F=o$.

On en tire $y=-\frac{Ex+F}{Bx+D}=-\left(\frac{E}{B}+\frac{BF-ED}{B(Bx+D)}\right)$, (en divisant)

et $x=-\frac{Dy+F}{By+B}=-\left(\frac{D}{B}+\frac{BF-ED}{B(By+E)}\right)$.

Ces valeurs montrent : que y est d'autant plus grand que x est plus petit, et réciproquement, que y devient infini quand $x=-\frac{B}{D}$ et que x devient infini quand $y=-\frac{B}{E}$. La courbe est donc encore illimitée dans les deux sens.

6° Si, n étant nul, p est nul aussi, on a $y=ax+b\pm\frac{1}{2A}\sqrt{q}$ équation qui représente deux droites parallèles.

7° Si n, p et q sont nuls à la fois, on a simplement $y=ax+b$ qui est l'équation du diamètre.

8° Le polynome nx^2+px+q peut s'écrire $n\left(x^2+\frac{p}{n}x+\frac{q}{n}\right)$.

Supposons que la quantité entre parenthèses soit le carré de $(x-x')$ on aura : $y = ax + b \pm K(x-x')\sqrt{n}$.

Si n est positif, cette équation représentera deux droites qui se coupent. Si n est négatif, y sera imaginaire ; excepté pour la seule valeur $x=x'$ qui donnera $y = ax' + b$, et la courbe se réduira au seul point dont les coordonnées sont x' et $ax' + b$.

33. Il résulte de la discussion précédente que l'équation du second degré à deux variables ne peut représenter que 3 genres de courbes différents : des courbes limitées dans tous les sens, que l'on nomme *ellipses* ; des courbes illimitées dans tous les sens, que l'on nomme *hyperboles* ; et des courbes limitées dans un sens et illimitées dans l'autre, que l'on nomme *paraboles*.

Dans certains cas particuliers, l'ellipse peut se réduire à un point (8°), l'hyperbole peut se réduire à deux droites qui se coupent (8°), la parabole peut se réduire à deux droites parallèles (6°) ou à une seule droite (7°).

Simplification de l'équation générale.

34. Si dans l'équation générale on fait $x = x' + a$ et $y = y' + b$, ce qui revient à transporter les axes parallèlement à eux-mêmes, de manière à transporter l'origine au point dont les coordonnées sont a et b, cette équation devient :

$$Ay'^2 + Bx'y' + Cx'^2 + (2Ab + Ba + D)y + (2Ca + Bb + E)x + Ab^2 + Bab + Ca^2 + Db + Ea + F = o$$

Posons $2Ab + Ba + D = o$ et $2Ca + Bb + E = o$,

d'où l'on tire $a = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC}$ et $b = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC}$,

et substituons ces valeurs dans le dernier terme de l'équation ci-dessus, elle se réduira à la forme :

$$Ay'^2 + Bx'y' + Cx'^2 + R = o \qquad (b).$$

Cette transformation ne s'applique qu'à l'ellipse et à l'hyperbole, où $B^2 - 4AC$ est différent de o, et donne pour a et b des valeurs finies et déterminées. Nous verrons tout à l'heure comment on opère pour la parabole.

35. Dans l'équation précédente (b) faisons :

$$x' = x''\cos.\alpha - y''\sin.\alpha \text{ et } y = x''\sin.\alpha + y''\cos.\alpha \quad (21 . C)$$

elle deviendra :

$$\left.\begin{array}{l} A\cos.^2\alpha \\ + C\sin^2\alpha \\ - B\sin.\alpha\cos.\alpha \end{array}\right| y''^2 + \left.\begin{array}{l} 2A\sin.\alpha\cos.\alpha \\ - 2C\sin.\alpha\cos\alpha \\ + B\cos^2\alpha \\ - B\sin.^2\alpha \end{array}\right| x''y'' + \left.\begin{array}{l} A\sin.^2\alpha \\ + C\cos.^2\alpha \\ + B\sin.\alpha\cos.\alpha \end{array}\right| x''^2 + R = o \qquad (c)$$

Posons $2(A-C)\sin.\alpha\cos.\alpha+B(\cos.^2\alpha-\sin.^2\alpha)=o$, d'où l'on tire ;

$$(A-C)\sin.2\alpha+B\cos.2\alpha=o$$

d'où $\text{tang } 2\alpha = \frac{-B}{A-C}$

Si l'on déduit de là la valeur de sin. α et cos. α et qu'on la substitue dans (c), elle prendra la forme $My''^2+Nx''^2+R=o$.

Cette transformation semble en défaut quand on a: $B=o$ et $A=C$ parce qu'alors $\text{tang. } 2\alpha=\frac{o}{o}$; mais, dans ce cas, l'équation (c) se réduit d'elle même à $y''^2+x''^2+\frac{A}{R}=o$.

36. Supposons maintenant qu'on ait $B^2-4AC=o$, qui est le cas de la parabole. Commençons par changer la direction des axes sans changer l'origine, à l'aide des formules $x=x'\cos.\alpha-y'\sin.\alpha$, et $y=y'\cos.\alpha+x'\sin.\alpha$, l'équation générale prendra la forme :

$$A'y'^2+B'x'y'+C'x'^2+D'y'+E'x'+F=o.$$

Si l'on dispose, comme tout à l'heure de α pour faire disparaître le rectangle des variables, la relation $B'^2-4A'C'=o$ nous apprend que l'un des coefficients A'ou C' disparaîtra aussi. L'équation prendra donc, je suppose, la forme $My'^2+Py'+Qx'+F=o$.

Faisons $y'=y''+b$ et $x'=x''+a$, nous aurons :

$$My''^2+(2Mb+P)y''+Qx''+(Mb^2+Pb+Qa+F)=o.$$

On ne peut faire disparaître à la fois les termes en y'' et en x'', puisqu'on ne peut pas disposer de Q. Mais on peut poser :

$$2Mb+P=o \text{ et } Mb^2+Pb+Qa+F=o$$

et en substituant dans l'équation précédente les valeurs de a et de b tirées de celles-ci, elle sera enfin réduite à $My''^2+Qx''=o$.

37. Les courbes du second degré peuvent donc être étudiées sous l'une des formes $My^2+Nx^2+R=o$ ou $My^2\pm Qx=o$.

La première de ces formes offre, quant aux signes, les quatre combinaisons suivantes :

$$My^2+Nx^2+R=o,\ My^2+Nx^2-R=o,\ My^2-Nx^2+R=o,$$
$$My^2-Nx^2-R=o.$$

Mais la première de ces équations doit être écartée comme ne pouvant être satisfaite par aucune valeur réelle de x et de y ; et la dernière rentre dans l'avant-dernière quand on y change x en y et réciproquement.

L'équation $My^2+Qx=o$ peut donner $My^2-Qx=o$; mais la première de ces équations rentre dans la seconde quand on y change x en $-x$.

Donc, les courbes du second degré peuvent être ramenées aux trois seules formes distinctes :

$$My^2 + Nx^2 = R,\ My^2 - Nx^2 = -R,\ \text{et}\ My^2 = Qx.$$

La première appartient à l'ellipse, la seconde à l'hyperbole, la troisième à la parabole.

La première donne, comme cas particulier, $y^2 + x^2 = \frac{R}{M}$; nous examinerons d'abord cette dernière équation.

DU CERCLE.

38. L'équation $y^2+x^2=\frac{R}{M}$ ou simplement $y^2 + x^2 = r^2$, exprimant que la distance (28) de l'origine au point dont les coordonnées sont x et y est constante et égale à r, caractérise une circonférence de cercle dont le centre est à l'origine des coordonnées, et dont le rayon est r.

L'équation la plus générale du cercle est $(y-y')^2+(x-x')^2=r^2$ (28) x' et y' exprimant les coordonnées du centre.

Si ce centre est sur l'axe des x, on a $y'=o$ et l'équation du cercle est $y^2+(x'-x)^2=r^2$. Si l'origine est en même temps à l'extrémité du diamètre, on a $x'=r$ et l'équation devient $y^2=2rx-x^2$.

Si le centre est sur l'axe des y, l'équation est $(y-y')^2+x^2=r^2$.

39. Soit M (fig. 112) un point du cercle dont BB' est le diamètre et A le centre ; abaissons MM' perpendiculaire sur BB', et joignons MB et MB'. 1° On a $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$: il suit de là que M'P=MP. Donc, *le diamètre BB', perpendiculaire à la corde MM' la divise en deux parties égales.* Il suit encore de là que *ce diamètre divise la circonférence en deux parties égales.*

2° On a : $y^2 = r^2 - x^2 = (r+x)(r-x)$

ou $\overline{MP}^2 = (B'A + AP)(BA - AP) = B'P \times BP.$

Ainsi *l'ordonnée perpendiculaire au diamètre est moyenne proportionnelle entre les deux segments de ce diamètre.*

3° On a :

$$\overline{MB}^2 = y^2+(r-x)^2 = y^2+r^2+x^2-2rx = 2r^2-2rx = 2r(r-x),$$

ou $\overline{MB}^2 = BB' \times BP$;

Ainsi *la corde* M B *est moyenne proportionnelle entre le diamètre* BB' *et le segment adjacent* BP.

4°. Les coordonnées du point B étant o et r, si l'on appelle y' et x' celles du point M, l'équation de MB sera :

$$y-y' = \frac{y'}{x'-r}(x-x).$$

L'équation de MB' sera : $y - y' = \frac{y'}{x'+r}(x - x')$.

Et si l'on nomme a et a' les tangentes des angles que ces droites font avec l'axe des x, on aura :

$$aa' = \frac{y'}{x'^2 - r} \times \frac{y'}{x' + r} = \frac{y'^2}{x^2 - r^2},$$

ou $$aa' = \frac{r^2 - x'^2}{x'^2 - r^2} = -1, \text{ ou } aa' + 1 = 0.$$

Ainsi les cordes MB et MB' sont perpendiculaires; (29) c'est-à-dire que *l'angle inscrit dans une demi-circonférence est droit.*

On démontrerait de même toutes les propriétés du cercle.

De la tangente et de la normale au cercle.

40. L'équation d'une droite qui passe par deux points dont les coordonnées sont x', y' et x'', y'' étant

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x');$$

si ces deux points sont sur le cercle on a :

$$y'^2 + x'^2 = r^2 \text{ et } y''^2 + x''^2 = r^2$$

d'où $$y'^2 - y''^2 + x'^2 - x''^2 = o$$

ou $$(y' - y'')(y' + y'') + (x' - x'')(x' + x'') = o$$

d'où $$\frac{y' - y''}{x' - x''} = -\frac{(x' + x'')}{y' + y''}.$$

L'équation de la sécante peut donc prendre la forme

$$y - y' = -\frac{x' + x''}{(y' + y'')}(x - x').$$

Si la sécante devient tangente, les deux points d'intersection se réuniront en un seul; on aura : $x' = x''$, $y' = y''$ et l'équation de la tangente sera $y - y' = -\frac{x'}{y'}(x - x')$.

En faisant disparaître le dénominateur et observant que $y'^2 + x'^2 = r^2$, cette équation se réduit à $yy' + xx' = r^2$.

41. Si l'on demande l'équation de la tangente au cercle menée par un point extérieur dont les coordonnées sont x' et y', en appelant α et les coordonnées du point de tangence, on aura :

$$y\beta + x\alpha = r^2,\ y'\beta + x'\alpha = r^2 \text{ et } \alpha^2 + \beta^2 = r^2$$

Si l'on tire des deux dernières équations les valeurs de α et β, et qu'on les substitue dans la première, on aura l'équation cherchée.

On trouve $\alpha = \frac{r^2 x' \pm r y' \sqrt{x'^2 + y'^2 - r^2}}{x'^2 + y'^2}$, et $\beta = \frac{r^2 y'^2 \pm r x' \sqrt{x'^2 + y'^2 - r^2}}{x'^2 + y'^2}$

Ces valeurs sont doubles quand le point donné est extérieur au cercle, puisqu'on a alors $x'^2 + y'^2 > r^2$. Elles sont simples quand le point donné est sur le cercle ; elles sont imaginaires quand il est intérieur au cercle.

Si l'on suppose α et β déterminés, en retranchant l'une de l'autre les deux premières équations ci-dessus, on trouvera pour l'équation de la tangente : $y - y' = -\frac{\alpha}{\beta}(x - x')$.

L'équation du rayon qui aboutit au point de contact est : $y = \frac{\alpha}{\beta} x$ (25). La tangente est donc perpendiculaire à ce rayon ; car la condition $aa' + 1 = o$ (29) est remplie.

42. On appelle *normale* à une courbe la perpendiculaire menée à la tangente par le point de tangence. L'équation de la normale au cercle, en nommant toujours α et β les coordonnées du point de tangence, sera de la forme $y - \beta = a(x - \alpha)$. Mais puisque la normale est perpendiculaire à la tangente, on a : $a = \frac{\beta}{\alpha}$; l'équation de la normale devient ainsi $y - \beta = \frac{\beta}{\alpha}(x - \alpha)$, équation qui se réduit à $y = \frac{\beta}{\alpha} x$. Cette équation est celle du rayon qui aboutit au point de tangence : ainsi, *dans le cercle, toutes les normales passent par le centre.*

DE L'ELLIPSE.

43. Si l'on résout l'équation $My^2 + Nx^2 = R$ (37) successivement par rapport à y et à x, on reconnaît facilement que *chacun des axes des coordonnées divise en deux parties égale, toutes les cordes parallèles à l'autre.* Ces lignes sont donc des diamètres (31) qui divisent chacun la courbe en deux parties égales ; on les nomme les *axes* de l'ellipse. Les points où la courbe rencontre ses axes, se nomment ses *sommets.*

44. Si l'on élimine x et y entre l'équation $My^2 + Nx^2 = R$ de l'ellipse (fig. 115) et l'équation $y = ax$ d'une droite MM' qui passe par l'origine, on obtient des valeurs égales et de signes contraires ; d'où il suit que la distance AM égale la distance AM'. Ainsi *le point* A *est le milieu de toutes les cordes qui passent par ce point ;* pour cette raison on le nomme le *centre* de l'ellipse.

45. Si l'on nomme a le demi-axe AB et b le demi-axe AC, on aura, en faisant successivement $y = o$ et $x = o$ dans l'équation de la courbe, $a^2 = \frac{R}{N}$ et $b^2 = \frac{R}{M}$,

d'où $$N = \frac{R}{a^2} \text{ et } M = \frac{R}{b^2}.$$

en substituant ces valeurs dans l'équation de l'ellipse, elle devient :

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

Telle est l'équation de l'ellipse rapportée à son centre et à ses axes.

Quand $b = a$, l'ellipse devient un cercle.

46. Cette équation donne $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$. Soit $Y^2 + x^2 = a$. L'équation du cercle décrit sur le grand axe comme diamètre, on aura : $Y^2 = a^2 - x^2$; par conséquent $y : Y :: b : a$.

Si donc on décrit, du centre de l'ellipse, avec les rayons a et b, deux cercles BAB', CAC' (fig. 114), qu'on élève l'ordonnée quelconque NP, qu'on joigne AN qui coupe la petite circonférence en n, et qu'on mène nM, parallèle à AP, le point M sera à l'ellipse ; car on aura PM : PN :: AN : AN, ou PM : Y :: b : a.

Des foyers et des directrices.

47. De l'extrémité C du petit axe comme centre (fig. 115) avec un rayon égal à a, décrivons deux arcs de cercle qui coupent BB' en F et F', on aura, en appelant c les distances égales AF, AF', $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Les points F et F', ainsi déterminés, se nomment les *foyers* de l'ellipse, et la distance FF' = 2c est l'*excentricité*.

48. On nomme *rayons vecteurs* les distances MF, MF' d'un point quelconque de l'ellipse au foyer. Si l'on abaisse l'ordonnée MP, on aura : $MF = \sqrt{y^2 + (c-x)^2}$ et $MF' = \sqrt{y^2 + (c+x)^2}$.

En mettant pour y sa valeur tirée de l'équation de la courbe, il vient $MF = a - \frac{cx}{a}$ et $MF' = a + \frac{cx}{a}$.

Les rayons vecteurs sont donc des fonctions rationnelles de l'abscisse.

On trouve de plus MF + MF' = 2a. Ainsi, *la somme des rayons vecteurs qui aboutissent à un même point de l'ellipse, équivaut au grand axe.*

Si l'on cherche quelle est la courbe qui jouit de cette propriété, on retombe sur l'équation de l'ellipse : ainsi cette propriété est caractéristique.

49. Cette propriété fournit le moyen de *décrire l'ellipse d'un mouvement continu.* Il suffit pour cela de fixer aux foyers les extrémités d'un cordeau égal en longueur au grand axe, et de faire glisser un piquet le long de ce cordeau en le maintenant toujours tendu.

On pourrait aussi, à l'aide de cette même propriété, trouver successivement chaque point de l'ellipse par l'intersection de deux cercles qui auraient leurs centres aux foyers.

50. Élevons une perpendiculaire à l'axe des x, en un point D, tel qu'on ait AF : AB :: AB : AD, d'où $AD = \frac{a^2}{c}$. La distance ME d'un point de la courbe à la droite DE, sera égale à :

$$PD = AD - AP = \frac{a^2}{c} - x = \frac{a^2 - cx}{c}.$$

Mais on a : $MF = a - \frac{cx}{a} = \frac{a^2 - cx}{a}$. Donc, $ME : MF :: a : c$.

Il existe du côté du foyer F′ une droite qui jouit de la même propriété. Ces droites se nomment les *directrices*. D'après ce qu'on vient de voir, *il y a un rapport constant entre les distances d'un point de l'ellipse au foyer et à la directrice voisine de ce foyer*.

De la tangente et de la normale.

51. Par un calcul entièrement analogue à celui du n° **40**, on trouve que l'équation de la tangente à l'ellipse au point dont les coordonnées sont x' et y', est $y - y' = -\frac{b^2x'}{a^2y'}(x - x')$ ou

$$a^2y'y + b^2x'x = a^2b^2.$$

La tangente trigonométrique de l'angle que fait cette droite avec l'axe des x est : $\omega = -\frac{b^2x'}{a^2y'}$.

Cette valeur restant la même quand on change x' et y' en $-x$, $-y'$, il s'ensuit que, *si une corde passe par le centre, les tangentes menées aux extrémités de cette corde sont parallèles*.

Quand $x' = o$, on a : $\omega = o$, et quand $y' = o$, on a : $\omega = \infty$.

52. Si x'', y'' sont les coordonnées d'un point extérieur à l'ellipse, et que l'on veuille par ce point lui mener une tangente, on aura pour déterminer les coordonnées x' et y' du point de tangence les équations :

$$a^2y'y'' + b^2x'x'' = a^2b^2 \text{ et } a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2.$$

53. L'équation de la normale est évidemment $y - y' = \frac{a^2y'}{b^2x'}(x - x')$ puisqu'elle doit être perpendiculaire à la tangente, et passer par le point de tangence. L'abscisse du point où la normale rencontre le grand axe est : $s = x' - \frac{b^2y'x'}{a^2y'} = \frac{c^2x'}{a^2}$.

54. Si MN (fig. 116) est la normale au point M, on aura, d'après le n° précédent $FN = c - \frac{c^2x'}{a^2} = \frac{a^2c - c^2x'}{a^2}$

et $$F'N = c + \frac{c^2x'}{a^2} = \frac{a^2c + c^2x'}{a^2}.$$

On a d'ailleurs : $FM = a - \frac{cx'}{a} = \frac{a^2 - cx'}{a}$ et $F'N = a + \frac{cx'}{a} = \frac{a + cx'}{a}$

On a donc la proportion : FN : F′N :: FM : F′M. Donc, *la normale divise en deux parties égales l'angle des rayons vecteurs*.

55. Il suit de là que, pour mener une tangente à l'ellipse, au point M, il suffit de diviser en deux parties égales l'angle FMH formé par l'un des rayons vecteurs et le prolongement de l'autre.

Pour mener une tangente à l'ellipse par le point extérieur S, de ce point comme centre avec le rayon SF, on décrira un arc de cercle ; du point F' avec un rayon égal au grand axe, on décrira un second arc de cercle qui coupera le premier au point H ; on joindra F'H qui coupera l'ellipse en M ; on joindra SM qui sera la tangente demandée. Car, puisque F'H $= 2a$, il s'ensuit que MH = MF ; d'ailleurs, SH = SF ; la droite SM divise donc l'angle FMH en deux parties égales.

Des diamètres.

56. Les formules, pour passer d'un système de coordonnées rectangulaires à un système de coordonnées obliques, sans changer l'origine, sont (**21**) :

$$y = x' \sin. \alpha + y' \sin. \beta \text{ et } x = x' \cos. \alpha + y' \cos. \beta.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation de l'ellipse, et qu'on profite de l'indétermination de α et β pour faire disparaître le rectangle des variables, l'équation reviendraà la forme :

$$a'^2 y'^2 + b'^2 x'^2 = a'^2 b'^2;$$

et l'on aura pour condition $a^2 \sin. \alpha \sin. \beta + b^2 \cos. \alpha \cos. \beta = o$, qu'on peut écrire : $\quad \text{tang. } \alpha \text{ tang. } \beta = -\frac{b^2}{a^2}.$

Si donc on donne à l'un des axes des coordonnées obliques telle direction que l'on voudra, on en déduira la direction de l'autre.

57. Il suit de la forme même de l'équation

$$a'^2 y'^2 + b'^2 x'^2 = a'^2 b'^2,$$

que chacun des nouveaux axes des coordonnées divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre; chacune de ces lignes est donc un diamètre ; et comme la direction de l'un de ces axes est toujours arbitraire, *toute droite qui passe par le centre de l'ellipse est un diamètre.*

On nomme *diamètres conjugués* ceux qui, pris pour axes des coordonnées, conservent à l'équation de l'ellipse la même forme que lorsqu'elle est rapportée à ses axes rectangulaires.

58. Les calculs qui conduisent à l'équation de la tangente étant indépendants de la direction des coordonnées, la tangente à l'ellipse, rapportée à ses diamètres conjugués, sera, en désignant par x'', y'' les coordonnées du point de tangence :

$$y - y'' = \frac{b'^2 x''}{a'^2 y''} (x - x'').$$

A l'extrémité du diamètre sur lequel se comptent les x, on a $y'' = o$, et l'équation devient $x = x''$, équation d'une parallèle à l'axe des y. A l'extrémité du diamètre sur lequel se comptent les y, on a $x'' = o$, et l'équation devient $y = y''$, équation d'une parallèle à l'axe des x.

Ainsi, la *tangente à l'extrémité d'un diamètre est parallèle aux cordes que ce diamètre divise en deux parties égales*, et *la tangente à l'extrémité d'un diamètre est parallèle au conjugué de ce diamètre*.

Ces théorèmes s'appliquent, comme cas particuliers, aux axes rectangulaires.

Des cordes supplémentaires.

59. On appelle *cordes supplémentaires* de l'ellipse celles qui sont menées d'un point de la courbe aux extrémités d'un même diamètre.

Soit $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ l'équation d'une ellipse (fig. 117) rapportée à ses axes rectangulaires ; soit DD' un diamètre quelconque, et MD, MD' deux cordes supplémentaires ; appellons x', y', les coordonnées du point D, celles du point D' seront $-x'$, et $-y'$; soient enfin x'', y'' les coordonnées du point M,

l'équation de MD sera : $y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x')$;

celle de MD' sera : $y + y' = \frac{y'' + y'}{x'' + x'}(x + x')$;

et si t et t' désignent les tangentes trigonométriques des angles que les cordes font avec le grand axe, on aura :

$$tt' = \frac{y''^2 - y'^2}{x''^2 - x'^2}.$$

Mais on a : $a^2y''^2 + b^2x''^2 = a^2b^2$ et $a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2$,

d'où l'on tire $\quad a^2(y''^2 - y'^2) + b^2(x''^2 - x'^2) = o$,

et $\quad \frac{y''^2 - y'^2}{x''^2 - x'^2} = -\frac{b^2}{a^2}$. Donc, $tt' = -\frac{b^2}{a^2}$.

Cette condition étant précisément celle (56) qui lie les directions des diamètres conjugués, il s'ensuit que, *si l'on mène deux diamètres parallèles à deux cordes supplémentaires* MD, MD', *ces diamètres seront conjugués*.

60. La condition $tt' = -\frac{b^2}{a^2}$ étant indépendante de x' et y', est la même pour tous les diamètres. Il suit de là que si par un point de l'ellipse on mène deux cordes parallèles aux premières, elles seront supplémentaires ; c'est-à-dire que la droite qui joindra leurs extrémités sera un diamètre.

61. Ce qui précède, et ce qui a été dit au n° 58, donnent un nouveau moyen de mener une tangente à une ellipse en un point M (fig. 118). Pour cela menons le diamètre MM', puis une corde quelconque B'N parallèle à ce diamètre ; tirons B'AB et NB, et menons MT parallèle à NB ; cette droite MT sera la tangente cherchée. Car si l'on mène DD' parallèle à NB, les diamètres DD' et MM' seront conjugués (59, 58).

62. *Tracer deux diamètres conjugués qui fassent entre eux un angle donné.* Sur un diamètre quelconque BB' (fig. 118) décrivons un segment circulaire capable de l'angle donné, et qui coupe l'ellipse en un point N. Tirons les cordes supplémentaires NB, NB', les diamètres parallèles à ces cordes seront les diamètres cherchés.

63. On démontre, à l'aide des valeurs de a' et b' que donneraient les calculs indiqués au nº 56, que *le parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués est équivalent au rectangle des axes*, et que *la somme des carrés des demi-diamètres conjugués équivaut à la somme des carrés des demi axes.*

DE L'HYPERBOLE.

64. En raisonnant sur l'équation $My^2 - Nx^2 = -R$ (57) comme on a raisonné sur celle de l'ellipse, on reconnaît que chacun des deux axes de coordonnées divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre, ainsi que la courbe elle-même : ils prennent pour cette raison le nom d'*axes* de la courbe. L'origine des coordonnées est le milieu de toutes les cordes qui y passent, et se nomme le *centre* de la courbe.

65. Si l'on fait $\frac{R}{M} = b^2$ et $\frac{R}{N} = a^2$ l'équation prend la forme $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$: telle est l'équation de l'hyperbole rapportée à son centre et à ses axes. Quand on y fait $y = o$, on trouve $x = \pm a$; mais quand on fait $x = o$, on trouve $y = \pm b\sqrt{-1}$. Ainsi, l'un des axes coupe seul la courbe, il se nomme le *premier axe*, ou *l'axe transverse*; l'autre prend le nom de *second axe*. Les points où la courbe rencontre son premier axe, se nomment ses *sommets*.

On voit également que y qui est nul pour $x = \pm a$, est imaginaire entre ces deux valeurs de x, et croît ensuite indéfiniment avec x, quand sa valeur absolue dépasse a.

Quand $a = b$, on a : $y^2 - x^2 = -a^2$ et l'hyperbole est dite *équilatère.*

Des foyers et des directrices.

66. Les foyers de l'hyperbole sont des points placés sur l'axe réel de chaque côté du centre à une distance marquée par

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Les rayons vecteurs MF, MF' (fig. 119) ont pour expressions $MF = \frac{cx}{a} - a$ et $MF' = \frac{cx}{a} + a$ (48), d'où il suit que *la différence des rayons vecteurs équivaut au premier axe.*

67. Pour décrire l'hyperbole d'un mouvement continu, il suffit donc de fixer au foyer F' l'extrémité d'une règle qui puisse tourner autour de ce point, de fixer à l'autre extrémité de la règle et

au foyer F les bouts d'un cordeau d'une longueur égale à celle de la règle diminuée de $2a$, et de faire glisser un piquet le long de la règle en forçant le cordeau à s'y appliquer.

On pourrait aussi décrire l'hyperbole par points, en s'appuyant de même sur la propriété des rayons vecteurs.

68. La propriété des directrices est analogue à celle de l'ellipse (**50**).

De la tangente et de la normale.

69. Par un calcul analogue à celui du n° **40** on trouvera pour l'équation de la tangente à l'hyperbole, en nommant x' et y' les coordonnées du point de tangence, $a^2 y' y - b^2 x' x = - a^2 b^2$ et la tangente trigonométrique de l'angle que fait cette droite avec l'axe des x sera : $\omega = \frac{b^2 x'}{a^2 y'}$.

On conclut de cette valeur que les tangentes menées aux extrémités d'une même corde passant par le centre, qui ont respectivement pour coordonnées x', y' et $-x'$, $-y'$, sont parallèles.

Quand $y' = o$ on a : $\omega = \infty$.

70. Par des calculs analogues à ceux du n° **54**, on démontre que *la tangente à l'hyperbole divise en deux parties égales l'angle des rayons vecteurs.*

Ainsi, pour mener une tangente à l'hyperbole par le point M (fig. **119**) pris sur la courbe, on partagera en deux parties égales l'angle F'MF.

Pour mener une tangente par un point S extérieur à la courbe, on opèrera comme au n° **55** : le point H étant déterminé par l'intersection de deux arcs de cercles décrits, l'un du point S comme centre avec un rayon égal à SF, l'autre du point F' comme centre, avec un rayon égal à $2a$, on joindra F'H qui rencontrera la courbe en M, et SM sera la tangente cherchée, car on a SH = SF, et on aura : MH = MF (**66**).

71. Pour avoir l'équation de la tangente menée par un point extérieur, à la courbe, on opèrera comme au n° **52**.

72. On trouvera pour l'équation de la normale (**53**)

$$y - y' = - \frac{a^2}{b^2} \frac{y'}{x'} (x - x')$$ en nommant x' et y' les coordonnées du point de tangence. L'abcisse du point où elle rencontre le premier axe est : $s = \frac{c^2 x}{a^2}$.

Des diamètres et des cordes supplémentaires.

73. En opérant comme aux n^{os} **56**.... à **62** (il suffit, dans les calculs relatifs à l'ellipse, de remplacer $+b^2$ par $-b^2$) on reconnaîtra que :

1° Il existe une infinité de systèmes de coordonnées obliques pour lesquelles l'équation de l'hyperbole conserve la forme qu'elle a rapportée à ses axes (56) ;

2° Que ces nouveaux axes de coordonnées sont des diamètres, mais qu'un seul rencontre la courbe (57, 65);

3° Que tous les diamètres passent par le centre. Ceux pour lesquels l'équation de la courbe conserve sa forme sont dits *conjugués* (57);

4° Que la tangente menée à l'extrémité d'un diamètre est parallèle aux cordes que ce diamètre divise en deux parties égales, c'est-à-dire parallèle au conjugué de ce diamètre (58) ;

5° Que la condition qui lie les directions des cordes supplémentaires est la même que celle qui lie les directions des diamètres conjugués, et qu'ainsi, lorsqu'on mène deux diamètres parallèles à deux cordes supplémentaires, ces diamètres sont conjugués (59);

6° Que la condition citée étant la même pour tous les diamètres, si par un point de l'hyperbole on mène deux cordes parallèles à deux cordes supplémentaires, les premières seront elles-mêmes supplémentaires (60);

7° Que l'on peut se servir de cette propriété pour mener une tangente à l'hyperbole par un point donné sur cette courbe (61) ;

8° On trouvera comme pour l'ellipse deux diamètres qui fassent entre eux un angle donné (62) ;

Remarquons que la relation qui lie les directions des diamètres conjugués est, pour l'hyperbole, tang. α tang. $\beta = \frac{b^2}{a^2}$ (56).

Si l'on fait tang. $\alpha = \pm \frac{b}{a}$, on en déduit tang. $\beta = \pm \frac{b}{a}$; en sorte que les deux diamètres conjugués se confondent.

74. Le premier théorème du n° **62** s'applique à l'hyperbole ; le second est modifié ainsi : ***la différence des carrés des demi-diamètres conjugués équivaut à la différence des carrés des demi-axes.***

Des asymptotes.

75. Si, sans changer l'origine des coordonnées, on passe à des axes obliques, tels qu'on ait :

$$\text{tang. } \alpha = +\frac{b}{a} \text{ et tang. } \beta = -\frac{b}{a},$$

les carrés des variables disparaissent ; et en tirant des équations précédentes les valeurs de sin. α, cos. α, sin. β, cos. β, on réduit l'équation à $x'y' = \frac{c^2}{4^2}$ ou $xy = m^2$.

D'après les valeurs mêmes de tang. α et tang. β on voit, que pour

obtenir les nouveaux axes, il suffit de tracer les diagonales du rectangle construit sur les axes de l'hyperbole.

L'équation $xy = m^2$ montre clairement que y devient d'autant plus petit que x devient plus grand et réciproquement; en sorte que la courbe approche de plus en plus des axes des coordonnées, et, à une distance convenable de l'origine, sera aussi peu distante de ces axes qu'on le voudra.

Ces axes se nomment les *asymptotes* de l'hyperbole.

Remarquons que x et y sont toujours de même signe; et qu'ainsi la courbe ne s'étend que dans deux des quatre angles formés par les asymptotes.

Dans l'hyperbole équilatère on a :

$$\text{tang. } \alpha = +1 \text{ et tang } \beta. = -1,$$

les asymptotes sont alors rectangulaires.

76. Si x', y' et x'', y'' sont les coordonnées de deux points de l'hyperbole, l'équation de la sécante qui passe par ces points sera :

$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x')$: mais on aura : $x'y' = m^2$ et $x''y'' = m^2$

d'où $\frac{y' - y''}{x' - x''} = -\frac{x'x''}{m^2}$; l'équation de la sécante est donc:

$y - y' = -\frac{m^2}{x'x''}(x - x_1)$. Si la sécante devient tangente, on aura : $x' = x''$; l'équation de la tangente est donc :

$$y - y' = -\frac{m^2}{x'^2}(x - x_1).$$

Soit DMC (fig. 120) une tangente à l'hyperbole, comprise entre les asymptotes; en faisant successivement $x = o$ et $y = o$ dans l'équation de la tangente, on aura : $y = 2y'$ et $x = 2x_1$, c'est-à-dire, AD = 2MP et AC = 2AP; d'où il suit DC = 2MC, ou que *la partie de la tangente comprise entre les asymptotes est divisée en deux parties égales au point de tangence.* De là, un moyen fort simple de mener une tangente à l'hyperbole par un point donné sur cette courbe; car si M est le point donné, menons l'ordonnée MP, prenons PC = AP, et tirons CM, ce sera la tangente cherchée.

77. Il suit du numéro précédent que *les parties d'une sécante quelconque comprises entre la courbe et ses asymptotes, sont égales.* Car, soit nn' cette sécante: par le milieu I de la corde mm' menons le demi-diamètre AI; par le point M où ce diamètre rencontre la courbe menons la tangente DC; cette tangente sera parallèle à mm' (73, 4°). Mais puisque CM = MD, il s'ensuit que $In = In'$, donc, $In - Im = In' - Im'$, ou $mn = m'n'$.

Cette propriété fournit un moyen de construire l'hyperbole par points quand on connaît un premier point, et les asymptotes; car si m est ce point, en menant la corde quelconque nn' terminée

aux asymptotes, et prenant $nm' = nm$, le point m' sera à la courbe.

78. Le produit des lignes AD et AC étant $2y' \times 2x'$ ou $4m^2$ est une quantité constante; or, les triangles qui ont un angle commun sont entre eux comme les produits des côtés qui comprennent cet angle; il suit de là que l'aire du triangle DAC est constante. Il en est par conséquent de même de l'aire du triangle AMD qui est la moitié de BAC, et par suite, de l'aire du parallélogramme AMDN qui est le double de AMD. Si AM était le premier axe de l'hyperbole, le parallélogramme AMDN deviendrait un rectangle, dont l'aire serait ab (75). Donc, *l'aire de ce parallélogramme est équivalente au rectangle des demi-axes.*

79. AN étant parallèle à la corde mm', est sur la direction du conjugué de AM (73, 4°). Mais le parallélogramme construit sur les demi-diamètres conjugués est équivalent au rectangle des demi-axes (74); par conséquent, d'après le numéro précédent, AN est le demi-diamètre conjugué de AM. Ainsi *les asymptotes sont les diagonales communes de tous les parallélogrammes construits sur les demi-diamètres conjugués.*

Il résulte de là et de la construction du n° 76, un moyen fort simple de trouver le conjugué d'un diamètre donné.

DE LA PARABOLE.

80. L'équation $My^2 = Qx$ (37) donnant $y = \pm\sqrt{\frac{Qx}{M}}$, montre que l'axe des x divise en deux parties égales toutes les cordes parallèles à l'axe des y; l'axe des x est donc un diamètre de la parabole; il prend le nom d'*axe* de cette courbe; le point où elle coupe son axe, se nomme son *sommet.*

On voit sans peine que la courbe s'étend indéfiniment du côté des x positifs, passe par l'origine, qui est son sommet, et n'a aucun point du côté des x négatifs. (Ce serait le contraire pour l'équation $My^2 = -Qx$).

81. Si l'on fait $\frac{Q}{M} = 2p$ on aura : $y^2 = 2px$: telle est la forme ordinaire de l'équation de la parabole rapportée à son sommet.

Cette équation même fournit le moyen de construire la parabole par points; on n'a que des moyennes proportionnelles à chercher.

Du foyer et de la directrice.

82. Prenons sur l'axe AX (fig. 121) et de part et d'autre du point A les distances $AF = AD = \frac{p}{2}$, et élevons DC perpendiculaire à AX, le point F sera le *foyer* de la parabole, et la droite DB sa *directrice,*

Par un point quelconque M menons l'ordonnée MP, le rayon vecteur MF et la droite MC parallèle à l'axe;

on aura: $MC = PD = AD + AP = \frac{p}{2} + x$;

on aura aussi:

$$MF = \sqrt{\overline{MP}^2 + \overline{FP}^2} = \sqrt{y^2 + (x - \frac{p}{2})^2} = \sqrt{2px + (x - \frac{p}{2})^2} = x + \frac{p}{2}$$

Donc, MC = MF: donc, *chaque point de la parabole est également distant du foyer et de la directrice.*

Il suit de là que si on élève sur l'axe une perpendiculaire quelconque PM, et que du foyer comme centre avec un rayon égal à PD on décrive un arc de cercle qui coupe PM en M, ce point sera à la parabole.

On peut aussi décrire la parabole d'un mouvement continu. Pour cela on applique une équerre contre la directrice; un cordeau, de longueur égale au côté de l'équerre parallèle à l'axe, est fixé par une de ses extrémités au foyer, et par l'autre au bout de l'équerre; on fait glisser l'équerre le long de la directrice en maintenant le cordeau contre l'équerre à l'aide d'un piquet qui décrit la courbe.

De la tangente et de la normale.

83. L'équation d'une droite qui passe par deux points dont les coordonnées sont x', y' et x'', y'' est $y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x')$.

si ces points sont sur la parabole, on a: $y'^2 = 2px'$, et $y''^2 = 2px''$, d'où $y'^2 - y''^2 = 2p(x' - x'')$ et $\frac{y' - y''}{x' - x''} = \frac{2p}{y' + y''}$. L'équation de la sécante est donc: $y - y' = \frac{2p}{y' + y''}(x - x')$.

Si la sécante devient tangente, on a: $y'' = y'$ et l'équation de la tangente devient: $y - y' = \frac{p}{y'}(x - x')$ ou $yy' = p(x + x')$.

La tangente trigonométrique de l'angle que cette droite fait avec l'axe étant $\omega = \frac{p}{y'}$, si le point de tangence est au sommet, on a: $y' = 0$, et $\omega = \infty$.

Ainsi l'axe des y touche la courbe à l'origine.

84. Si l'on fait $y = 0$ dans l'équation de la tangente, on trouve $x = -x'$; ainsi AT (fig. 122) est égal à AP, d'où il suit $TP = 2x'$. La distance TP se nomme la *sous-tangente*; on voit donc que *la sous-tangente est double de l'abscisse du point de tangence.*

De là, un moyen fort simple de mener une tangente par un point pris sur la parabole.

85. Pour déterminer l'équation de la tangente menée par un point donné dont les coordonnées sont $\sqrt{x''y''}$, on aura : en nommant x', y' celles du point de tangence :

$$y''y' = p\,(x''+x'),\ y'^2 = 2px' \text{ et } yy' = p\,(x+x').$$

86. L'équation de la normale est évidemment :

$$y - y' = -\frac{y'}{p}(x - x').$$

Si l'on y fait $y = o$, on trouve $x = p + x'$.

MN étant la normale, la distance PN se nomme la *sous-normale ;* on a d'après ce qui précède PN $=$ AN $-$ AP $= p + x' - x' = p$. Ainsi *la sous-normale est constante.*

87. On a trouvé (82) MF $= x + \frac{p}{2}$. Mais puisque AT $= x$ (84) il s'en suit que TF $= x + \frac{p}{2} =$ MF. Le triangle MFT est donc isocèle, et si l'on mène par le point M, la droite MQ parallèle à l'axe, on aura l'angle TMF $=$ MTF $=$ TMQ. Donc, *la tangente divise en deux parties égales l'angle formé par le rayon vecteur du point de tangence et une parallèle à l'axe menée par ce point.* Il est facile de voir qu'il en est de même de la normale.

De là, un nouveau moyen de mener une tangente par un point pris sur la courbe.

Pour mener une tangente par un point S extérieur à la courbe, décrivons de ce point comme centre avec le rayon SF, un arc de cercle qui coupe la directrice en Q ; par le point Q menons QM parallèle à l'axe, et qui coupe la courbe en M, joignons SM qui sera la tangente cherchée. Car on aura : MQ$=$MF (82), on a d'ailleurs SQ$=$SF ; la droite SM divise donc en deux parties égales l'angle QMF ; donc, etc.

Des diamètres.

88. Transportons l'origine des coordonnées en un point A' de la courbe, dont les coordonnées sont a et b ; prenons pour axes la tangente A'Y' et la droite A'X' parallèle à l'axe. Dans les formules $x = a + x' \cos. \alpha + y' \cos. \beta$, $y = b + x' \sin. \alpha + y' \sin. \beta$, nous aurons : $b^2 = 2\,p\,a$, $\alpha = o$, d'où $\cos. \alpha = 1$ et $\sin. \alpha = o$, et $\text{tang}. \beta = \frac{p}{b}$ (83) d'où $\sin. \beta = \frac{p}{\sqrt{p^2+b^2}}$ et $\cos. \beta = \frac{b}{\sqrt{p^2+b^2}}$.

A l'aide de ces valeurs, substituées dans les formules précédentes, l'équation $y^2 = 2\,px$ devient : $y'^2 = \frac{2\,(b^2+p^2)}{p}\,x' = 2\,p'x'$, équation qui montre que A'X' divise en deux parties égales toutes les cordes parallèles à la tangente A'Y' ; la droite A'X' est donc un diamètre.

On démontrerait sans peine que, par rapport à ce diamètre, la sous-tangente est encore double de l'abscisse.

DES COORDONNÉES POLAIRES.

89. Au lieu de prendre pour coordonnées d'un point les distances perpendiculaires ou obliques de ce point à deux droites fixes, on peut prendre la distance de ce point à un point fixe, et l'angle que fait avec une droite fixe la droite qui mesure cette distance. Cette distance se nomme le *rayon vecteur*, et le point fixe se nomme le *pôle*; c'est pour cette raison que ces coordonnées sont dites *polaires*.

Soient MP, AP, ou y et x les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque M (fig. 124.); soit O le pôle, OZ la droite fixe, OQ une parallèle à AX, OM le rayon vecteur, que nous désignerons par ρ; appelons α l'angle QOZ, et ω l'angle MOZ; soient enfin a et b les coordonnées AN et ON du pôle, il est facile de voir qu'on aura :

$$x = a + \rho \cos. (\omega + \alpha) \text{ et } y = b + \rho \sin. (\omega + \alpha).$$

Ces équations serviront à passer des coordonnées rectangulaires aux coordonnées polaires.

90. On pourrait obtenir l'équation polaire de l'ellipse à l'aide des formules précédentes, mais il est plus simple d'opérer directement.

Prenons pour pôle le foyer F' (fig. 115); si AP est l'abscisse x du point M, et F'M son rayon vecteur ρ, on aura (48) : $\rho = a + \frac{cx}{a}$. Mais x = F'P—AF' = F'P—c, ou en nommant ω l'angle MF'P, $x = +\rho \cos. \omega - c$. Par conséquent, $\rho = a + \frac{c(\rho \cos. \omega - c)}{a}$, d'où $\rho = \frac{b^2}{a - c. \cos. \omega}$. Posons $\frac{b^2}{a} = p$ et $\frac{c}{a} = e$, il viendra : $\rho = \frac{p}{1 - e. \cos \omega}$. La quantité $2p$ se nomme le *paramètre* de l'ellipse : *la quantité* e *est plus petite que l'unité.*

En faisant $\omega = 90°$ on trouve $\rho = p$: donc, *la corde menée par le foyer, perpendiculairement au grand axe, est égale au paramètre.*

91. Les mêmes calculs donnent pour l'équation polaire de l'hyperbole la même équation $\rho = \frac{p}{1 - e \cos. \omega}$ dans laquelle on a toujours $p = \frac{b^2}{a}$, mais où *la quantité* e, égale à $\frac{c}{a}$ *est plus grande que l'unité.*

On reconnaît encore que *la corde menée par le foyer, perpendiculairement au premier axe, est égale au paramètre 2p.*

92. On a trouvé (82) (fig. 121) FM $= x + \frac{p}{2}$. Si l'on prend F pour pôle, on aura : x = AF + FP $= \frac{p}{2} \pm \rho \cos. \omega$. Il suit de là qu'on a FM $= \rho = \frac{p}{2} + \rho \cos. \omega + \frac{p}{2}$, d'où $\rho = \frac{p}{1 - \cos. \omega}$.

La corde menée par le foyer, perpendiculairement à l'axe, est égale à la quantité 2p que l'on nomme encore le paramètre.

93. On voit que l'équation polaire $\rho = \frac{p}{1-e\cos.\omega}$ représentera une ellipse, une parabole, ou une hyperbole, suivant qu'on aura : $e < 1$, $e = 1$, ou $e > 1$. La discussion de cette formule dans ces trois cas, indique en effet la forme particulière à ces trois courbes. (Les valeurs négatives de ρ doivent être portées sur ce rayon vecteur, et par rapport au pôle, en sens contraire des valeurs positives).

94. Les courbes du second degré portent le nom de *sections coniques*, parce qu'on peut toujours les obtenir par l'intersection d'un cône et d'un plan. La démonstration complète de cette propriété du cône appartient à la Géométrie analytique à trois dimensions.

STATIQUE.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

1. On appelle *Statique* la partie des mathématiques qui traite de l'équilibre des forces. On nomme *force* toute cause qui produit, où tend à produire le mouvement.

Toute force agit suivant une certaine direction, et avec une certaine intensité, au point où elle est appliquée ; on peut donc la représenter en grandeur et en direction par une droite passant par son point d'application : il suffit pour cela de prendre pour unité une force connue, et de représenter son intensité par l'unité de longueur.

2. L'effet d'une force n'est point altéré lorsque, sans changer sa direction, on transporte son point d'application en un point quelconque de cette direction ; pourvu que ce second point soit lié invariablement au premier.

Deux forces égales, et de direction opposée, appliquées en un même point, ou en des points de leur direction commune invariablement liés entre eux, se détruisent mutuellement, en ce sens que l'effet est le même que si ces forces n'existaient pas.

Quand plusieurs forces, appliquées en différents points invariablement liés entre eux se font équilibre, l'équilibre n'est pas troublé si on applique en un point de ce système deux forces égales et opposées. Réciproquement : si deux forces égales et opposées font partie d'un système de forces qui se font équilibre, on pourra les supprimer sans troubler l'équilibre.

COMPOSITION ET DÉCOMPOSITION DES FORCES.

3. Il arrive souvent qu'une seule force soit capable de produire le même effet que plusieurs : cette force prend alors le nom de *résultante*, et les forces qu'elle remplace se nomment ses *composantes*. Ainsi, *composer* plusieurs forces c'est chercher leur résultante ; *décomposer* une force c'est chercher ses composantes.

4. *Deux forces appliquées en un même point et dans la même direction, ont pour résultante une force, de même direction, égale à leur somme.* Il

suit de là que la résultante d'un nombre quelconque de forces de même direction appliquées en un même point, est une force de même direction égale à leur somme.

5. Soient à composer deux forces inégales P et Q, de directions opposées, et appliquées en un même point : soit P la plus grande, et supposons qu'on l'ait décomposée en deux autres de même direction Q' et R, telles qu'on ait $Q'=Q$. Les forces Q' et Q, égales et opposées pourront être supprimées, et la résultante sera R, égale à $P-Q$. Ainsi, *la résultante de deux forces inégales et de directions opposées, appliquées en un même point, est égale à leur différence, et de même direction que la plus grande.*

Si l'on regarde comme positive l'une des deux forces, et comme négative celle qui agit en sens contraire, on pourra encore dire que leur résultante est égale à leur *somme*, en prenant ce mot dans son sens algébrique.

6. Il suit de ce qui précède que si un nombre quelconque de forces, appliquées en un même point, agissent les unes dans une certaine direction, les autres dans la direction opposée, leur résultante est égale à l'excès de la somme de celles qui agissent dans un sens sur la somme de celles qui agissent dans l'autre, et agit elle-même dans le sens de la plus grande somme.

Composition des forces parallèles.

7. *La résultante de deux forces* P *et* Q (fig. 125) *égales et parallèles, appliquées aux extrémités d'une droite inflexible* AB, *est parallèle à ces forces, égale à leur somme, et sa direction passe par le milieu de la droite* AB.

En effet : appliquons dans la direction de AB aux points A et B, deux forces P', Q', égales aux premières, et opposées l'une à l'autre, l'effet des forces P et Q ne sera pas changé. Mais les forces P et P' ont nécessairement une résultante M dont la direction divise l'angle PAP' en deux parties égales, car il n'y a pas de raison pour que cette direction soit plus rapprochée de celle de P que de celle de P' ou *vice versâ*. Les forces Q, Q', ont de même une résultante N dont la direction partage en deux parties égales l'angle QBQ'. Soit O le point où les directions de ces deux résultantes se coupent. Supposons qu'après avoir transporté la résultante M au point O on l'ait redécomposée en deux forces p et p' égales et parallèles à P et P', et qu'après avoir transporté en O la résultante N on l'ait de même décomposée en deux forces q et q' égales et parallèles à Q et à Q', l'effet des quatre forces p, p', q, q' sera le même que celui des quatre forces P, P', Q, Q'. Or, les forces p' et q' égales et opposées peuvent être supprimées ; les forces p et q de même direction s'ajoutent ; la résultante totale est donc : $R=p+q$. Cette force est d'ailleurs parallèle aux forces P et Q. Il est de plus facile de voir que le point I où sa direction rencontre AB est le milieu de

cette droite. Car l'on a l'angle OAI=P'AM et l'angle AOI=PAM, donc, l'angle OAI=AOI, donc, OI=AI ; on démontrerait de même que OI=BI ; donc, AI=BI.

8. *La résultante de deux forces parallèles* P, Q (fig. 126) *appliquées aux extrémités d'une droite inflexible* AB, *est parallèle à ces forces, égale à leur somme, et sa direction partage la droite* AB *en parties réciproquement proportionnelles à ces forces*. En effet: partageons la droite AB au point K en parties directement proportionnelles aux forces P et Q; prenons AA'=AK et BB'=BK.

1° Si P et Q ont une commune mesure f et qu'on ait : $P=mf$ et $Q=nf$, partageons AB en $m+n$ parties égales; à cause de la proportion AK : BK : : P : Q, d'où AK : BK : : $m : n$, la longueur AK sera partagée en m parties égales, et la longueur BK en n parties égales aux premières. Continuons cette division jusqu'en A' et en B', la ligne A'B' sera partagée en $2(m+n)$ petites longueurs l. Décomposons la force P en m forces f, et substituons à chaque force f deux autres forces f' parallèles, égales à $\frac{1}{2}f$ et appliquées aux milieux de deux petites longueurs l situées à égale distance de A. Décomposons de même la force Q en n forces f, et substituons à chaque force f deux autres forces f' parallèles, égales à $\frac{1}{2}f$ et appliquées aux milieux de deux petites longueurs l situées à égale distance de B. Le système des forces P et Q appliquées aux points A et B se trouvera remplacé par un système de $2(m+n)$ petites forces f' parallèles entre elles, appliquées aux milieux des $2(m+n)$ petites longueurs l dans lesquelles la droite A'B' a été divisée. Soit maintenant I le milieu de A'B'; en composant deux à deux les petites forces f' situées à égales distances du point I, on obtiendra une résultante totale R, parallèle à ces petites forces, et par conséquent aux forces P et Q, et égale à la somme totale de ces petites forces, c'est-à-dire à la somme de P et de Q. De plus, comme on a, d'après la construction A'B'=2.AB et aussi A'B' = 2.A'I, il s'ensuit A'I=AB; donc, IB = AA'=AK, et par conséquent, AI = BK : or puisqu'on a P : Q : : AK : BK on aura aussi : P : Q : : IB : IA.

2° Si P et Q sont incommensurables, déterminons encore le point I par la proportion P : Q : : IB : IA. Remplaçons la force P par n petites forces égales f, en sorte qu'on ait : $P=n.f$. La force Q pourra être remplacée par un certain nombre de petites forces égales à f, et dont nous désignerons la somme par Q', plus une force δ plus petite que chacune des forces f, en sorte qu'on aura : $Q=Q'+\delta$. Les forces P et Q' seront commensurables, et si l'on nomme R leur résultante, et que O soit son point d'application, on aura, d'après la première partie de ce théorème : $R=P+Q'$ et P : Q : : OB : OA. Mais on a: $Q'=Q-\delta$, $\delta<f$, $f=\frac{P}{n}$. Or, en prenant n assez grand, c'est-à-dire en remplaçant la force P par un

nombre suffisant de petites forces égales, on pourra rendre f et par suite δ plus petites que toute quantité donnée : on est donc en droit, dans l'égalité $Q' = Q - \delta$, de négliger δ, ce qui donne $Q' = Q$. Il vient alors $R = P + Q$ et $P : Q :: OB : OA$; c'est-à-dire que le point O se confond avec le point I.

9. Étant données tant de forces parallèles qu'on voudra, en composant la première avec la seconde, puis leur résultante avec la troisième, et ainsi de suite, on obtiendra la résultante totale.

10. Soient P et Q (fig. 127) deux forces parallèles appliquées aux points A et B, et R leur résultante appliquée en C en sens contraire ; les trois forces P, Q, R se feront équilibre ; la force Q peut donc être considérée comme égale et opposée à la résultante des forces P et R. Donc, *la résultante de deux forces parallèles, mais de directions contraires, est parallèle à ces forces, égale à leur différence, et dirigée dans le sens de la plus grande.* On déterminera le point d'application C par la proportion $BC : AC :: P : R - P$.

11. On tire de la proportion précédente $BC = \frac{AC \times P}{R - P}$. Quand R égale P, la distance BC devient infinie ; c'est-à-dire que *deux forces égales, parallèles et de directions contraires, ne sauraient être remplacées par une force unique.* Ces deux forces forment ce qu'on nomme un *couple.*

12. Les opérations nécessaires pour obtenir la résultante d'un système de forces parallèles, ne dépendant que de la grandeur de ces forces et des distances mutuelles de leurs points d'application, mais nullement de l'inclinaison de ces forces par rapport à ces distances, il s'ensuit que si l'on change à la fois la direction commune de toutes les forces du système, pourvu que l'on conserve leur parallélisme, la grandeur et le point d'application de la résultante ne seront point changés. Ce point d'application de la résultante, qui reste le même quelle que soit la direction commune des forces parallèles composantes, se nomme le *centre des forces parallèles.*

Parallélogramme des forces.

13. *La résultante des deux forces* P et Q (fig. 128) *appliquées en un même point* A, *et représentées en grandeur et en direction par les droites* AB, AC, *est dirigée suivant la diagonale* AE *du parallélogramme construit sur ces droites.* Car si l'on construit le losange CDHE, et qu'on applique en D et H et suivant HD les forces Q' et Q'' égales à Q et de directions opposées, la résultante des forces Q et Q' divisera en deux parties égales l'angle QDQ', et passera au point E ; la résultante des forces Q'' et P, sera dirigée suivant CE, puisqu'elles sont parallèles et qu'on a :

$$Q : P :: AC : AB \text{ ou } Q'' : P : AC : CD.$$

Donc, la résultante totale qui est celle de P et de Q passera au point E.

14. Il suit de là que si l'on connaît les directions de deux forces P, Q et de leur résultante R, on en déduira le rapport des forces P et Q ; il suffira pour cela de construire le parallélogramme EBAC, et de chercher le rapport des côtés AB et AC.

15. *La résultante des deux forces* P *et* Q, *représentées en grandeur et en direction par les droites* AB, AC (fig. 129) *est représentée en grandeur et en direction par la diagonale* AD *du parallélogramme construit sur ces droites.* En effet : construisons le parallélogramme ABC'D' ; la résultante R des forces P et Q étant dirigée suivant AD, appliquons-la en sens contraire de A vers D' ; les trois forces P, Q, R se feront équilibre. La force Q peut donc être considérée comme égale et opposée à la résultante des forces P et R. Or, cette résultante est dirigée suivant AC' ; les forces P et R sont donc entre elles comme les côtés AB et AD' du parallélogramme ABC'D' (**14**). Donc, AD représente R en grandeur et en direction. Mais AD' = BC' = AD ; donc, AD représente en grandeur et en direction la résultante des forces P et Q.

16. On déduit facilement de ce qui précède que la résultante de 3 forces représentées en grandeur et en direction par les arêtes d'un parallélépipède qui aboutissent à un même sommet, est représentée en grandeur et en direction par la diagonale de ce parallélépipède qui aboutit à ce même sommet.

On composerait successivement, d'après les règles précédentes, autant de forces que l'on voudra, appliquées en un même point.

COMPOSITION ET DÉCOMPOSITION DES COUPLES.

17. Le plan des deux forces qui composent un couple, se nomme le *plan* de ce couple ; la perpendiculaire commune aux directions de ces deux forces se nomme le *bras de levier* du couple ; le milieu du bras de levier est le *centre* du couple ; la droite menée perpendiculairement au plan du couple par son centre est *l'axe* de ce couple.

18. Soient (P, —P) et (Q, —Q) (fig. 130) deux couples situés dans le même plan, ayant même centre O, leurs bras de leviers AB, *ab*, sur une même droite, et qui se font mutuellement équilibre ; si l'on nomme R la résultante des forces P et Q, et — R celle des forces —P et —Q, il faudra que R et —R se détruisent ; pour cela, il faut qu'elles soient appliquées en un même point de AB, et, à cause de la symétrie de la figure, il faut que ce point d'application soit O. On aura alors : $P : Q :: Ob : OA$,

d'où $\quad P \times OA = Q \times Ob$ et $P \times AB = Q \times ab.$

Les produits $P \times AB$, $Q \times ab$ se nomment les *moments* des couples

(P,—P) et (Q,—Q). On voit que si deux couples situés comme dans la figure, se font équilibre, leurs moments sont égaux.

On voit aussi qu'un couple peut toujours être transformé en un autre dont les forces aient une grandeur commune donnée; il suffit pour cela de déterminer le bras de levier de manière que le moment du couple ne change pas.

19. On peut représenter l'intensité d'un couple par une longueur proportionnelle à son moment et portée sur son axe à partir de son centre, dans un sens ou dans l'autre, suivant que le couple tend à faire tourner son plan dans un sens ou dans l'autre : une fois que l'on a établi une convention à cet égard, la droite qui représente l'intensité du couple, détermine en même temps la direction de son plan et le sens de son action.

20. On peut, sans changer l'effet d'un couple, le transporter partout où l'on voudra, dans son plan, ou dans un plan parallèle, et le tourner comme on voudra dans ce plan, pourvu que son nouveau bras de levier soit lié invariablement au premier.

Il suit de là que deux couples peuvent toujours être ramenés à avoir même centre, et leurs forces mutuellement parallèles.

21. *Si deux couples ayant même centre et leurs forces mutuellement parallèles sont représentés pour leurs axes et leurs grandeurs par les côtés* OH, OL (fig. 131) *d'un parallélogramme* OHKL, *ils se composent en un seul, représenté pour son axe et sa grandeur par la diagonale de ce parallélogramme.*

En effet: supposons que les deux couples proposés soient changés en deux autres de moments équivalents, dont les bras de leviers soient CD et AB, respectivement perpendiculaires à OH et à OL, et dont les forces f, $-f$ soient égales entre elles. Achevons les parallélogrammes égaux OAEC, OBFD. La résultante des forces appliquées aux points A et C sera une force $2f$ appliquée en M; la résultante des forces appliquées en B et en D sera une force $-2f$ appliquée en N. Mais OM $=$ ON; ces deux résultantes forment donc un couple résultant $(2f, -2f)$ dont le bras de levier est MN, équivalent lui-même au couple $(f, -f)$ qui aurait pour bras de levier EF. Menons OK perpendiculaire au plan de ce dernier couple, et prenons sur cet axe une longueur OK proportionnelle au moment du couple résultant. Les forces des trois couples étant égales, leurs moments seront proportionnels à leurs bras de leviers : ainsi OH, OL, OK sont proportionnels à CD, AB, EF, ou à OC, OA, OE. La figure OHKL est donc un parallélogramme.

Il suit de là que les couples se composent comme les forces.

CONDITIONS GÉNÉRALES DE L'ÉQUILIBRE.

22. Soient P, P′, P″, etc., une série de forces quelconques appliquées en différents points d'un système libre, invariable de figure.

Par un point quelconque O, pris dans le système ou au dehors, mais invariablement lié à ce système, menons deux forces opposées p, $-p$, égales et parallèles à P, les forces P, $-p$ formeront un couple. Si l'on opère de même pour toutes les forces appliquées au système, on les convertira en une série de forces p, p', p'', etc., égales et parallèles aux premières, mais appliquées au point O, et en une série de couples $(P, -p)$, $(P', -p')$, $(P'', -p'')$, etc., dont les plans se coupent au point O. Les forces p, p', p'', etc., auront une résultante unique R appliquée au point O, et les couples se composeront en un seul $(\rho, -\rho)$, dont le plan passera par le point O, et pourra être ramené à avoir son centre en ce point. La condition générale de l'équilibre est donc que la résultante R et le couple résultant $(\rho, -\rho)$ soient nuls d'eux-mêmes.

23. Si la force R est parallèle au plan du couple résultant, on pourra tourner ce couple dans son plan, de manière que les trois forces R, ρ, $-\rho$ soient parallèles, et alors elles auront une résultante unique.

Si la direction de la force R coupe le plan du couple résultant, on pourra amener en O l'extrémité du bras de levier de ce couple à laquelle est appliquée la force ρ, je suppose; cette force se composera avec R en une seule force R', et le système sera réduit aux deux forces R' et $-\rho$, non situées dans un même plan.

24. Si le point O était un point fixe appartenant au système, la force R serait détruite par la résistance de ce point, et les conditions d'équilibre se réduiraient à ce que le couple résultant fût nul.

Si le point O appartenait à un axe fixe du système, la force R serait encore détruite par la résistance de cet axe, et les conditions d'équilibre se réduiraient à ce que le plan du couple résultant fût parallèle à cet axe, car alors son effet serait détruit par sa résistance.

DU CENTRE DE GRAVITÉ.

25. La pesanteur étant une force dirigée vers le centre de la terre, et qui agit avec la même intensité sur les molécules de tous les corps, on peut, sans erreur sensible, dans les circonstances ordinaires, supposer toutes ces molécules sollicitées par des forces égales et parallèles. Nous savons que ces forces ont une résultante égale à leur somme, parallèle à chacune d'elles, et que son point d'application ne change pas, quand la direction commune de toutes les forces vient à changer, pourvu que l'on conserve leur parallélisme.

La résultante des pesanteurs de toutes les molécules d'un corps se nomme son *poids*, et le point d'application de cette résultante,

qui reste le même quand le corps change de position, se nomme son *centre de gravité*.

26. Si dans une figure il se trouve un point tel qu'en menant un plan par ce point, la figure soit divisée par ce plan en deux parties symétriques, ce point est le centre de gravité de cette figure. Il résulte de là que le centre de gravité d'un parallélogramme, d'un polygone régulier, d'un cercle, d'un parallélépipède, d'un prisme régulier, d'un cylindre droit, d'une sphère, d'une ellipse, etc., est au centre de figure.

27. Le centre de gravité d'un triangle ACB (fig. 132) est évidemment sur la droite CD qui joint les milieux de toutes les parallèles à la base AB; mais, comme on peut prendre pour base les 3 côtés du triangle, il s'ensuit que son centre de gravité est à l'intersection des droites menées de chaque sommet au milieu du côté opposé. On prouverait que ce point est situé au tiers de CD, à partir du point D.

A l'aide de ce qui précède et de la composition des forces parallèles, on obtiendrait le centre de gravité d'un polygone quelconque.

28. Le centre de gravité d'une pyramide triangulaire est évidemment sur la droite qui joint les centres de gravité de toutes les sections parallèles à la base; et comme on peut prendre pour base chacune des 4 faces, il s'en suit que le point cherché est à l'intersection des droites menées de chaque sommet au centre de gravité, de la face opposée. On démontrerait que ce point est situé au quart de la droite qui joint le sommet au centre de gravité de la base, compté à partir de cette base.

On trouverait sans peine que cette propriété s'applique à une pyramide quelconque, et par suite au cône.

A l'aide de ce qui précède, on obtiendra le centre de gravité d'un polyèdre quelconque.

DES MACHINES SIMPLES.

29. On appelle *Machines* des instruments destinés à transmettre l'action des forces. Le *levier*, le *tour*, le *plan incliné*, portent le nom de *machines simples*.

Du levier.

30. Le *levier* se compose d'une barre appuyée sur un point fixe O. En deux points de la barre sont appliquées les forces P et Q, dont l'une est la *puissance* et l'autre la *résistance*. Si au point O on applique deux forces opposées P', —P' égales et parallèles à P, et deux autres forces opposées Q', —Q' égales et parallèles à Q, les forces P', Q' auront une résultante R appliquée au point d'appui et qui représentera la *charge* du point d'appui; les forces P,—P', Q,—Q formeront deux couples qui devront se détruire pour qu'il y ait équilibre; il faut donc qu'ils soient dans un même plan, que leurs

moments soient égaux, et que de plus ils tendent à faire tourner en sens contraire.

Ainsi, *dans l'équilibre du levier, la puissance et la résistance sont en raison inverse des perpendiculaires abaissées du point d'appui sur ces forces*.

Si le levier n'était que posé sur le point d'appui, il faudrait de plus que la résultante R fût normale à la barre.

31. Dans la *balance* à bras égaux, la puissance et la résistance sont évidemment égales.

Dans la balance à bras inégaux a et b, si P et Q sont les poids appliqués à ces bras on doit avoir $Pa=Qb$ ou $P:Q::b:a$.

Si un même corps, dont le poids est M, placé dans le plateau qui correspond à b, fait équilibre au poids P, et placé dans le plateau qui correspond à a, fait équilibre au poids Q, on aura :

$P:M::b:a$: et $M:Q::b:a$ d'où, $P:Q::b^2:a^2$, ou $a:b::\sqrt{Q}:\sqrt{P}$.

Dans la balance *romaine*, en nommant a la longueur du bras constant, b celle du bras variable, Q le poids du corps à peser, et P le poids constant dont le point d'application est seul variable, on aura toujours : $b:a::Q:P$. D'où il suit que, pour faire équilibre aux poids Q, 2Q, 3Q etc., il faudrait faire b égal à a, à $2a$, à $3a$ etc.

32. Soient A et B (fig. 133), deux forces appliquées aux extrémités d'une corde enroulée sur une *poulie* dont l'axe est supposé fixe. Si l'on mène les rayons Om, On aux extrémités de l'arc embrassé par la corde, les forces A et B peuvent être considérées comme appliquées aux extrémités d'un levier coudé mOn, dont les bras sont égaux et perpendiculaires sur la direction de ces forces ; il faudra donc pour l'équilibre que l'on ait $A=B$. La charge du point d'appui est égale à la résultante Oc des forces Oa et Ob égales et parallèles à A et B, mais les triangles isocèles Oac, Omn sont semblables comme ayant leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun ; on a donc : $Oc:Oa::mn:mO$. Ainsi, *la charge du point d'appui est à l'une des forces appliquées à la poulie comme la sous-tendante de l'arc embrassé par la corde est au rayon de la poulie.*

Si l'axe de la poulie est mobile, on peut, pour l'équilibre, appliquer au point O la force C égale et opposée à la résultante Oc. Cette force C peut alors être considérée comme la résistance, et la force A comme la puissance.

Le cas le plus favorable est celui où la corde embrasse une demi-circonférence, parce qu'on a alors : $A=\frac{1}{2}C$.

Du tour.

33. Le tour (fig. 134) se compose d'un cylindre mobile autour de son axe : la résistance agit à l'extrémité d'une corde enroulée sur ce cylindre, et la puissance P tangentiellement à une roue dont le plan est perpendiculaire à l'axe du cylindre.

Appliquons dans le plan de la roue et tangentiellement à la base du cylindre deux forces opposées Q', — Q' égales et parallèles à Q, le couple Q, — Q' étant parallèle à l'axe du cylindre sera détruit par sa résistance; les forces Q' et P pourront être considérées comme appliquées aux extrémités du levier coudé AOB dont les bras sont perpendiculaires sur les directions de ces forces; il faudra donc, pour l'équilibre, que l'on ait : P : Q :: OB : OA. C'est-à-dire que *la puissance est à la résistance comme le rayon du cylindre est au rayon de la roue.*

Pour avoir la charge des points d'appui, il faudra composer les forces Q' et P en une seule résultante R, que l'on décomposera ensuite en deux autres parallèles à R et appliquées aux points d'appui.

Du plan incliné.

54. Soit M (fig. 135) un corps qui tend à glisser le long d'un plan incliné AC en vertu de son poids Q appliqué à son centre de gravité O, et qui est retenu par une force P, parallèle au plan incliné. Décomposons la force Q en deux autres, l'une r, perpendiculaire au plan incliné, l'autre q, parallèle à ce plan. La composante r sera détruite par la résistance du plan, et représentera la pression que ce plan éprouve ; la composante q devra être détruite par la puissance P. Mais si l'on mène la verticale CB et l'horizontale AB, il est facile de voir que l'on aura : q : Q :: BC : AC. D'où il suit que *la puissance est à la résistance comme la hauteur du plan incliné est à sa longueur.* On verrait de même que *la pression éprouvée par le plan est au poids du corps soulevé comme la base du plan incliné est à sa longueur.*

Si la puissance est une force horizontale P', on pourra la décomposer en deux autres : l'une r' perpendiculaire au plan augmentera sa charge, l'autre P, parallèle au plan, devra faire équilibre à q. On aura donc : P' : P :: CA : AB et P : Q :: BC : AC, d'où il suit P' : Q :: BC : AB.

55. La puissance P (fig. 136), qui agit perpendiculairement à la tête AB d'un *coin*, peut se décomposer en deux autres Q et Q' perpendiculaires aux côtés AC et BC de ce coin. Or, si ODEF est le parallélogramme des forces Q, P, Q', le triangle ODE étant semblable au triangle ABC, on voit que *si la puissance est représentée par la tête du coin, ses composantes perpendiculaires aux côtés pourront être représentées par ces côtés.*

L'effet du coin est donc d'autant plus grand que sa tête est plus petite par rapport à ses côtés.

Si les forces latérales étaient obliques aux côtés, il ne faudrait considérer que leurs composantes perpendiculaires.

DES MACHINES COMPOSÉES.

Lorsque plusieurs machines simples réagissent les unes sur

les autres, il en résulte une machine composée. Nous dirons quelques mots de la *vis*, du *polygone funiculaire*, des *moufles* et des *roues dentées*.

De la vis.

36. Soit R le rayon du cylindre qui enveloppe le filet de la vis, h son pas, Q le poids d'un point matériel m retenu sur le filet de la vis par une force horizontale P perpendiculaire au rayon qui aboutit au point m. On pourra considérer ce point comme étant sur un plan incliné dont la hauteur serait h et la base $2\pi R$; on aura donc (34) : $P : Q :: h : 2\pi R$. Si l'on remplace la force P par une force p parallèle appliquée sur le prolongement du rayon à une distance R' de l'axe, on aura, d'après les conditions d'équilibre du levier, $p : P :: R : R'$. De ces deux proportions on tire $p : Q :: h : 2\pi R'$. C'est-à dire que ***dans l'équilibre de la vis, la puissance est à la résistance comme le pas de la vis est à la circonférence que tend à décrire la puissance.***

L'effet est d'autant plus grand que h est plus petit et R' plus grand.

Du polygone funiculaire.

37. Soit ABCDE une corde tendue par les forces P, Q, R, S, T, respectivement appliquées aux points A, B, C, D, E (fig. 15). Il faudra, pour l'équilibre, que la tension du cordon BC soit égale et opposée à la résultante des forces P et Q. Construisons le parallélogramme de ces forces, la tension cherchée sera représentée par la diagonale, et si l'on nomme F cette tension, il est facile de voir qu'on aura :

$$P : Q : F :: mB : nB : rB :: \sin. mrB : \sin. mBr : \sin. rmB$$

$$:: \sin. QBC : \sin. ABC : \sin. ABQ.$$

En considérant qu'il faut, pour l'équilibre, que la résultante des forces F et R soit égale et opposée à la tension du cordon CD, on obtiendra une série de rapports analogues; et ainsi de suite. On conclurait facilement de là le rapport qui doit exister entre deux quelconques des forces données.

Des moufles.

38. Une *moufle* se compose de deux systèmes de poulies réunies dans une même chape; l'une de ces chapes est fixe et l'autre mobile; une même corde s'enroule alternativement autour d'une poulie de chaque système; l'une de ses extrémités est fixée à l'une des chapes; à l'autre extrémité est appliquée la puissance; à la chape



mobile est appliquée la résistance. Tous les cordons qui supportent la chape mobile pouvant être considérés comme parallèles, leurs tensions sont égales (32); il suit de là que *la puissance est à la résistance comme l'unité est au nombre des cordons qui soutiennent la chape mobile.*

39. On considère encore un autre système de poulies à chapes mobiles. A la chape de la première est appliquée la résistance Q; une corde, fixée à l'une de ses extrémités, s'enroule sur cette poulie et va s'attacher à la chape de la seconde; une corde, fixée à l'une de ses extrémités, s'enroule sur cette seconde poulie et va s'attacher à la chape de la troisième; enfin une corde, fixée à l'une de ses extrémités, s'enroule sur cette troisième poulie, et à son autre extrémité est appliquée la puissance P. Si l'on nomme r, r', r'' les rayons de ces poulies, a, a', a'' les sous-tendantes des arcs embrassés par les cordes, F la tension du cordon qui va de la première poulie à la seconde et F_1 celle du cordon qui va de la seconde à la troisième, on aura (32) :

$$Q : F :: a : r, \quad F : F_1 :: a' : r_1, \quad F' : P :: a'' : r'',$$

d'où l'on tire $Q : P :: aa'a'' : rr'r''$. C'est-à-dire que *la puissance est à la résistance comme le produit des rayons des poulies est au produit des sous-tendantes des arcs embrassés par les cordes.*

Si les rayons sont égaux et les cordes parallèles, on a : $a = 2r$, $a' = 2r$, $a'' = 2r$, et la proportion devient $P : Q :: 1 : 2^3$, et en général $P : Q :: 1 : 2^n$, si n est le nombre des poulies.

Des roues dentées.

40. Les *roues dentées* sont des tours qui réagissent les uns sur les autres. La puissance P est appliquée à la roue du premier, dont le cylindre réagit par un engrenage sur la roue du second, dont le cylindre réagit à son tour sur la roue du troisième, au cylindre duquel sera appliquée si l'on veut la résistance Q. Si l'on nomme R, R', R'' les rayons des roues, et r, r', r'' ceux des cylindres, F et F_1 les forces inconnues qui agissent aux points de contact des cylindres et des roues, on aura (33):

$$P : F :: r : R, \quad F : F_1 :: r' : R, \quad F_1 : Q :: r_{11} : R'',$$

d'où l'on tire : $$P : Q :: rr'r'' : RR'R''.$$

C'est-à-dire que *la puissance est à la résistance comme le produit des rayons des cylindres est au produit des rayons des roues.*

L'effet est d'autant plus grand que les rayons des roues sont plus grands par rapport aux rayons des cylindres.

PHYSIQUE.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES CORPS.

1. Étendue. — *Impénétrabilité.* — Porosité. — Divisibilité. — Corps solides. — Liquides. — Gazeux.

On nomme *matière* ou *corps* ce qui tombe sous nos sens, ce qui peut produire en nous quelques sensations, soit par le toucher, la vue, l'ouïe, l'odorat, ou le goût. Les corps jouissent de propriétés dont les unes sont *générales*, c'est-à-dire appartiennent à tous les corps sans exception, et dont les autres sont *particulières* ou accidentelles. Les propriétés générales sont l'étendue, l'impénétrabilité, la porosité et la divisibilité.

Étendue.

On a vu, en géométrie, que l'*étendue* est la portion d'espace occupée par un corps, et que cette étendue a trois dimensions, *longueur, largeur* et *hauteur*. De là résultent la *forme* du corps, c'est-à-dire l'ensemble des surfaces qui le terminent; et le *volume* de ce corps, ou la portion d'étendue embrassée par ces surfaces.

Impénétrabilité.

En vertu de l'*impénétrabilité*, deux corps ne peuvent occuper en même temps le même espace. Cette propriété est très caractéristique et semble même nécessaire à l'existence de la matière; car si la pénétrabilité des corps était possible, tous les corps de l'univers seraient susceptibles d'être renfermés dans un même espace de plus en plus petit, et finiraient par s'évanouir.

Porosité.

Mais il arrive souvent qu'un corps en absorbe un autre sans augmentation de volume, parce que le premier corps offre des *pores* où vient se loger la matière du second. Ces pores sont souvent visibles à la vue simple; d'autres fois, on ne les aperçoit qu'à l'aide du microscope; enfin, ils peuvent disparaître pour notre organe même aidé des instruments d'optique les plus puissants, sans cesser d'exister. Dans ce cas, on constate leur présence par l'introduction

des liquides ou des gaz ; et à défaut de ces agents, par le froid qui, en contractant le corps, prouve que son *volume apparent* est toujours supérieur à son *volume réel.*

Divisibilité.

La *divisibilité* des corps à l'infini a soulevé bien des discussions. Bornons-nous à dire que si la matière ne comporte pas une division indéfinie, elle a au moins la propriété de pouvoir être divisée en un nombre immense de parties. Exemple : l'or que l'on bat en feuilles excessivement minces ; les couleurs, qui se délaient dans une grande quantité d'eau ; enfin, les odeurs, qui se répandent dans un espace considérable, sans affaiblir sensiblement les corps odorants. Aujourd'hui, on admet généralement que la matière se compose d'un nombre immense de parties infiniment petites, désignées sous le nom de *molécules*, ou d'*atomes* pour exprimer que ces molécules ne peuvent plus se diviser ultérieurement. La théorie chimique est basée sur l'existence des atomes ; et la cristallographie admet que ces atomes ont une forme déterminable, en rapport avec celle des cristaux qu'ils composent pas leur assemblage.

Corps solides, liquides, gazeux.

Les atomes adhèrent les uns aux autres, non par l'effet de la pesanteur universelle, dont nous parlerons bientôt, mais en vertu d'une force incomparablement plus énergique, désignée sous le nom de *cohésion*, laquelle diminue rapidement à mesure que s'accroît l'intervalle des atomes, et s'évanouit à la plus petite distance appréciable. D'un autre côté, la chaleur est une force qui tend à écarter les atomes. Ceux-ci restent donc comme en suspens sous les influences de la cohésion et de la chaleur. Le corps est dit *solide*, si les atomes sont tellement joints entre eux, qu'on peut tirer ce corps par un bout sans désunir sa matière ; il est *liquide*, si les atomes peuvent marcher en sens divers sous le moindre effort ; et *gazeux*, si les atomes se repoussent d'eux-mêmes et tendent à se disperser dans l'espace. C'est là ce qu'on appelle les trois *états* de la matière. Souvent on passe de l'un à l'autre par gradation et non d'une manière subite ; en sorte que cette distinction n'est pas d'une rigueur mathématique. Il serait difficile, par exemple, de dire si certains corps mous sont liquides plutôt que solides ; et si certaines vapeurs sont plutôt gazeuses que liquides.

2. Inertie. — Mobilité. — Forces. — Composition des forces. — Considérations générales sur l'équilibre et le mouvement. — Mouvement uniforme. — Vitesse. — Mouvement uniformément varié. — Vitesse. — Mouvement relatif. — Mouvement absolu. — Quantités de mouvement. — Communication du mouvement entre des masses *non élastiques.*

En vertu de l'*inertie*, un corps en repos y persite tant qu'une

cause extérieure ne vient pas agir sur lui ; une fois en mouvement, et abandonné à lui-même, ce corps continue à se mouvoir en ligne droite, sans jamais accélérer ni retarder sa marche. En d'autres termes, un corps ne prend ni ne quitte de lui-même son mouvement. C'est là le véritable caractère de la matière : elle persisterait éternellement dans son état, de repos ou de mouvement, sans le modifier jamais. C'est sur cette propriété qu'est fondée toute la dynamique ou la science des mouvements. A la surface de la terre, l'inertie ne peut se démontrer d'une manière complète, à cause que les corps y sont soumis à l'action continuelle de la pesanteur qui tend à modifier l'état de repos ou de mouvement de ces corps, et aussi par les frottements que ces derniers éprouvent contre les surfaces des corps solides environnants, des liquides, de l'air, ou de tout autre milieu. Mais les astres, qui se meuvent dans un espace vide, obéiront éternellement à la loi de l'inertie, en conservant le mouvement qu'ils ont reçu à leur origine.

Mobilité.

La *mobilité* est la propriété qu'ont tous les corps de pouvoir changer de place. Aucun n'est fixé dans l'espace; tous peuvent être mis en mouvement, et ce mouvement peut varier indéfiniment en rapidité et en direction, si l'on applique à ces corps des forces convenables.

Forces.

Une force est ce qui fait passer un corps du repos au mouvement, ou du mouvement au repos, ou enfin qui change le mouvement, soit dans sa rapidité, soit dans sa direction. On donne encore le nom de force à ce qui change les positions relatives des atomes d'un corps. En général, une force est tout ce qui change ou tend à changer l'état actuel d'un corps ; mais on ignore complètement la nature intime des forces naturelles, car elles sont inséparables des corps sur lesquels leur action se fait sentir.

Composition des forces.

Une des forces que l'on considère étant prise pour unité, on peut les comparer entre elles de même que l'on compare toutes les autres grandeurs ou quantités. On admet comme axiome qu'un même corps prend ou tend à prendre un mouvement proportionnel aux forces qu'on y applique successivement. En d'autres termes, on dit que l'effet est proportionnel à la cause, ou mieux, que la cause est proportionnelle à l'effet, le seul que l'on puisse réellement mesurer.

Deux ou plusieurs forces, qui tirent un corps dans la même direction, peuvent être remplacées par une seule force égale à leur somme. Deux ou plusieurs forces tirant un même corps dans

deux directions diamétralement opposées, peuvent aussi être remplacées par une seule force tirant dans le sens de celles qui forment la plus grande somme, avec une énergie égale à la différence des deux sommes.

Il est évident, en effet, qu'un point matériel, soumis à l'action d'autant de forces qu'on voudra, ne peut avoir, à chaque instant, qu'un seul mouvement, comme si une seule force agissait sur lui. Ainsi, l'action de plusieurs forces appliquées en un même point peut toujours être remplacée par l'action d'une seule force, qui est dite la *résultante* des forces en question; réciproquement, celles-ci sont les *composantes* de la force résultante.

Quand on a deux forces appliquées au même point, forces que l'on représente en grandeur et en direction par des lignes droites, si l'on construit un parallélogramme sur ces deux droites, et qu'on y mène la diagonale par le point en question, cette diagonale représentera, en grandeur et en direction, la résultante des deux forces.

Si l'on avait plusieurs forces appliquées au même point et dans des directions quelconques, on chercherait d'abord la résultante des deux premières, comme il vient d'être dit; puis on composerait cette résultante avec la troisième force, et ainsi de suite de proche en proche. La construction graphique qui en résulte revient à celle-ci : par l'extrémité de la première force, on mène une droite égale et parallèle à la seconde force; par l'extrémité de cette parallèle, une droite égale et parallèle à la troisième force, et ainsi de suite : joignant l'extrémité de la parallèle à la dernière force avec le point d'application des forces, on aura leur résultante en grandeur et en direction.

Quand des forces sont appliquées en des points différents d'un même corps solide, elles ne peuvent pas toujours être remplacées par une force unique; en d'autres termes, il arrive alors qu'elles n'ont pas de résultante. Dans ce cas, le corps n'est pas seulement tiré suivant une certaine direction comme un point matériel, mais il tourne en même temps sur lui-même; il possède un mouvement de *translation* et un mouvement de *rotation*. Ces deux genres de mouvements sont tout-à-fait indépendants, c'est-à-dire qu'on ne peut ôter à l'un pour donner à l'autre sans le concours de nouvelles forces. Il peut arriver qu'il y ait rotation sans translation, et translation sans rotation.

Les forces qui produisent la rotation d'un corps engendrent ce qu'on appelle un *couple*, c'est-à dire qu'elles peuvent être remplacées par deux forces égales, parallèles, opposées et appliquées en deux points différents. Les couples se composent entre eux d'une manière analogue aux forces qui sont appliquées en un même point.

Considérations générales sur l'équilibre et le mouvement.

Nous avons dit qu'une force est ce qui change ou *tend* à changer l'état actuel d'un corps, car, si plusieurs forces appliquées à un corps changent d'ordinaire l'état de ce dernier, il peut aussi arriver que ces forces ne produisent aucun effet, auquel cas, on dit qu'elles se font *équilibre*.

Pour qu'un point reste en équilibre sous l'influence de plusieurs forces, il est nécessaire et il suffit que la résultante de toutes ces forces soit égale à zéro; dans le cas contraire, il y a résultante et mouvement dans le sens de cette résultante.

Mais, s'il s'agit d'un corps solide, il y aura deux conditions à remplir pour l'équilibre, savoir, que ce corps reste en place, et que, restant en place, il ne tourne pas sur lui-même. En d'autres termes, il faut que toutes les forces appliquées à ce corps donnent une force résultante nulle, et un couple résultant nul; sinon, il y aura mouvement de translation ou de rotation, ou tous les deux à la fois.

Mouvement uniforme. Vitesse.

Le mouvement, considéré dans *sa vitesse*, exige l'emploi de deux unités, l'une pour l'espace et l'autre pour le temps. Les physiciens prennent le *mètre* pour l'unité de longueur, et la *seconde* pour l'unité de temps. Alors l'unité de vitesse est celle qui fait parcourir à un corps un mètre par seconde. La vitesse serait égale à 2, si le corps parcourait 2 mètres par seconde, ou 4 mètres en 2 secondes, ou 6 mètres en 3 secondes, etc.

Le mouvement est dit *uniforme*, quand la vitesse reste la même dans toute la durée du mouvement. Alors le chemin parcouru est proportionnel au temps employé à le parcourir, c'est-à-dire que, si le corps fait 3 mètres en 2 secondes, il fera 6 mètres en 4 secondes, 9 mètres en 6 secondes, etc.; et, pour avoir la vitesse, qui est le chemin parcouru en une seconde, il faudra évidemment diviser le chemin par le nombre de secondes employées à le parcourir. En d'autres termes, le chemin sera égal au produit de la vitesse par le temps.

Mouvement uniformément varié. Vitesse.

Les mouvements variés sont ceux où la vitesse n'est pas constante. Il y en a d'une infinité d'espèces; mais on ne parlera ici que du mouvement *uniformément varié*, dans lequel la vitesse croît ou décroît proportionnellement au temps. Pour le bien comprendre, nous l'examinerons dans le phénomène de la chute des corps à la surface de la terre. Il nous suffira de dire ici que la vitesse en chaque point s'obtient en supposant qu'en cet instant le mouvement devienne uniforme, auquel cas le chemin parcouru dans une seconde exprimerait la vitesse en ce point.

Mouvement relatif, mouvement absolu.

Pour apprécier le mouvement d'un corps, il faut connaître les positions successives qu'occupe ce corps; et ces positions, on les rapporte à celles d'autres corps qui sont supposés au repos. Pour qu'on puisse affirmer qu'un corps est au repos, il faut que ses distances à trois points fixes, non situés en ligne droite, ne varient pas. Où trouver des points qui soient ainsi fixés dans l'espace? La terre tourne sur son axe en un jour, et autour du soleil en un an; cet astre lui-même paraît marcher vers quelque région de l'univers. Le *mouvement absolu* est donc pour nous sans application possible; nous ne pouvons observer et mesurer que des *mouvements apparents*, c'est-à-dire relatifs à des corps qui conservent entre eux des positions constantes, mais qui, du reste, peuvent avoir des mouvements communs dans l'espace. Ainsi, un homme qui marche est dit en mouvement par rapport aux objets fixés au sol; une personne assise dans un vaisseau qui vogue est dite en repos relativement aux diverses parties du navire.

Quantité de mouvement, et forces vives.

On désigne, sous le nom de *masse*, la quantité de matière qu'un corps renferme. Cela posé, la *quantité de mouvement* est le produit de la masse d'un corps par sa vitesse; et lorsque l'on considère plusieurs corps, la quantité de mouvement est la somme des masses multipliées respectivement par les vitesses. Ainsi, une masse 3 animée d'une vitesse 5, et une masse 2 animée d'une vitesse 7, ont une quantité de mouvement égale à 29. Le calcul de la quantité de mouvement se fait en tenant compte du sens de la vitesse, tellement que deux vitesses en sens contraire sont affectées, l'une du signe *plus*, et l'autre du signe *moins*.

Communication du mouvement entre des masses non élastiques.

Quand deux corps en mouvement viennent à se rencontrer, il se produit ce qu'on appelle un *choc*, d'où naît une compression, un changement de forme dans ces corps. Si ce changement persiste, les corps sont réputés *durs;* ils sont *élastiques* quand le changement est passager, et que les deux corps reviennent à leur forme primitive.

Par l'effet du choc de deux corps durs, les quantités de mouvement s'ajoutent si les vitesses, avant le choc, sont dirigées dans le même sens; et les quantités de mouvement se retranchent, si les vitesses primitives ont des directions opposées. Par exemple, deux masses 3 et 4, marchant dans la même direction avec les vitesses respectives 5 et 7, viennent à se joindre; avant le choc, les quantités de mouvement étaient 15 et 28, total 43; après le choc, les deux masses n'en feront qu'une égale à 7, dont la vitesse sera

égale au quotient de 43 par 7. Mais, si les deux masses allaient primitivement en sens contraire, la quantité de mouvement après le choc serait 28 moins 15 ou 13, et ce dernier nombre divisé par la somme des masses 7 donnerait la vitesse commune après le choc, dans le sens de la seconde masse, qui avait une plus grande quantité de mouvement que la première.

PESANTEUR.

5. Direction de la pesanteur. — Lois de la chute des corps démontrées par le plan incliné et par la machine d'Atwood.

Direction de la pesanteur.

La *pesanteur*, autrement dite *attraction* ou *gravitation*, est une force qui sollicite tous les corps à se porter les uns vers les autres. Cette attraction se fait en proportion directe des masses ou quantités de matière, et en raison inverse du carré des distances. L'attraction des corps est toujours réciproque et égale; en sorte que, si l'un des corps attirant se meut avec une certaine force, l'autre corps se mouvra en vertu de la même force en sens contraire, et les quantités de mouvements seront égales de part et d'autre.

L'attraction d'un corps pour un autre résulte des attractions de chacun des atomes du premier sur tous les atomes du second. Ces attractions élémentaires varient en direction et en intensité; mais elles peuvent être remplacées par une seule force, qui est ce qu'on appelle leur *résultante*. Ainsi, les corps qui sont à la surface de la terre sont attirés, non par le centre de la terre seulement, mais par tous les atomes de matière qui composent ce globe; et il en résulte une force générale qui fait tomber ces corps suivant la *verticale*, ou perpendiculairement à la surface des eaux tranquilles. Ces corps attirent aussi la terre en vertu de la réciprocité d'action; mais les forces attractives étant égales de part et d'autre, les corps font plus de chemin que la terre qui, étant très considérable, ne paraît pas bouger du tout.

Lois de la chute des corps démontrées par le plan incliné et par la machine d'Atwood.

L'attraction de la terre sur un corps placé à sa surface est une force sensiblement *constante*, c'est-à-dire une force qui tire toujours de la même manière et sans aucune interruption. Pour fixer les idées, on suppose que cette force donne de petites impulsions égales, à des intervalles de temps égaux et très-courts; en sorte qu'un corps qui tombe, reçoit ces petits coups, qui accroîtront sa vitesse proportionnellement à leur nombre, et par conséquent proportionnellement au temps. Si, par exemple, le corps part du repos, et tombe librement sous l'action seule de la pesanteur, il reçoit dans la première seconde un nombre d'impulsions tel qu'il acquiert une vitesse de 30 pieds; ce qui veut dire que si la pe-

santeur cessait d'agir au bout de cette première seconde, le corps, en vertu de son inertie, continuerait à se mouvoir en parcourant 30 pieds par seconde. Pendant la deuxième seconde de sa chute, il recevra encore autant d'impulsions, en sorte que la vitesse sera doublée, c'est-à-dire de 60 pieds. En raisonnant de même pour la troisième seconde, on voit que le corps acquerrait une vitesse triple, ou de 90 pieds, et ainsi de suite, la vitesse finale étant proportionnelle au temps, c'est-à-dire égale à 30 pieds répétés autant de fois qu'il y a de secondes dans le temps de la chute. En mesures métriques, les 30 pieds font 9, 8 mètres. On désigne ce dernier nombre par g; la vitesse acquise, par v, qui exprime des mètres; le temps de la chute, par t, qui exprime des secondes, et l'on a la formule $v = gt$.

Pour calculer l'espace e parcouru durant le temps t, il suffit de remarquer qu'au lieu d'une vitesse croissant uniformément depuis zéro jusqu'à sa valeur finale v, on aura le même espace si l'on prend la vitesse moyenne $\frac{v}{2}$ pendant tout le temps de la chute, vu que l'on gagnera au commencement ce que l'on perdra à la fin. Mais un corps qui parcourt uniformément par seconde le nombre $\frac{v}{2}$ de mètres, parcourra $\frac{v}{2} \times t$ en un temps formé de t secondes, en sorte que l'espace ainsi parcouru sera :

$$e = \frac{v}{2} \times t;$$

ou, en mettant pour v sa valeur précédente $g \times t$,

$$e = \frac{g}{2} \times t^2.$$

Il résulte de cette formule que l'espace parcouru est égal à la moitié du nombre g (15 pieds ou 4,9 mètres) multipliée par le carré de t, nombre des secondes de chute. Si l'on prend successivement 1, 2, 3, 4, etc. secondes, les espaces parcourus seront de 4,9 mètres multipliés respectivement par 1, 4, 9, 16, etc., qui sont les carrés des temps. Enfin, si l'on veut avoir les chemins parcourus pendant chacune des secondes successives, il faudra retrancher le chemin parcouru dans la première seconde de celui parcouru dans les deux premières; puis retrancher le chemin correspondant à 2 secondes du chemin correspondant à 3 secondes, et ainsi de suite; ce qui donnera pour les chemins parcourus, de seconde en seconde, le nombre 4,9 mètres, multiplié respectivement par 1, 3, 5, 7, etc., qui forment la série des nombres impairs. C'est ce qu'on exprime en disant que les chemins parcourus, de seconde en seconde, croissent comme les nombres impairs.

Eu égard à la rapidité de la chute des corps, il serait impossible

de vérifier directement ces lois ; on y arrive par l'emploi du plan incliné et de la machine d'Atwood. Soit, fig. 138, AB$=l$ la longueur d'un plan incliné tel que la hauteur de l'extrémité A au-dessus de la ligne horizontale BC soit AC$=h$. La pesanteur qui agit sur le corps M étant représentée en grandeur et en direction par MP $= g$, on voit qu'elle se décompose en MQ et MR, côtés du rectangle dont MP est la diagonale. La composante MQ étant perpendiculaire au plan incliné ne produira qu'une pression contre le plan, et il ne restera que la composante MR parallèle au plan pour faire tomber M le long de ce plan. Les triangles ABC, PMR sont semblables, comme ayant les côtés perpendiculaires entre eux ; en sorte qu'on a la proportion :

$$AB : AC :: MP : MR$$

ou

$$l : h :: g : MR$$

d'où l'on tire :

$$MR = \frac{h}{l} \times g,$$

c'est-à-dire que la composante MR, qui seule fera tomber le corps le long du plan, est moindre que la pesanteur g, dans le rapport de la hauteur h à la longueur l; et, cette composante étant constante, vu que h, l et g qui entrent dans son expression sont des quantités invariables, le mouvement le long du plan incliné suivra les mêmes lois que le long de la verticale, mais il sera d'autant plus lent et plus facile à observer que la hauteur h sera moindre relativement à la longueur l.

La machine d'Atwood consiste essentiellement en une poulie P, fig. 139, mobile autour d'un axe passant par son centre, sur laquelle est enroulé un fil soutenant deux masses égales M et M'. Au moyen de ce fil, l'effet de la pesanteur sur chacune de ces masses est évidemment nul ; mais si l'on ajoute à la masse M une petite masse m, l'équilibre sera rompu, et la masse additive m tombera en poussant M et entraînant M'. L'effet sera donc moindre que si m tombait librement, car la force g de la pesanteur, au lieu d'être concentrée sur m, sera répartie sur M + M' + m; en sorte que le système des trois masses obéira à la force

$$g \times \frac{m}{M + M' + m}.$$

Par exemple, si m n'est que le dixième de l'une des masses M et M', la force sera réduite au 21e de g; elle sera constante comme cette dernière, et les lois de la chute des corps s'observeront encore, mais avec plus de facilité.

4. Poids. — Centre de gravité. — Définition de la masse et de la densité. — Balances.

Le poids d'un corps est la force qui le tire suivant la verticale, et qui le ferait tomber s'il ne rencontrait pas un obstacle, contre

13*

lequel il presse sans cesse, comme, par exemple, contre le plateau d'une balance. Dans le système métrique, l'unité de poids est celui d'un centimètre cube d'eau pure, au maximum de densité, qui s'observe à la température de 4 degrés. Cette unité porte le nom de *gramme*.

Centre de gravité.

Tous les atomes d'un corps solide, placé à la surface de la terre, sont attirés par celle-ci dans des directions sensiblement parallèles, eu égard aux petites dimensions de ce corps relativement à celles de notre globe. La résultante de toutes ces attractions élémentaires est ce que nous avons appelé le poids du corps. Si l'on tourne ce corps sur une autre face, les attractions élémentaires tourneront de la même manière autour des atomes; mais leur résultante passera encore par le même point, que l'on appelle *centre de gravité*.

Chaque corps, quelle que soit d'ailleurs sa forme, a un centre de gravité. Si l'on retenait un corps par son centre de gravité, il est clair qu'on détruirait l'action de la pesanteur. Si l'on suspendait le corps par un autre point, le corps tournerait autour de ce point jusqu'à ce que le centre de gravité s'arrêtât dans la verticale du point de suspension et au-dessous, auquel cas l'attraction de la terre serait encore détruite.

Il est évident que le centre de gravité et le centre de figure ne font qu'un dans tous les corps homogènes. Ainsi le centre de gravité d'une ligne droite est au milieu de cette droite; celui d'un cercle est au centre de ce cercle; celui d'un parallélogramme, à l'intersection des deux diagonales; celui d'une sphère, au centre de la sphère, et ainsi des autres. Quant au centre de gravité d'un triangle, il se trouve à l'intersection des droites menées des angles au milieu des côtés opposés, et par suite aux deux tiers de ces droites à partir des angles. Dans la pyramide triangulaire, il se trouve à l'intersection des droites menées des sommets aux centres de gravité des faces opposées, et par suite aux trois quarts de ces droites à partir des sommets.

Quand il s'agit d'un corps de forme irrégulière, on le suspend successivement par deux de ses points, et la rencontre des deux fils de suspension, supposés prolongés dans l'intérieur des corps, détermine son centre de gravité.

Définition de la masse et de la densité.

Nous avons vu que le poids d'un corps est la force avec laquelle il est attiré vers le centre de la terre. Cette force est variable avec la hauteur du corps au-dessus du niveau des mers, et même avec la latitude. La *masse* de ce corps est la quantité absolue de matière dont il est formé; cette masse reste invariable, soit qu'on transporte le corps en divers points, soit qu'on le dilate ou le comprime.

La masse est donc une chose constante par elle-même, tandis que le poids dépend de la situation du corps relativement aux autres corps qui l'attirent. Mais, dans un même lieu, le poids reste proportionnel à la masse ; c'est-à-dire, par exemple, que le poids sera doublé si la masse est doublée.

Des volumes égaux de matières différentes ne renferment pas des masses égales, ou, en d'autres termes, ne pèsent pas également, n'ont pas le même poids. La *densité* d'une matière est proportionnelle à la masse ou au poids sous un volume constant. Ainsi le mercure pèse de 13 à 14 fois plus que l'eau sous le même volume ; et le platine, qui est la plus *dense* de toutes les matières connues, pèse 21 fois plus qu'un égal volume d'eau, auquel cas on dit que la densité du platine est 21, celle de l'eau étant prise pour unité.

Balances.

La *balance* est un levier qui sert à mesurer le poids des corps, et qui a reçu le nom de *fléau*. Ce fléau porte à son milieu un couteau d'acier transversal, nommé *axe de suspension*, qui repose sur des plans d'acier ou de pierre dure. A chaque bout du fléau se trouve suspendu un *plateau* ou *bassin*, et ceux-ci sont destinés à recevoir les poids que l'on veut équilibrer.

On considère trois espèces de balances : 1° celle où le centre de gravité tombe sur l'axe même de suspension, auquel cas il est clair que la balance, chargée de poids égaux, peut prendre toutes les positions, ce qui est un inconvénient ; 2° celle où le centre de gravité est placé au-dessus de l'axe de suspension, et qui pirouette pour peu que le fléau penche d'un côté ou de l'autre : cette balance est dite *folle* ; 3° enfin celle où le centre de gravité est plus bas que l'axe de suspension. Chargée de poids égaux, cette balance oscille autour de sa position d'équilibre, et son fléau finit par devenir horizontal.

C'est cette dernière espèce de balance qui est la bonne ; mais il ne faudrait pas que son centre de gravité fût très éloigné de l'axe de suspension, car elle ferait des oscillations de longue durée et serait ce qu'on appelle *paresseuse*. Comme les deux bras du fléau ne peuvent jamais être rendus parfaitement égaux, on doit faire les bonnes pesées par *tare*. Cette méthode consiste à placer d'un côté le corps que l'on veut peser, et de l'autre côté de la grenaille ou du sable pour équilibrer la balance ; après quoi on enlève le corps, que l'on remplace par des poids étalonnés, jusqu'à ce que l'équilibre soit de nouveau rétabli ; ces poids sont rigoureusement égaux au poids du corps en question, puisque, dans les mêmes circonstances, il font équilibre à la même *tare*.

5. Mouvement de rotation. — Expériences sur la force centrifuge.

Mouvement de rotation.

Un corps lancé dans l'espace tournera aussi sur lui-même si la force d'impulsion n'est pas dirigée vers le centre de gravité du corps. L'*axe de rotation* est la droite passant par le centre de gravité, autour de laquelle s'effectue ce mouvement. En général, tout corps a trois axes autour desquels la rotation persiste ; on les nomme pour cette raison les trois *axes permanents;* ils sont rectangulaires entre eux. La rotation autour de toute autre droite passant par le centre de gravité, ne dure jamais qu'un instant ; elle s'effectue successivement autour d'autres droites, qui sont d'autres *axes instantanés,* sans revenir jamais à l'un des axes permanents.

Il n'en est pas ainsi quand le corps est forcé de tourner autour de deux de ses points comme pivots. Dans ce cas, la droite passant par ces deux points est un axe de rotation qui ne peut plus varier.

Dans l'un et l'autre cas, la rotation engendre en chaque particule du corps une tendance à s'éloigner de l'axe de rotation, tendance que l'on a désignée sous le nom de *force centrifuge.* En vertu de cette force, chaque particule du corps, si elle devenait libre, s'échapperait suivant la tangente au cercle qu'elle décrit.

Ainsi, dans le cas de la terre qui tourne sur le diamètre des pôles, chaque corps placé à sa surface ou dans son intérieur tend à s'échapper suivant la tangente au cercle qu'il parcourt. Cette tendance est vaincue par la pesanteur, mais le poids du corps s'en trouve diminué proportionnellement au rayon du cercle qu'il décrit. A l'équateur, où la force centrifuge est la plus grande possible, celle-ci n'est que la 288e partie de la pesanteur. Néanmoins, c'est la force centrifuge qui a produit l'aplatissement de notre globe, supposé liquide à son origine.

Expériences sur la force centrifuge.

On rend la force centrifuge bien plus énergique en imprimant à un corps un mouvement de rotation très rapide. Ainsi, une meule en mouvement lance au loin l'eau qui adhérait à son pourtour. Ainsi, la fronde que l'on fait tourner avec rapidité est fortement tendue par la pierre qu'elle retient, et qui s'échappe avec violence dès qu'on vient à lâcher l'un des cordons de la fronde. Parmi les nombreuses expériences qui servent à constater l'effet de la force centrifuge, nous citerons encore celle du siphon rempli de liquide, tournant autour de l'une de ses branches rendue verticale ; et l'expérience du cercle formé d'un ressort, qui tournant autour de l'un de ses diamètres, s'aplatit aux deux extrémités de ce diamètre, et se renfle comme la terre suivant son diamètre équatorial.

6. Lois des oscillations du pendule. — Application du pendule à la détermination de la pesanteur, et de la figure de la terre.

Lois des oscillations du pendule.

On distingue le *pendule simple*, qui est idéal, des *pendules composés*, qui seuls sont réels. Le pendule simple consisterait en un point matériel, suspendu à l'extrémité inférieure d'un fil sans pesanteur, dont le bout supérieur serait attaché à un point fixe. En écartant ce pendule de la verticale, puis l'abandonnant à lui-même, il oscillerait autour de la verticale du point de suspension, décrivant de part et d'autre des arcs égaux entre eux et à l'écartement primitif. Si ce pendule était dans le vide, et si la suspension n'occasionait aucun frottement, les oscillations dureraient éternellement avec leur *amplitude* initiale. De plus, la durée d'une oscillation serait toujours la même, et pourrait servir à mesurer le temps. Enfin, la durée de l'oscillation est indépendante des arcs décrits, pourvu que ces arcs soient très petits, par exemple, de moins d'un degré. Le calcul apprend que cette durée d'une oscillation est donnée par la formule

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

où t exprime la durée de l'oscillation en secondes, π le rapport de la circonférence au diamètre, savoir $\frac{355}{113}$, l la longueur du fil en mètres, et g la vitesse acquise par un corps au bout de la première seconde de chute, et que nous avons dit être d'environ 9,8 mètres.

On approche passablement des conditions du pendule simple, en suspendant une petite boule métallique au bout d'un long fil très fin, et c'est ainsi que les premières observations du pendule ont été faites. Depuis, on a formé des pendules plus ou moins composés, et de telle manière qu'on put calculer la longueur du pendule simple qui ferait ses oscillations dans le même temps. D'après la formule ci-dessus, on voit que le temps d'une oscillation du pendule simple croît comme la racine carrée de sa longueur; que, par conséquent, les diverses particules d'un pendule réel ou composé oscilleraient différemment, suivant qu'elles se trouvent plus ou moins rapprochées du point de suspension, si elles oscillaient librement; qu'enfin, dans leur mouvement commun, les plus éloignées du point de suspension retardent les plus proches, de même que celles-ci font marcher plus vite les premières, ce qui établit une espèce de compensation. Parmi les particules d'un pendule composé, il y en a donc une qui marche comme si elle était libre, et qu'elle formât à elle seule un pendule. Cette particule est ce qu'on appelle le *centre d'oscillation* et, dans une sphère suspendue à un long fil très fin, le centre d'oscillation se trouve un peu au-dessous du centre de la sphère.

Application du pendule à la détermination de l'intensité de la pesanteur, et de la figure de la terre.

Admettons que l'on observe dans le vide la marche d'un pendule simple, ou quasi-simple, dont la longueur est l. Si ce pendule fait n petites oscillations en un nombre de secondes marqué par t, le temps d'une seule oscillation sera $\frac{t}{n}$, et l'on aura la formule

$$\frac{t}{n} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \text{ d'où } g = \frac{\pi^2 n^2 l}{t^2},$$

résultat qui fait connaître la pesanteur g ou la vitesse acquise en une seconde de chute. A Paris, on trouve $l = 0,99392$ mètre pour la longueur du pendule qui bat la seconde. En donnant à l cette valeur, et posant $n=1$, $t=1$ dans la formule ci-dessus, on trouve $g = 9,8096$ mètres, ou à très peu près $g = 9,81$ mètres.

Si, avec le même pendule, on se transporte en un autre point de la surface du globe, où l'on observera le nombre n' d'oscillations dans le même temps t, on aura pour la pesanteur g' en ce point,

$$g' = \frac{\pi^2 n'^2 l}{t^2}.$$

Divisant l'une par l'autre ces valeurs de g et g', et réduisant, on trouve:

$$\frac{g'}{g} = \frac{n'^2}{n^2}$$

ce qui montre que la pesanteur en différents lieux varie proportionnellement au carré du nombre d'oscillations d'un même pendule dans le même temps.

On trouve en effet qu'un pendule invariable, transporté à diverses latitudes, ne fait pas le même nombre d'oscillations par jour; ce qui prouve que la pesanteur varie de l'équateur au pôle, où elle atteint sa plus grande valeur. Or, la longueur du pendule qui bat la seconde étant en raison directe de la pesanteur, ce pendule doit être le plus long au pôle et le plus court à l'équateur. Enfin, le calcul apprend que l'aplatissement du globe, formé de couches homogènes ou hétérogènes, est exprimé par

$$\frac{5}{2} \frac{f}{g} \frac{l'-l}{l},$$

f étant la force centrifuge et g la pesanteur équatoriale, l la longueur du pendule qui bat la seconde à l'équateur, et l' la longueur de ce pendule au pôle, l'ensemble des observations du pendule dans l'hémisphère nord a donné un 295e pour l'aplatissement; quant aux mesures du méridien, elles conduisent à un 305e. La moyenne, un 300e, représente donc l'aplatissement de l'hémisphère en question.

HYDROSTATIQUE.

7. Principe d'égalité de pression. — Conditions d'équilibre des liquides. — Pressions latérales et verticales. — Équilibre des liquides homogènes ou hétérogènes dans les vases communiquants. — Presse hydraulique. — Superposition de plusieurs liquides de densités différentes.

Principe d'égalité de pression.

Un liquide homogène est en équilibre quand, renfermé dans un vase, sa surface libre est horizontale, c'est-à-dire perpendiculaire à la direction de la pesanteur indiquée par le fil à plomb; car alors il n'y a pas de raison pour que ce liquide coule d'un côté plutôt que de l'autre. La surface libre se nomme *surface de niveau*, et la *profondeur* d'un point dans ce liquide se mesure par la perpendiculaire menée de ce point à la surface de niveau, surface que l'on supposera prolongée indéfiniment.

Les différents points d'un liquide éprouvent des pressions qui résultent, soit du poids des particules supérieures, soit de la pression exercée à la surface par l'air atmosphérique, ou de toute autre pression extérieure et artificielle.

Un liquide parfait est celui dans lequel les pressions extérieures se transmettent instantanément et également dans toute la masse fluide. Alors aussi une particule liquide est pressée également dans tous les sens; et si cette particule est en contact avec la paroi du vase, elle lui transmet sa pression suivant la normale à cette paroi.

Conditions d'équilibre des liquides.

Les conditions nécessaires pour l'équilibre des liquides contenus dans des vases sont les suivantes : horizontalité de la surface libre, dont tous les points supportent également la pression atmosphérique ; homogénéité ou égalité de densité en chaque couche horizontale ; enfin, pour que l'équilibre soit stable, superposition des couches par ordre de densité croissante de haut en bas, si le liquide est hétérogène.

Pressions verticales et latérales.

La pression éprouvée en un point quelconque d'une masse fluide homogène est proportionnelle à la *profondeur* de ce point dans le liquide et à la pression exercée à la surface de niveau. Par conséquent, tous les points situés à la même profondeur sont également pressés; en d'autres termes, la pression est la même pour tous les points d'une surface parallèle à la surface de niveau : tel est le principe fondamental au moyen duquel on peut calculer la pression exercée contre les parois d'un vase de forme quelconque.

Quand la paroi que l'on considère est horizontale, la pression

qu'elle supporte est représentée par le poids de la colonne liquide renfermée dans un cylindre vertical, dont cette paroi serait la base, et la hauteur celle du liquide jusqu'à la surface de niveau. Dans ce cas, le centre de pression est au centre de gravité de la paroi.

La pression contre les différents points d'une paroi verticale ou inclinée d'une manière quelconque, varie avec la profondeur du liquide en chaque point, ce qui complique la détermination de la pression totale et du centre de pression.

Équilibre des liquides homogènes ou hétérogènes dans les vases communiquants. Superposition de plusieurs liquides de densités différentes.

Si l'on met plusieurs liquides dans un même vase (ces liquides n'ayant les uns sur les autres aucune action chimique), ils finissent par se disposer suivant l'ordre des densités, le plus pesant au fond et le plus léger à la surface de niveau, les surfaces de séparation étant exactement planes et horizontales; de telle manière que chaque liquide forme une *couche* à faces parallèles, et par conséquent d'égale épaisseur en tout point. Alors, la pression en un point de l'une quelconque de ces couches est représentée par le poids de la colonne hétérogène qui repose dessus, et par la pression extérieure exercée sur cette colonne.

Dans les vases qui communiquent entre eux par quelques points seulement, la pression et la nature du liquide doivent être les mêmes dans toute l'étendue des couches horizontales, qui passent par les points de communication; mais la nature des liquides peut varier d'un vase à l'autre, tant au-dessus qu'au-dessous de ces couches communes, dont tous les points doivent être également pressés par le liquide supérieur, lequel devra donc avoir une hauteur d'autant plus grande que sa densité sera plus faible.

Presse hydraulique.

Cet instrument se compose essentiellement d'un large corps de pompe AB (fig. 140), en communication avec un tube de petit diamètre CD. Un piston P joue dans le corps de pompe, entièrement rempli d'un liquide, qui s'élève jusqu'en D dans le tube. La face inférieure AB du piston supportera en chacun de ses points, une pression égale à celle des points situés à la même hauteur C dans le tube, pression mesurée par la colonne liquide CD. En d'autres termes, la pression totale sur AB sera égale au poids d'une colonne cylindrique dont AB serait la base et CD la hauteur; cette pression considérable tendra à soulever le piston, dont la tête viendra comprimer avec force un objet E, placé entre cette tête et l'obstacle fixe F. Pour plus de commodité, on produit en C une pression

égale à celle de la colonne CD, au moyen d'une petite pompe foulante.

8. Principe d'Archimède démontré par le raisonnement et par l'expérience. — Détermination des densités des corps solides et liquides. — Aréomètres à volumes constants et à poids constants. Usage des tables de pesanteur spécifique.

Principe d'Archimède démontré par le raisonnement et par l'expérience.

Si dans un liquide on considère un certain volume, la matière contenue dans ce volume ne tombe pas, à cause que son poids est contrebalancé par l'excès de pression qui s'exerce de bas en haut sur la pression qui a lieu de haut en bas. A la place de ce volume liquide, on pourrait mettre tel corps solide que l'on voudrait, pourvu qu'il pesât précisément comme le liquide déplacé; et ce corps solide resterait sans poids au milieu du liquide. Mais s'il pesait plus que le liquide déplacé, il se précipiterait au fond, en vertu de l'excès de son poids seulement ; ce qu'on exprime en disant qu'un corps plongé dans un liquide perd une portion de son poids égale au poids du liquide déplacé; c'est un principe découvert par Archimède, et qui porte le nom de ce géomètre.

Pour démontrer ce principe expérimentalement, on suspend un corps à l'aide d'un fil au-dessous de l'un des plateaux d'une balance, et on met dans l'autre plateau les poids nécessaires pour l'équilibre. Cela fait, on approche un vase entièrement plein d'un liquide, et de telle manière que le corps s'y trouve plongé en totalité. On trouve alors que la balance perd son état d'équilibre, et que pour le rétablir, il faut ôter du second plateau un poids parfaitement égal au poids du liquide expulsé du vase par l'introduction du corps.

Détermination des densités des corps solides et liquides.

On détermine la densité d'un corps solide au moyen du principe d'Achimède. Soit, par exemple, 12 grammes le poids d'un corps dans l'air, et 7 grammes son poids dans l'eau : l'eau déplacée, qui a même volume que ce corps, pèsera donc 12 — 7, ou 5 grammes ; divisant 12 par 5, on trouve 2,4 pour exprimer la densité du corps en question.

Si le corps pouvait être dissous ou attaqué chimiquement par l'eau, il faudrait le peser dans quelque autre liquide sans action sur lui, et dont on connût la densité relativement à celle de l'eau. Dans le cas où le corps serait plus léger que l'eau, on pourrait l'attacher à un second corps suffisamment lourd pour l'entraîner sous l'eau; mais il vaut mieux recourir au procédé suivant, qui donne des résultats très précis.

On introduit le corps, soit entier, soit par fragments, dans un flacon de verre, dont le bouchon, également de verre, joigne parfaitement. Soit 46 grammes le poids du flacon plein d'eau seulement; soit 15 grammes le poids du corps dans l'air; soit enfin 41 grammes le poids du flacon renfermant ce corps, et de l'eau qui achève de le remplir exactement. Le poids de l'eau déplacée par le corps s'obtiendra en retranchant 41 de 46 + 15 ou 61, ce qui fait 20. Divisant 15 par 20, on a 0,75 pour la densité cherchée.

Ce dernier procédé servira pour déterminer la densité des liquides. Soient 13 grammes le poids du flacon vide; 29 grammes le poids du flacon plein d'eau; enfin, 37 grammes, le poids du flacon plein d'un autre liquide. Le même flacon renfermera donc 16 grammes d'eau, et 24 grammes de cet autre liquide, dont la densité sera le quotient de 24 par 16, ou 1,5.

Aréomètres à volumes constants et à poids constants.

La densité des corps solides et liquides se prend aussi au moyen d'instruments nommés *aréomètres*. Celui de Fahrenheit consiste en un cylindre creux, portant à sa partie supérieure une petite tige, soutenant elle même un petit plateau destiné à recevoir des poids. Cet aréomètre est dit *à volume constant*, parce qu'on le charge de telle manière que le niveau du liquide où il flotte s'élève jusqu'à un trait marqué sur la tige. Soit 840 grammes le poids de l'aréomètre dans l'air. Placé dans l'eau, il faut, par exemple, y ajouter 10 grammes pour l'enfoncer jusqu'au trait de la tige, ce qui s'appelle *affleurer*. Placé dans un autre liquide, il faut, par exemple, un poids additif de 315 grammes. Ainsi, l'eau déplacée par l'instrument pèsera 840 + 10, ou 850 grammes; et l'autre liquide, également déplacé, pèsera 840 + 315, ou 1155 grammes. Divisant 1155 par 850, on a environ 1,353 pour la densité de cet autre liquide.

En suspendant une petite cuvette à la partie inférieure de cet instrument, on le rend propre à déterminer la densité des corps solides, des minéraux par exemple. Soit encore 10 grammes le poids nécessaire pour affleurer. On met le corps sur le plateau, et il ne faut plus que 6 grammes pour affleurer ; ce qui montre que le corps pèse 4 grammes. On le met ensuite dans la cuvette, et alors il faut 7,6 grammes pour affleurer, ce qui prouve que le corps a perdu 7,6 — 6, ou 1,6 gramme par son immersion dans l'eau. Divisant enfin 4 par 1,6, il vient 2, 5 pour la densité du corps. S'il pesait moins que l'eau, on retournerait la cuvette et l'on mettrait le corps par-dessous.

Les aréomètres *à poids constants* se composent d'un tube, terminé inférieurement par une petite boule destinée à recevoir du mercure ou de la grenaille de plomb pour lester l'instrument, c'est-à-dire le maintenir dans une position verticale au milieu du liquide où il

doit flotter. On conçoit que l'aréomètre s'enfoncera d'autant plus que le liquide sera moins dense, et réciproquement. Une graduation sur le tube indique, soit le volume immergé, soit la densité immédiate du liquide, soit enfin des nombres de convention qui permettent d'apprécier la densité plus ou moins grande des liquides. C'est dans cette dernière catégorie qu'il faut ranger les aréomètres de Baumé, Casbois et tant d'autres. M. Gay-Lussac a gradué de semblables tubes pour estimer la densité des alcools, et qu'il a nommés *alcoomètres*.

Ordinairement on dresse des tables de densité ou pesanteurs spécifiques, tant pour les liquides que pour les solides. Dans ces tables, la densité de l'eau est toujours prise pour unité, et les densités des autres corps sont exprimées en multiples et parties décimales de cette unité. Si l'on voulait changer d'unité, prendre par exemple pour unité la densité du mercure qui est marquée 13,6, il suffirait de diviser toutes les autres densités par ce dernier nombre.

9. Fluides élastiques. — Pesanteur de l'air démontrée par l'expérience. — Baromètre. Loi de Mariotte. — Manomètres. — Machine pneumatique. — Machine de compression. — Fusil à vent. — Fontaines de compression. — Application du principe d'Archimède aux fluides élastiques. — Mongolfières. — Ballons. — Mélanges des fluides élastiques.

Fluides élastiques

On nomme *fluides élastiques* ou *gaz* les corps dont les molécules, comme celles de l'air, sont séparées les unes des autres et tendent sans cesse à se repousser de manière à augmenter indéfiniment le volume qu'ils occupent. C'est là le caractère essentiel des fluides élastiques; leur volume peut être réduit ou dilaté presque sans limites par l'accroissement ou la diminution de la pression qu'on leur fait subir.

Pesanteur de l'air démontrée par l'expérience.

On démontre la pesanteur de l'air en retirant d'un grand ballon de verre tout l'air qu'il contient, au moyen de la machine pneumatique dont nous parlerons plus loin. Ce ballon étant vide et son orifice fermé par le moyen d'un robinet, on le suspend à l'un des bras d'une balance, que l'on équilibre en mettant des poids sur le plateau de l'autre bras. Cela fait, on ouvre le robinet, l'air afflue dans le ballon avec sifflement, et le poids de ce ballon est alors augmenté d'une quantité appréciable; car on trouve qu'un litre d'air pèse un gramme et tiers. Or, un litre d'eau pesant un kilogramme, ou mille grammes, l'air pèsera environ 770 fois moins que l'eau sous le même volume. On a encore d'autres preuves de la pesanteur de l'air par l'emploi du baromètre, et de différents appareils mis en rapport avec la machine pneumatique.

Baromètre.

Pour composer le baromètre le plus simple, on prend un tube de verre, fermé par un bout, ouvert par l'autre, et d'une longueur d'environ 30 pouces ou 81 centimètres; on le remplit de mercure, et posant le doigt sur l'orifice, de manière à ne laisser aucune bulle d'air dans le tube, on retourne celui-ci et on le fait plonger verticalement dans le mercure d'une cuvette, en retirant seulement alors le doigt qui tenait l'orifice bouché. Le mercure quitte la partie supérieure du tube, de telle manière qu'il forme dans ce tube une colonne verticale d'environ 28 pouces ou 76 centimètres au-dessus du niveau extérieur du mercure dans la cuvette. Si l'on incline un peu le tube, la colonne mercurielle s'allonge, mais en conservant la même hauteur dans le sens de la verticale, jusqu'à ce que tout le tube soit de nouveau plein de mercure; ce qui prouvera que l'espace abandonné par le liquide était vide d'air.

Pourquoi le mercure se soutient-il ainsi à une hauteur de 76 centimètres? C'est que, la surface du mercure dans la cuvette étant pressée par le poids de la colonne d'air qui repose dessus, il faut, pour l'équilibre, que tous les points de cette surface de niveau soient également pressés, y compris les points placés dans l'intérieur et à la base du tube. Ces derniers points, en l'absence de l'air, doivent donc être directement pressés par une colonne de mercure d'un poids égal à celui de l'air. En conséquence, une colonne de 76 centimètres de mercure presse comme une colonne d'air atmosphérique, l'une et l'autre s'appuyant sur la même base.

Le baromètre sert à mesurer la pression de l'air libre, et celle des autres gaz renfermés en vase clos. Il a donc reçu des modifications de formes en rapport avec ses divers usages. Nous signalerons le baromètre *à siphon*, dont la petite branche parallèle à la grande, tient lieu de cuvette; dans ce cas, la pression est évidemment mesurée par la différence des colonnes du mercure dans les deux branches. Le baromètre de Bunten est le seul qui puisse être facilement transporté dans les voyages, sans éprouver de dérangement; mais nous ne pouvons le décrire ici.

La colonne barométrique diminue quand on s'élève sur les montagnes, et s'allonge quand on descend au bord de la mer ou dans les mines. La raison en est que plus on s'élève dans l'atmosphère, et moins il reste d'air pour presser sur le mercure. Par conséquent, le baromètre est un instrument précieux pour mesurer la hauteur des montagnes, ou les différences de niveaux, par l'observation simultanée de la pression de l'air aux diverses stations que l'on considère.

La colonne barométrique varie encore sans que l'instrument change de place; mais c'est alors l'atmosphère qui éprouve des variations dans son poids, et ces variations semblent être en rapport

avec l'état pluvieux du ciel; en sorte que le baromètre baisse par le mauvais temps et monte par le beau temps; mais ce genre d'indications laisse toujours quelques doutes sur l'état prochain de l'atmosphère.

Loi de Mariotte.

Mariotte a fait voir que le volume de l'air est en raison inverse de sa pression, et cette grande loi, applicable à tous les fluides élastiques, a reçu le nom de son inventeur. Ainsi, le volume est réduit à moitié, si la pression est doublée; au tiers, si la pression est triplée, etc. Réciproquement, le volume est doublé, si la pression est réduite à moitié; il est triplé, si la pression est réduite au tiers, etc.

Manomètres.

On nomme *manomètre* un instrument propre à mesurer la pression des fluides élastiques. Il se compose ordinairement d'un tube vertical communiquant avec un réservoir plein de mercure. Le tube est rempli d'air et gradué. Le réservoir communique avec le gaz que l'on veut observer, et la communication peut être interrompue à l'aide d'un robinet. Lorsque le gaz presse sur le mercure, celui-ci monte dans le tube où il comprime l'air. Si l'on mesure la compression de l'air et la colonne mercurielle soulevée, on pourra calculer la force élastique du gaz en question.

Machine pneumatique.

La machine pneumatique sert à faire le vide d'air dans les vases. Que l'on se figure un gros tube ou corps de pompe, dans lequel joue un piston. Une première soupape est placée à la base du corps de pompe, et s'ouvre de bas en haut. Une deuxième soupape est adaptée au canal qui traverse le piston, et s'ouvre aussi de bas en haut. La première soupape est placée à l'orifice d'un long canal qui va s'ouvrir sous une cloche renversée, ou *récipient*, dont les bords garnis de suif s'appuient exactement sur un plateau de verre dépoli, nommé la *plate-forme*. En faisant monter le piston, il se forme un vide que vient aussitôt remplir l'air du récipient, la soupape inférieure étant soulevée par le mouvement ascensionnel du piston, tandis que la soupape supérieure reste fermée par l'effet de la pression de l'air extérieur. En faisant baisser le piston, l'air qui vient d'arriver dans le corps de pompe est comprimé et finit par soulever la soupape supérieure, pour se dégager dans l'atmosphère. C'est par ce mouvement alternatif du piston que l'on parvient à faire le vide d'air sous le récipient, et dans tout autre vase communiquant.

Telle serait la machine pneumatique simple. Ordinairement, on y adapte deux corps de pompe; l'un des pistons s'élève, tandis que

l'autre s'abaisse; d'où il suit qu'on est débarrassé de la pression de l'air extérieur qui s'équilibre sur les deux pistons, et qu'il reste seulement à vaincre les frottements et la différence des pressions de l'air renfermé dans les corps de pompe. On place sous le récipient, ou mieux dans un gros tube communiquant, une *éprouvette* destinée à mesurer la pression de l'air qu'il renferme. Cette éprouvette est un petit tube de verre à deux branches verticales, dont l'une est ouverte, et l'autre fermée et pleine de mercure. Par la diminution de pression de l'air, la colonne de mercure baisse dans cette seconde branche et monte dans la première; tellement que, si le vide était parfait, la colonne mercurielle serait la même dans les deux branches. Si la différence est d'un, ou de deux, ou de trois millimètres, on dit que le vide est à un, ou deux, ou trois millimètres de mercure.

Machine de compression.

La *machine de compression* repose sur les mêmes principes que la machine pneumatique : seulement les soupapes, au lieu de s'ouvrir de bas en haut, s'ouvrent de haut en bas. En faisant descendre le piston, l'air comprimé dans le corps de pompe ouvre la soupape inférieure et pénètre dans le récipient; et faisant remonter le piston, l'air extérieur afflue dans le corps de pompe, en ouvrant la soupape supérieure. Le récipient est ordinairement un vase métallique à parois épaisses, au col duquel est adapté un corps de pompe.

Fusil à vent.

Le fusil à vent se compose essentiellement d'une machine de compression en forme de culasse. L'air comprimé trouve ensuite un écoulement subit à travers le canon cylindrique, en chassant avec force la balle qu'on a placée au fond de ce cylindre.

Fontaine de compression.

Si le fond d'une machine de compression est rempli d'eau, l'air comprimé dans cette machine pressera avec force sur la surface du liquide; et si ce dernier trouve une issue, on le verra s'échapper sous forme de jet : tel est le mécanisme ordinaire d'une fontaine de compression.

On en fait de moins dispendieuses en soufflant avec la bouche à travers un tube qui passe dans le bouchon d'une bouteille, et vient aboutir dans l'eau qui occupe le fond seulement de cette bouteille; car l'air comprimé dans le haut du vase réagira pour faire jaillir l'eau par le tube, aussitôt qu'on aura cessé de souffler. Le même appareil, placé sous le récipient de la machine pneumatique, donne encore un jet d'eau quand on vient à faire le vide.

Application du principe d'Archimède aux fluides élastiques.

De même que les corps plongés dans un liquide perdent une partie de leur poids égal au poids du liquide déplacé, de même tous les corps situés dans l'air ou dans tout autre gaz, perdent une partie de leur poids égal à celui du gaz déplacé. On a tenu compte de cette perte dans l'établissement des poids du système métrique; ainsi, deux kilogrammes de matières diverses, par exemple de platine et de laiton, pèsent également dans le vide, mais pèsent inégalement dans l'air, vu que les volumes d'air qu'ils déplacent sont très différents; en sorte que le kilogramme de cuivre, qui déplace le plus d'air, pèse environ 8 centigrammes de moins que celui de platine.

Mongolfières.

Tel est le nom que l'on a donné aux ballons imaginés par Mongolfier, pour s'élever dans les airs. Mongolfier chauffait l'air contenu dans le ballon, en brûlant, à l'ouverture, des matières très inflammables. Il arrivait que, par sa dilatation, l'air du ballon devenait plus léger que l'air extérieur, et s'élevait en entraînant son enveloppe et les corps que l'on y suspendait. Mais à mesure que l'air intérieur se refroidissait, cet appareil aérostatique tendait à redescendre vers la terre.

Ballons.

Ce dernier inconvénient n'a pas lieu quand on remplit le ballon d'un gaz plus léger que l'air. On emploie à cet effet le gaz hydrogène, qui, à l'état de pureté parfaite, pèse 13 à 14 fois moins que l'air, mais qui, comme on le produit d'ordinaire, possède une légèreté spécifique bien moindre.

Pour calculer la force ascensionnelle d'un ballon, il faut calculer le poids de l'air qu'il déplace et le poids du gaz qui sert à le gonfler : la différence exprimera la force qui le pousse de bas en haut. Quant à la force qui le tire en sens contraire, c'est le poids de l'enveloppe du ballon, du filet qui recouvre cette enveloppe, de la nacelle suspendue à ce filet, et des personnes et autres objets placés dans cette nacelle.

A mesure que le ballon s'élève, il traverse des couches d'air de plus en plus rares. Le gaz intérieur, moins comprimé, se dilate et gonfle le ballon. Il arrive ainsi que la quantité d'air déplacée reste toujours la même et que le ballon tendrait continuellement à monter avec une égale force si son enveloppe pouvait s'étendre indéfiniment; mais, d'un autre côté, la matière de cette enveloppe, la nacelle et les corps qu'elle contient ne pouvant se gonfler de même que le ballon, le résultat ci-dessus ne se réaliserait qu'à peu près dans la pratique, et le ballon finirait par demeurer stationnaire. Pour monter plus haut, il faut jeter du lest; et quand on veut

descendre, on laisse échapper une portion du gaz, à travers une ouverture située à la partie supérieure du ballon.

Mélange des fluides élastiques.

Quand on met deux ou plusieurs gaz de natures diverses dans un même vase, ces gaz finissent toujours par se mêler complètement, quelles que soient d'ailleurs les différences qu'offrent leurs densités. En d'autres termes, chaque gaz se dispose comme s'il était seul, et se répand uniformément dans tout le volume du vase.

Les choses se passent de la même manière dans l'atmosphère; tous les gaz, oxigène, azote, vapeur d'eau, acide carbonique, etc., qui s'y rencontrent tendent à se disposer comme s'ils étaient seuls; en sorte que chacun de ces gaz forme une atmosphère, composée de couches dont la densité décroît de bas en haut, l'une quelconque de ces couches étant pressée par le poids de toutes les couches supérieures. La pression totale en chaque point du mélange est la somme des pressions de tous les gaz considérés dans leur isolement.

10. Énoncé du théorème de Toricelli sur l'écoulement des liquides; moyen de le vérifier par expérience, en ayant égard à la contraction de la veine. — Vase de Mariotte. — Siphon intermittent. — Fontaine intermittente — Pompes aspirantes et foulantes.

Énoncé du théorème de Toricelli sur l'écoulement des liquides; moyen de le vérifier par expérience, en ayant égard à la contraction de la veine.

Ce théorème consiste en ce que, pour un liquide parfait, qui s'écoule par un petit orifice en vertu de son poids seulement, la vitesse initiale est celle qu'acquerraient les molécules liquides en tombant librement depuis la surface de niveau jusqu'à l'orifice. D'où il résulte que le volume du liquide qui s'écoule en une seconde est égal à un cylindre dont la base serait la section de la veine fluide à l'orifice, et la longueur, la racine carré de $2gh$, en désignant par g la pesanteur (qui, pour Paris, est égale à 9,81 mètres) et par h la hauteur du niveau au-dessus de l'orifice. On aura donc la vitesse d'écoulement en divisant la dépense par la section de la veine et par le temps.

L'expérience donne moins pour l'écoulement du liquide, surtout si l'orifice est percée dans une paroi épaisse, si son diamètre est comparable à la hauteur du liquide et aux dimensions du vase. Plusieurs physiciens, entre autres Venturi, ont cru voir que la veine fluide se contracte à une petite distance de l'orifice; mais les expériences récentes faites par M. Savart avec beaucoup de précision, prouvent que ce minimum de section de la veine n'existe pas, ce que l'on constate en mesurant la section dans tous les sens, et non pas seulement dans la direction verticale. Ainsi, la veine fluide, qui s'échappe verticalement de haut en bas, ou latéralement dans le

sens horizontal, va sans cesse en se rétrécissant, conséquence bien simple de l'accélération de vitesse par l'effet de la chute du liquide.

Vase de Mariotte.

On obtient un écoulement constant au moyen du vase de Mariotte. A cet effet, on plonge un tube ouvert AB, fig. 141, dans un vase rempli d'eau. Ce tube entre à frottement dans le bouchon, qui ferme hermétiquement le vase. L'extrémité inférieure B du tube, étant placée plus haut que l'orifice C par où le liquide s'écoule, le tube se vide d'abord, et l'air arrive en B, pour s'élever en bulles à la partie supérieure DD du vase; ce qui fait que l'écoulement en C s'opère comme si le niveau du liquide se maintenait en MN. Car le point B étant à la pression atmosphérique, tous les points de MN doivent être à la même pression, laquelle résulte du poids de l'eau supérieure à MN, ajouté à la force élastique de l'air qui vient se loger en DD. On voit ensuite que l'écoulement sera de plus en plus lent, à mesure qu'on diminuera la distance CN. Mais l'écoulement cesse d'être uniforme, dès que le vase s'est vidé jusqu'en MN.

Si le liquide qui s'écoule ainsi d'une manière constante est reçu dans un second vase à deux orifices, par le moyen d'un tube qui, passant à travers le bouchon de l'un de ces orifices, arrive jusqu'au fond du vase, l'air ou tout autre gaz contenu en E s'écoulera aussi d'une manière uniforme par l'autre orifice munie d'un tube F.

Siphon.

Le siphon est un tube ouvert à deux branches parallèles et inégales ABC, fig. 142, dont les extrémités A et C, plongent dans le liquide de deux vases, l'un placé plus haut que l'autre. Ce tube étant préalablement rempli du même liquide, c'est-à-dire *amorcé*, l'écoulement se fait du vase supérieur au vase inférieur, en vertu de la différence CD des branches du siphon. Car les points de la surface A n'étant soumis qu'à la pression atsmosphérique, la même pression doit s'exercer en D, les colonnes AB et BD se faisant équilibre.

Siphon intermittent.

L'eau coule d'un vase A, fig. 143, dans un autre vase C, auquel est adapté un siphon recourbé D; le diamètre de ce siphon est plus grand que le diamètre de l'orifice B. Il tombe alors en C moins d'eau qu'il n'en sortirait dans le même temps par le siphon. Ainsi, quand le siphon sera amorcé, une partie de l'eau s'échappera, et le niveau baissera en C. Il faudra que ce niveau s'élève de nouveau jusqu'à la hauteur du coude D du siphon, pour que l'eau s'écoule une seconde fois par ce canal. Ces alternatives, ou *intermittences*, se répèteront

tant qu'on fournira par l'orifice B une quantité d'eau moindre que celle qui s'échapperait dans le même temps par le siphon.

Fontaine intermittente.

On donne aux fontaines intermittentes la forme indiqueé par la fig. 144. L'eau s'écoule par de petits orifices B jusqu'à ce que le ressort de l'air au-dessus du niveau AA, soit moindre que le ressort de l'air extérieur. Alors l'écoulement cesse en B, mais il continue en *b* qui est un très petit trou. Quand le niveau CC est descendu jusqu'à la petite ouverture *a* du tube *ad*, l'air extérieur y pénètre et vient en A augmenter le ressort de l'air, ce qui permet un second écoulement en B; l'eau remonte au-dessus de l'orifice *a*, intercepte la communication avec l'air extérieur, et peu après fait cesser l'écoulement en B, et ainsi de suite.

Pompes aspirantes et foulantes.

Une *pompe aspirante* est formée d'un tube, dit *corps* de pompe, dont l'extrémité inférieure pénètre dans l'eau d'un puits ou d'une rivière ; d'un *piston* P, fig. 145, ou cylindre qui glisse à frottement dans l'intérieur de ce tube ; enfin, de deux *soupapes* A et B, ou couvercles mobiles et à charnières. La soupape inférieure B est adaptée au tube ; elle s'ouvre de bas en haut pour laisser monter l'eau, et retombe de haut en bas pour empêcher le liquide de descendre. La soupape supérieure A est adaptée au piston, qui se trouve percé de part en part ; cette soupape s'ouvre de bas en haut, pour laisser passer l'eau à travers le canal du piston, et se referme de haut en bas pour empêcher le liquide de redescendre. Cela posé, au moyen d'un levier attaché à la tige du piston, on fait descendre ce piston jusqu'au contact de la soupape inférieure ; l'air placé entre cette soupape et le piston soulève la soupape supérieure pour s'écouler. On fait ensuite remonter le piston, ce qui occasionne un vide que vient remplir l'air placé au-dessous de la soupape inférieure : l'eau monte alors dans le tube, vu que la pression de l'air y est moindre qu'à l'extérieur. En continuant ainsi à faire alternativement descendre et monter le piston, l'eau finit par atteindre la soupape inférieure, s'introduire entre celle-ci et le piston, dépasser le piston lui-même, et finalement couler au dehors.

La *pompe foulante* ne diffère de celle-là que par la position de la soupape supérieure, qui, au lieu d'être adaptée au piston en A (lequel reste entièrement plein), se trouve en C à l'entrée d'un second tube, communiquant avec le tube principal, ou corps de pompe, au-dessus de la soupape inférieure. Quand l'eau a pénétré entre celle-ci et le piston, elle se trouve poussée par la descente du piston dans le tube latéral, dont elle ouvre la soupape, qui se referme aussitôt. Le tube latéral se remplit donc de plus en plus, et

le liquide finit par déborder à la partie supérieure. On peut ainsi refouler l'eau à une hauteur quelconque ; mais on ne peut l'aspirer que jusqu'à une hauteur de 32 pieds, mesurée entre le niveau extérieur du liquide et la soupape inférieure.

CHALEUR.

A la fin du siècle précédent, lorsque les savants français eurent refait la nomenclature chimique, on s'imagina que la cause de la chaleur résidait en un fluide particulier, très subtil il est vrai, qui se combinait avec les atomes de la matière pondérable, lesquels pouvaient en prendre des quantités diverses, de la même manière qu'un métal se combine avec différentes proportions d'oxigène. Une fois combiné avec les corps, le fluide de la chaleur n'était plus sensible à nos organes ni aux instruments, excepté une portion demeurée libre, qui se dégageait ou passait d'un corps à un autre. Ce fluide, on le désigna sous le nom de *calorique*, et l'on réserva l'ancien nom de *chaleur* pour indiquer la sensation que ce fluide produit sur nos organes.

Mais, depuis que l'on a fait des recherches plus précises sur les phénomènes de la chaleur, depuis surtout que la théorie des vibrations lumineuses a dû remplacer celle de l'émission, on a reconnu que les variations de la chaleur ne sont pas dues à l'accumulation d'un fluide dans les corps ou à sa déperdition, mais bien aux agitations vibratoires d'un pareil fluide ; ce fluide n'augmente ni ne diminue par les variations de chaleur, pas plus que le son ne change la quantité d'air qui entre en vibration. Ainsi, l'on s'est trop pressé de faire le mot *calorique ;* presque tous les physiciens l'on déjà abandonné, et ni Fourier ni aucun des géomètres de son école n'en ont fait usage.

11. Dilatation des corps par la chaleur. — Construction des thermomètres. — Mesure des dilatations des solides, des liquides et des gaz. — Détermination de la densité des gaz.

Dilatation des corps par la chaleur.

Un des effets les plus remarquables de la chaleur sur tous les corps est le changement de volume qu'elle y produit. En général, un corps qui s'échauffe augmente de volume, et un corps qui se refroidit diminue de volume. L'augmentation de volume est la *dilatation*, et la diminution s'appelle *contraction ;* l'une et l'autre se font suivant les trois dimensions des corps. Ce sont ces effets que l'on a pris pour mesure de la chaleur sensible ou de la *température* des corps, et les instruments imaginés dans ce but ont reçu le nom de *thermomètres*. La forme des thermomètres, leur nature et leur graduation ont beaucoup varié ; nous ne parlerons ici que de ceux auxquels on s'est arrêté généralement.

Construction des thermomètres.

A l'une des extrémités d'un *tube* de verre d'un très petit diamètre intérieur, on soude un *réservoir*, qui a la forme d'une boule ou d'un gros cylindre arrondi par les deux bouts; puis on remplit ce réservoir et une partie du tube d'un liquide, qui est ordinairement du mercure, et quelquefois de l'alcool coloré en rouge. En chauffant le liquide, on chasse l'air, puis l'on ferme à la lampe l'extrémité du tube. Cela fait, on plonge l'instrument dans un vase rempli de glace fondante, et l'on marque sur le tube l'extrémité de la colonne liquide, devenue stationnaire; ensuite on porte l'instrument au dessus d'un bain d'eau bouillante, en plongeant le réservoir dans la couche superficielle de ce bain, et l'on fait une seconde marque sur le tube, au bout de la colonne liquide, qui s'est considérablement allongée.

Ayant les deux points de la glace fondante et de l'eau bouillante, on divise leur intervalle en 100 parties égales ou *degrés*. Rien n'empêche ensuite de prolonger cette *graduation*, tant au-dessous du point de la glace fondante, qui doit être marqué 0, qu'au-dessus du point de l'eau bouillante, qui est marqué 100. Les degrés inférieurs à 0 sont réputés *négatifs*, et doivent être précédés du signe —; et l'on peut, si l'on veut, mettre le signe + en avant des degrés supérieurs à 0, lorsqu'on inscrit les indications de ce thermomètre, nommé *centigrade*.

Réaumur avait divisé en 80 degrés l'intervalle compris entre la glace fondante et l'eau bouillante. Pour convertir les degrés du *thermomètre de Réaumur* en degrés du thermomètre centigrade, il faut donc les augmenter du quart, ou les multiplier par la fraction 5/4. Réciproquement, il faut diminuer les degrés centigrade d'un cinquième, ou les multiplier par 4/5, pour reproduire les degrés de Réaumur, dont l'usage est encore très répandu.

Les anglais ont conservé le thermomètre imaginé par Fahrenheit, qui a divisé l'intervalle de la glace fondante à l'eau bouillante en 180 degrés, et a placé le zéro de la division 32 degrés au-dessous du point de la glace fondante; en sorte que ce dernier point est marqué 32, et celui de l'eau bouillante 212. Pour convertir les degrés de Fahrenheit en degrés centigrades, il faut d'abord en ôter 32, puis multiplier le reste par 4/9. Réciproquement, on multipliera les degrés centigrades par 9/4, puis on ajoutera 32 au produit pour avoir les degrés de Fahrenheit.

Mesure des dilatations des solides, des liquides et des gaz.

La dilatation d'un corps solide, par la chaleur, a lieu en longueur, en largeur et en épaisseur, proportionnellement à ces trois dimensions et à la variation de température, variation qu'il ne faut

pas supposer trop considérable. Cela veut dire que si une unité de longueur s'étend d'un millième pour un degré de réchauffement, elle s'étendra du double pour deux degrés, et ainsi de suite ; et que deux unités de longueur auront une dilatation double de la dilatation d'une seule unité, pour le même accroissement de température.

La fraction qui exprime la dilatation d'une unité de longueur pour un degré de réchauffement est ce que l'on nomme le *coefficient de dilatation*. Il faut le doubler pour avoir le coefficient de la dilatation en surface, et le tripler pour avoir le coefficient en volume. La capacité d'un vase se dilate précisément comme le ferait un même volume plein de la matière du vase. Ainsi, la dilatation *réelle* d'un liquide renfermé dans un vase est égale à sa dilatation *apparente*, augmentée de toute la dilatation réelle du vase.

Il est bon d'observer que, lorsqu'il s'agit de solides et même de liquides, on peut prendre pour unité, soit leur volume à zéro, soit leur volume à cent degrés, la différence des résultats étant inappréciable, vu que la dilatation est peu considérable. Mais, pour l'air, les gaz et les vapeurs, dont la dilatation est très grande, il faut toujours prendre comme unité leur volume à la même température, à zéro par exemple. Alors, on trouve que ces fluides élastiques se dilatent tous également, savoir, de la fraction 0,00375 ou 1/267 de leur volume primitif à zéro ; en sorte que 267 litres d'un gaz quelconque à zéro, occupent 268 litres à 1 degré, 269 à 2 degrés, et ainsi de suite.

Pour connaître la dilatation d'un corps solide, d'un métal par exemple, on le prend sous la forme d'une règle que l'on place dans l'eau. En assujettissant l'un des bouts de la règle contre un obstacle fixe, on observe de combien l'autre bout avance pour un accroissement de température déterminé. On divise cet allongement par le nombre de degrés correspondants et par le nombre d'unités de longueur de la règle, ce qui donne le coefficient de dilatation.

La dilatation absolue d'un liquide peut s'observer en remplissant de ce liquide deux tubes verticaux A et B, fig. 146, communiquant entre eux par un petit tube horizontal C. On tient, par exemple, le liquide en A à la température zéro, et le liquide en B à la température de 100 degrés. Pour rester en équilibre les, colonnes A et B devront presser également aux extrémités du tube C ; leurs densités seront donc en raison inverse de leurs longueurs, que l'on mesurera directement ; la différence des deux longueurs, divisée par la longueur de la colonne A et par 100, donnera le coefficient de la dilatation en volume.

Pour observer la dilatation des gaz, on les introduit dans une boule de verre terminée par un long tube de petit diamètre où le gaz est séparé de l'air extérieur au moyen d'un index de mercure. Connaissant le rapport de capacité de la boule et des divisions du tube, et notant les variations de la colonne gazeuse sous l'influence

de diverses températures, on a tout ce qu'il faut pour trouver la dilatation des gaz.

Détermination de la densité des gaz.

La densité des gaz se compare à celle de l'air prise pour unité, mais il faut que tous ces gaz soient pesés à la même pression, qui est de 76 centimètres de mercure, et à la même température, qui est le zéro du thermomètre. On commence par faire le vide dans un grand ballon, où l'on introduit le gaz soumis à l'expérience : on pèse le ballon ainsi rempli de gaz ; on le pèse quand il est rempli d'air. On retranche de chaque pesée le poids du ballon vide, puis on divise le poids du gaz par le poids de l'air, ce qui donne la densité du gaz. Comme il serait difficile d'opérer à la température zéro et à la pression de 76 centimètres, on fait les pesées à des températures et à des pressions quelconques, sauf à revenir par le calcul aux conditions ci-desssus. L'essentiel est que les gaz soient purs et bien secs.

12 Chaleur rayonnante. — Sa réflexion. — Sa transmission au travers des différents corps. — Pouvoirs émissifs, absorbants et réfléchissants. — Équilibre mobile de température. — Réflexion apparente du froid.

Chaleur rayonnante.

Tous les corps émettent des *rayons de chaleur*, qui se propagent avec une extrême rapidité. Cette chaleur, dite *rayonnante*, s'en va dans toutes les directions et s'atténue, en se divisant, proportionnellement au carré de la distance du point rayonnant. On démontre l'existence de ces rayons, d'abord directement en recevant l'impression subite d'un foyer de chaleur ; puis, à l'aide de miroirs qui concentrent les rayons en un point déterminé.

Sa réflexion.

Les rayons de chaleur sont susceptibles de réflexion, comme la lumière. Lorsqu'ils tombent à la surface d'un corps poli, d'un miroir métallique par exemple, ils se réfléchissent en formant autour de la normale en chaque point un angle de réflexion égal à l'angle d'incidence. Quand on reçoit les rayons du soleil sur un miroir concave, ces rayons se réfléchissent en très grande quantité ; ils vont s'entrecroiser en un point commun, qui est le *foyer* du miroir, et produisent en ce point une chaleur très intense, capable d'enflammer ou de fondre certaines matières.

Sa transmission au travers de différents corps.

Mais tous les rayons calorifiques ne se trouvent pas réfléchis à

la surface des corps ; plusieurs traversent ces corps eux-mêmes, ce qui est un autre point de ressemblance avec les rayons lumineux. Le sel gemme est surtout remarquable par la grande quantité des rayons calorifiques qui peuvent le traverser librement. Cette transmission se fait sans échauffer les corps d'une manière sensible ; elle a lieu en ligne droite ou en ligne brisée, suivant que les faces d'entrée et de sortie sont ou non perpendiculaires à ces rayons. Les corps transparents ne sont pas toujours les plus *diathermaux;* il y en a de tout-à-fait opaques, qui laissent néanmoins passer les rayons de chaleur. Ces rayons passent d'autant plus facilement qu'ils viennent d'une source plus échauffée, plus lumineuse. Après avoir traversé une première lame de verre par exemple, ils éprouvent moins de perte en traversant une seconde lame, et encore moins en passant à travers une troisième, de la même manière que si les rayons se trouvaient tamisés aux premières lames.

Pouvoirs émissifs, absorbants et réfléchissants.

En général, parmi les rayons calorifiques qui viennent rencontrer la surface d'un corps, les uns pénètrent dans l'intérieur de ce corps qui les absorbe, tandis que les autres sont réfléchis par la surface, comme la lumière sur un miroir. Le *pouvoir absorbant* d'un corps exprimera donc la proportion des rayons incidents qu'il admet dans son intérieur, et qui élèvent sa température. Le *pouvoir réfléchissant* est le complément du précédent, et indique la proportion des rayons incidents qui se trouvent réfléchis, sans augmenter la température du corps.

Chaque corps ayant la propriété d'émettre des rayons de chaleur, on nomme cette faculté le *pouvoir émissif*, qui varient beaucoup d'un corps à un autre. Ainsi, dans les mêmes circonstances, le noir de fumée et l'eau émettent dix fois plus de rayons calorifiques que les métaux polis.

Le pouvoir émissif et le pouvoir absorbant sont égaux entre eux, c'est-à-dire que les rayons trouvent la même facilité à sortir d'un corps et à y pénétrer ; par conséquent, ce sont les métaux polis qui ont les moindres pouvoirs émissifs et absorbants, comme jouissant au plus haut degré du pouvoir réfléchissant.

Équilibre mobile de température.

Dans une enceinte dont la température est uniforme, le rayonnement n'en existe pas moins, et tous les points reçoivent autant de rayons qu'ils en émettent. S'il se trouve des corps à des températures différentes, les plus chauds rayonnent plus qu'ils ne reçoivent, et par conséquent se refroidissent ; au contraire, les corps froids recevant plus de rayons qu'ils n'en émettent, se réchauffent ; et cet échange inégal a lieu en vertu des températures propres de

chaque corps, et non pas en vertu de la différence de température entre les uns et les autres; car il serait absurde de supposer qu'un même corps, mis en présence de plusieurs corps différemment échauffés, rayonnât vers ceux-ci inégalement suivant les différences de sa température à celle de chacun de ces autres corps. Il est plus rationnel d'admettre que chaque corps rayonne indépendamment de tous les autres, et que ce rayonnement a encore lieu quand toutes les températures sont devenues égales, auquel cas on dit qu'il y a *équilibre mobile* de température.

Réflexion apparente du froid.

Si l'on place un corps chaud, par exemple un boulet de fer rougi, au foyer d'un miroir métallique, les rayons qui viennent tomber sur ce miroir seront réfléchis parallèlement à l'axe de ce miroir; et si l'on reçoit ce faisceau de rayons sur un autre miroir placé en face du premier, les rayons réfléchis pour la seconde fois viendront s'entrecroiser au foyer de ce second miroir, en y produisant une vive chaleur.

Si au lieu d'un corps chaud, on place un corps froid, comme la glace, au foyer de l'un des miroirs précédents, le foyer de l'autre miroir recevra beaucoup moins de rayons qu'il n'en émet en sens contraire; et un corps placé à ce second foyer se refroidira, absolument de la même manière que si la glace avait envoyé des rayons *frigorifiques*, comme on l'avait cru d'abord.

13. Conductibilité des corps pour la chaleur.

Conductibilité des corps pour la chaleur.

La *conductibilité* des corps pour la chaleur est la propriété qu'ils ont de transmettre de proche en proche la chaleur reçue par un de leurs points. De tous les corps, les métaux sont ceux qui conduisent le mieux la chaleur; viennent ensuite les substances pierreuses, les matières végétales et animales, les liquides et enfin les gaz; mais dans les liquides et les gaz la communication de la chaleur est activée par les mouvements intérieurs de ces fluides, dont les parties se déplacent avec une grande facilité.

Les géomètres admettent que le rayonnement de la chaleur a aussi lieu dans l'intérieur des corps, c'est-à-dire entre les molécules, qui sont censées rayonner leur chaleur des unes aux autres; en sorte que la conductibilité de la chaleur résulterait de ce rayonnement intérieur et moléculaire.

14. Passage de l'état solide à l'état liquide, et passage inverse de l'état liquide à l'état solide. — Chaleur latente. — Mélanges réfrigérents.

Passage de l'état solide à l'état liquide, et passage inverse de l'état liquide à l'état solide.

Par l'accumulation de la chaleur dans les corps, on les fait passer en général, de l'état solide à l'état liquide, ce qui est le phénomène de la liquéfaction ou fusion. Réciproquement, en refroidissant les liquides ils reviennent à l'état solide, ce qui est le phénomène de la solidification.

Ce double changement d'état a aussi lieu sans variation de température, et par le seul effet du contact ou de la séparation de deux corps. Ainsi, le sucre se liquéfie dans l'eau à toute température, et se solidifie de nouveau par l'évaporation de l'eau. La chimie offre une foule d'exemples de pareils phénomènes, auxquels on donne les noms de *dissolution*, de *précipité*, de *cristallisation*, etc. Nous n'en parlerons pas ici, et nous nous bornerons aux changements d'état produits par les variations de température seulement.

A mesure qu'un liquide se refroidit, son volume diminue, sa densité augmente, et quelquefois la solidification vient surprendre le liquide, qui n'a pas cessé de se condenser. D'autres fois, le volume liquide diminue jusqu'à une certaine température, pour se dilater à des températures inférieures, avant le terme de la solidification. Ainsi, l'eau se condense par refroidissement jusqu'à quatre degrés, puis elle augmente de volume depuis quatre degrés jusqu'à zéro, qui est le point de glace; on dit alors que le maximum de densité de l'eau arrive à 4 degrés. Ce maximum de densité avant le passage à l'état solide a lieu certainement pour un grand nombre d'autres corps, puisqu'on les voit nager à l'état solide dans une partie de la même matière à l'état fluide; mais ce phénomène n'a bien été examiné que pour l'eau.

L'augmentation du volume de ce liquide ne s'arrête pas à la température zéro; quand elle passe à l'état de glace, l'eau marque subitement une dilatation sur laquelle on n'est pas d'accord, et qui semble varier entre un quinzième et un vingt-cinquième. Dans les mers polaires, on compte un dixième pour l'augmentation du volume de la glace, parce que l'eau en se congélant abandonne le sel marin, ce qui diminue sa densité. Ainsi, une glace flottante qui s'élève d'un mètre au-dessus de l'eau est réputée de 10 mètres d'épaisseur, dont neuf au-dessous de la surface liquide.

Ce n'est pas tout : le point de congélation d'un liquide n'est pas toujours le même, tandis que le point de liquéfaction est invariable. Ainsi, la glace se fond invariablement à la température zéro, tandis qu'on peut amener de l'eau liquide à plusieurs degrés

au-dessous de zéro, à — 15 degrés et même au-delà; la seule précaution à prendre est de ne point agiter le liquide : mais ceci tient à la chaleur *latente*, dont nous parlerons bientôt.

Pour constater le maximum de densité de l'eau, Trallès a imaginé le procédé suivant : on remplit une éprouvette d'eau, où viennent plonger les boules de deux thermomètres, l'une près du fond, l'autre près de la surface liquide. On refroidit l'eau progressivement et on observe les variations des deux thermomètres. Avant d'arriver à 4 degrés, le thermomètre inférieur indique une température plus basse que celle marquée par le thermomètre supérieur. La raison en est que l'eau la plus froide se précipite au fond de l'éprouvette, puisqu'elle est plus dense. Mais il arrive ensuite que le thermomètre inférieur indique plus de chaleur que le thermomètre supérieur, parce que l'eau se dilate en se refroidissant de 4 degrés à zéro. Le point précis où les deux thermomètres s'accordent est celui du maximum de densité.

Chaleur latente.

Lorsque les corps passent d'un état à un autre, ils éprouvent un changement subit sous le rapport de la chaleur. Ainsi, l'eau qui passe de l'état de glace à l'état liquide exige, pour cette transformation, une grande quantité de chaleur, qui ne laisse aucune trace de son existence; et quand le liquide se congèle, la même quantité de chaleur redevient libre. La chaleur qui disparaît et reparaît dans les changements d'état des corps a reçu le nom de *chaleur latente* par opposition à la *chaleur sensible* ou *thermométrique*, qui produit des sensations sur nos organes et sur le thermomètre.

Pour mesurer cette chaleur latente, de l'eau par exemple, on mélange rapidement de la glace à zéro avec de l'eau liquide suffisamment chaude; et quand la glace est fondue, on mesure la température du liquide, laquelle a baissé notablement. On trouve ainsi que la glace exige, pour se fondre, toute la chaleur nécessaire pour élever de 75 degrés un poids égal d'eau liquide; tellement que, si l'on mélange des poids égaux de glace à zéro et d'eau à 75 degrés, on obtient le tout liquide à zéro. Dans le calcul des températures de semblables mélanges, on doit donc considérer la glace à zéro comme de l'eau liquide à 75 degrés sous zéro.

Mélanges réfrigérents.

On produit des froids intenses par le mélange de deux corps susceptibles de se liquéfier mutuellement. Ainsi, de la glace à zéro et du sel de cuisine réagissent l'un sur l'autre et se liquéfient en produisant un froid d'environ 20 degrés sous zéro. C'est ce qu'on

appelle un *mélange réfrigérant*. On en connaît en chimie qui procurent des froids encore plus intenses.

Pour calculer la température d'un mélange réfrigérant, il faudrait connaître la chaleur latente de l'un et de l'autre des corps mis en présence, et la chaleur que dégage leur réaction chimique : la différence entre les chaleurs latentes et la chaleur de réaction donnerait la température du mélange ; mais on ne connaît que la chaleur latente de l'eau.

15. Détermination des capacités par la méthode des mélanges et par la fusion de la glace.

Détermination des capacités par la méthode des mélanges et par la fusion de la glace.

Les corps exigent plus ou moins de chaleur pour s'élever d'un même nombre de degrés en température: de là les *chaleurs spécifiques*, c'est-à-dire propres à telle ou telle espèce de substance. En général, la chaleur spécifique croît un peu avec la température du corps ; c'est-à-dire par exemple qu'il faut un peu plus de chaleur pour chauffer du fer de 100 à 101 degrés que pour le chauffer de zéro à 1 degré.

Dans la mesure des chaleurs spécifiques, on prend pour unité celle de l'eau liquide ; en termes plus précis, on prend comme unité la chaleur nécessaire pour élever d'un degré la température d'un kilogramme d'eau. Cela convenu, on mélange des poids déterminés de ce liquide et du corps dont on cherche la chaleur spécifique, l'un et l'autre étant primitivement à des températures assez différentes ; et, quand le mélange est arrivé à une température uniforme qui est intermédiaire, il ne reste plus qu'à la mesurer. Alors la quantité de chaleur gagnée par l'une des substances doit être précisément égale à la quantité de chaleur perdue par l'autre, si toutefois le mélange a été fait rapidement.

Par exemple, si l'on mêle un kilogramme d'eau à 45 degrés avec un kilogramme de mercure à 21 degrés, le mélange aura une température de 41 degrés. Ainsi, les 4 degrés perdus par l'eau représentent la même chaleur que les 20 degrés gagnés par le mercure ; en d'autres termes, la chaleur spécifique du mercure n'est que le cinquième de celle de l'eau. Cette méthode, dite des mélanges, s'applique aussi aux corps solides que l'on peut mettre dans l'eau.

On détermine encore les chaleurs spécifiques par le *calorimètre* de glace. C'est un vase environné de tous côtés par de la glace à zéro. Des masses égales de diverses substances, élevées à la même température, occasionneront la fusion de quantités de glace proportionnelles à leur chaleur spécifique, lorsqu'on les mettra successivement dans le calorimètre.

16. Passage de l'état liquide à l'état de vapeur. — Formation des vapeurs dans le vide. —Maximum de leur force élastique.—Mesure de la force élastique maximum à diverses températures.— Ébullition, *chaleur latente*. — Condensation. — Idée des principes sur lesquels repose la construction des machines à vapeur.

Passage de l'état liquide à l'état de vapeur.

On vient de voir que la chaleur portée à un certain point produit la liquéfaction des corps solides; mais son action, à toute température, est capable de réduire le liquide en *vapeur*. On entend par vapeur une matière amenée au même état de division que l'air, aussi transparente que ce dernier et élastique comme les gaz. La séparation entre les gaz et les vapeurs est ancienne; elle était fondée sur une distinction qui ne peut plus subsister, savoir que les gaz proprement dits, étaient réputés fluides élastiques *permanents*, tandis que les vapeurs pouvaient se réduire en liquide. Mais on est parvenu récemment, sauf quelques exceptions, à liquifier les gaz en augmentant suffisament la pression et diminuant la température.

Il est facile de s'assurer que l'air contient de la vapeur d'eau; car certaines substances avides de ce liquide l'absorbent assez promptement quand on les expose dans l'atmosphère. L'eau d'un vase ouvert finit par se dissiper complètement, preuve que ce liquide se résout en vapeur. Enfin, l'eau chauffée graduellement, se vaporise avec une vitesse croissante; et, au point d'ébullition, la vapeur aqueuse soulève le poids de l'atmosphère et sort des vases avec violence. Mais il ne faudrait pas prendre pour de la vapeur l'espèce de brouillard qui apparaît au-dessus de l'eau en ébullition : ce n'est qu'une portion de vapeur refroidie et liquéfiée par le contact de l'air, et qui y flotte sous forme de gouttelettes : la vapeur réelle est tout-à-fait invisible.

Formation des vapeurs dans le vide.

On a vu qu'une colonne verticale de mercure de 76 centimètres, fait équilibre à la pression de l'air, et qu'il ne reste rien au-dessus de cette colonne dans le tube du baromètre : cet espace est ce qu'on nomme le vide barométrique. Si l'on y introduit une goutte d'eau, on voit celle-ci disparaître en tout ou en partie, et la colonne de mercure diminuer d'une manière très sensible, comme d'un ou de deux centimètres. C'est qu'alors le vide barométrique s'est rempli de vapeur d'eau invisible, ayant une force élastique nécessairement représentée par la dépression de la colonne mercurielle, car le poids de la goutte d'eau introduite est nul en comparaison.

Il se forme donc de la vapeur dans le vide, et ce n'est pas l'air qui donne lieu à l'évaporation de l'eau; au contraire, la présence de l'air est un obstacle à la production rapide de la vapeur; car si l'on met sous le récipient d'une machine pneumatique un vase rempli d'eau, et qu'on fasse rapidement le vide, l'eau entre un instant comme en

ébullition, tant est rapide le dégagement de la vapeur; nous disons *un instant*, car bientôt l'agitation du liquide cesse, de même que si l'évaporation avait un terme, et c'est en effet ce qui a lieu, comme nous le verrons ci-après.

Quand on a de la vapeur sans eau liquide dans un tube vertical, fermé par le haut, ouvert par le bas et plongeant dans un bain de mercure, si l'on vient à augmenter l'espace occupé par cette vapeur en retirant plus ou moins le tube hors du bain de mercure, sans toutefois qu'il cesse d'y plonger, on trouve que la force élastique de la vapeur est d'autant moindre que son volume est plus grand, et réciproquement; ce qui est la loi de Mariotte pour les gaz.

Si l'on chauffe cette même vapeur, toujours débarrassée d'eau liquide, on trouve qu'elle se dilate de la fraction 0,00375 de son volume à zéro pour chaque degré d'augmentation en température, absolument comme les gaz ordinaires. Ainsi, la vapeur d'eau et celle de tous les autres liquides, obéissent aux mêmes lois que l'air, sous le rapport des pressions et des dilatations.

Maximum de leur force élastique.

La loi de Mariotte cesse d'être applicable à la vapeur, quand, celle-ci restant à la même température, on diminue par trop son volume en augmentant sa pression; et il arrive un terme où la pression est au *maximum* : si l'on réduit le volume de la vapeur au-dessous de cette limite, une partie de la vapeur se *condense*, c'est-à-dire redevient liquide et se dépose sous forme de gouttelettes contre les parois du vase; de telle manière que la pression reste à cet état maximum qu'elle avait atteint au commencement de la liquéfaction et que le liquide ainsi déposé représente exactement la vapeur qui occupait la portion de volume éliminée depuis cet instant. Si donc, on réduisait de moitié un volume de vapeur au maximum de pression, une moitié de cette vapeur se condenserait; et si l'on revenait au volume primitif, le liquide ainsi reproduit repasserait tout entier à l'état de vapeur, sans que la vapeur ait cessé d'avoir sa pression, ou tension, ou force élastique maximum. C'est ce qu'on exprime en disant que la vapeur à son maximum de pression ne se laisse pas *comprimer*. L'espace qu'elle occupe alors est *saturé* de vapeur, et cette vapeur est dite *à saturation*.

Mesure de la force élastique maximum à diverses températures.

A toute température, il y a une pression maximum pour la vapeur d'eau, comme on le verra par le tableau suivant, où les pressions maximum sont exprimées par des millimètres de mesure:

Températures	0°.	5°.	10°.	15°.	20°.	25°.	50°.	100°.
Pressions	5.	7.	9,5.	12,8.	17,5.	23,1.	88,7.	760.

On voit ainsi que la pression maximum de la vapeur à 100 de-

grés est la même que celle de l'atmosphère, et voilà pourquoi la vapeur soulève alors l'air extérieur tout d'une masse, lorsqu'elle s'échappe du vase où elle bouillonne. Au-delà de 100 degrés, la force élastique maximum de la vapeur s'accroît très rapidement, et il est nécessaire de renfermer l'eau dans un vase à fortes parois, vu que la pression atmosphérique ne peut plus contrebalancer le ressort de la vapeur.

L'expérience de la production de la vapeur à une température plus grande que cent degrés, se fait dans une marmite de Papin, ainsi désignée par le nom de son inventeur. C'est un vase métallique, dont le couvercle est maintenu en place par une vis de pression, ou un levier chargé d'un poids suffisant. Lorsque l'eau de cette marmite a dépassé plus ou moins le terme de l'ébullition dans les vases ouverts, on retire un bouchon placé au couvercle, et la vapeur s'échappe en sifflant et projetant une gerbe de gouttelettes, dues à la condensation d'une portion de vapeur invisible. Ce jet dure jusqu'à ce que l'eau de la marmite retombe à 100 degrés, terme auquel la pression de l'atmosphère contrebalance la force élastique de la vapeur.

Ébullition, chaleur latente.

Nous venons de voir que l'ébullition se décide quand la force élastique d'une vapeur contrebalance exactement la pression atmosphérique. Si l'on s'élève sur une haute montagne, le poids de l'atmosphère devenant moindre, l'ébullition a lieu plus tôt, c'est-à-dire à une température moindre que 100 degrés. Enfin, si l'on place de l'eau sous le récipient de la machine pneumatique, l'ébullition aura lieu, même aux températures ordinaires, surtout si l'on a soin de mettre sous le récipient de l'acide sulfurique pour absorber la vapeur au fur et à mesure qu'elle se produit.

Le passage des liquides à l'état de vapeur exige beaucoup de chaleur, qui devient *latente* et reparaît lors de la liquéfaction. Pour mesurer cette chaleur latente de la vapeur d'eau, on fait arriver par exemple un courant de vapeur à 100 degrés dans de l'eau à zéro, et l'on mesure l'élévation de la température du liquide après la liquéfaction d'un poids déterminé de vapeur. On trouve ainsi que la vapeur aqueuse, en se liquéfiant, dégage toute la chaleur nécessaire pour élever de 550 degrés la température d'un même poids d'eau liquide, ou, ce qui revient au même, pour porter de zéro à 100 degrés un poids d'eau cinq fois et demie plus grand. Ainsi un kilogramme de vapeur à 100 degrés, liquifié dans 5 kilogrammes et demi d'eau à zéro, donne 6 kilogrammes et demi d'eau à 100 degrés. Par conséquent, en calculant les températures de sem-

blables mélanges, on doit considérer la vapeur d'eau à 100 degrés comme de l'eau liquide à 650 degrés.

Condensation.

La *condensation*, ou passage de la vapeur à l'état de liquide, s'opère, comme nous l'avons vu, soit par un excès de pression extérieure, soit par un refroidissement trop considérable, soit par le concours de ces deux causes.

Idée des principes sur lesquels repose la construction des machines à vapeur.

Les *machines à vapeur* sont celles où la force motrice est l'élasticité de la vapeur d'eau, accrue par l'action de la chaleur. Si la vapeur agit sous une pression comprise entre une et deux atmosphères, la machine est dite à *basse pression;* elle est à *moyenne pression*, entre deux et trois atmosphères; et à *haute pression*, au-delà de trois atmosphères. Mais quelle que soit la force élastique de la vapeur mise en jeu, on peut, avec toutes ces machines, obtenir les mêmes résultats, les mêmes puissances; car on conçoit que la vapeur à une atmosphère, agissant contre la base d'un large piston, produise autant d'effet que la vapeur à dix atmosphères qui agirait sur une base de piston dix fois moindre; la force totale étant proportionnelle, dans tous les cas, au produit de l'élasticité de la vapeur par la surface qu'elle pousse.

Dans toute machine à vapeur, il y a une chaudière où l'eau est réduite en vapeur par le feu d'un foyer; un corps de pompe, dans lequel se meut un piston par l'action de la vapeur; un levier ou balancier, dont l'un des bouts est poussé en sens alternatifs par la tige du piston, et dont l'autre bout est armé d'une bielle, qui fait tourner une roue et imprime ainsi un mouvement continu, que l'industrie utilise de mille manières. Mais la forme des machines à vapeur varie beaucoup, et la vapeur elle-même n'y est pas toujours employée de la même manière.

Dans l'ancienne machine imaginée par Newcommen, et qui servait à élever de l'eau, le feu du foyer A, (fig. 147,) vaporise l'eau contenue dans la chaudière B. La vapeur arrive à travers le robinet C, que l'on peut ouvrir et fermer à volonté, sous le piston D; elle remplit la partie inférieure du corps de pompe, en expulsant l'air par l'orifice E. La tige du piston est liée par une chaîne au balancier FG, lequel est tiré par un contre-poids H. Un second piston J joue dans un corps de pompe plongeant dans l'eau qu'il s'agit d'élever. Le contre-poids H abaisse J et soulève D jusqu'à un arrêt. Alors on ferme le robinet C, on ouvre le robinet K, qui laisse arriver en D l'eau froide d'un réservoir L, alimenté par le tube M. Aussitôt la vapeur en D se condense par refroidissement, et s'écoule avec l'eau d'injection par le tube N. Le vide, ou à peu

près, étant ainsi produit en D, la pression atmosphérique fait descendre le piston D et remonter le piston J, et ainsi de suite alternativement.

Watt a perfectionné cette machine en supprimant l'action de l'air et l'injection de l'eau froide dans le corps de pompe. La vapeur vient presser alternativement sur les deux bases D et D' du piston, qui joue alors dans un corps de pompe fermé de toute part, la tige du piston glissant à frottement dans le couvercle supérieur. Quand la vapeur presse en D, elle quitte D' par une issue qui la conduit dans un réservoir environné d'eau froide et que l'on nomme *condenseur*, où elle se liquéfie; alors le piston monte. Arrivé au terme de son ascension, la vapeur en D trouve issue pour se condenser de la même manière, tandis que la vapeur obtient passage pour venir presser en D': alors le piston baisse, et ainsi de suite alternativement. Cette machine est dite *à double effet*, celle de Newcommen étant *à simple effet*.

Il y a des machines à deux corps de pompe et à deux pistons dont le jeu est alternatif. On s'en sert principalement dans l'emploi de la vapeur à haute pression. Ces dernières machines sont aussi à double effet, c'est-à-dire que chaque piston est tour à tour poussé par ses deux bases. Dans les unes, la vapeur qui a produit son effet en plein, s'échappe ensuite dans l'atmosphère; dans les autres, cette vapeur au lieu d'agir en communication continuelle avec la chaudière, se trouve séparée de celle-ci quand le piston n'a encore fait qu'une partie de sa course; cette course s'achève pourtant sous l'impulsion déjà reçue et à l'aide de la vapeur qui, se répandant en un espace de plus en plus considérable, perd sans cesse de son élasticité. Dans ce cas, la machine est à *détente*; dans le premier cas, elle est sans détente. Quelquefois aussi, la vapeur arrive dans le corps de pompe avec une force élastique moindre que dans la chaudière, ensorte que la détente s'opère en entrant dans le corps de pompe.

17. Dans le mélange des vapeurs avec les gaz, les forces élastiques s'ajoutent. — Hygrométrie. — Sources de chaleur et de froid.

Dans le mélange des vapeurs avec les gaz, les forces élastiques s'ajoutent.

La vapeur se forme dans l'air, ou dans tout autre gaz, en même quantité que dans le vide : tout dépend de la température. Dans les calculs relatifs aux mélanges des gaz et des vapeurs, il faut donc considérer celles-ci comme existant seules. Par exemple, ayant de l'air sous la pression de 760 millimètres dans un vase fermé, où l'on introduit assez d'eau pour saturer l'espace à la température de 25 degrés, il se produira là une vapeur ayant, d'après le tableau donné ci-dessus, la pression maximum de 23 millimètres, qui, s'a-

joutant à la pression de l'air, produira un mélange à 783 millimètres; et si l'on voulait que ce mélange revint à la pression de 760, il faudrait que l'air fût, pour sa part, à la pression de 760 moins 23, ou de 737, puisque la vapeur pressera toujours comme 23. D'après la loi de Mariotte, il faudra donc que le volume de l'air, qui est le même que celui du mélange, augmente dans le rapport de 737 à 760.

Hygrométrie.

L'hygrométrie a pour but de déterminer la force élastique de la vapeur en chaque lieu, et par suite la quantité absolue de cette vapeur. Le degré d'*humidité* de l'air est le rapport de la quantité de vapeur qu'il contient actuellement, à la quantité correspondante au maximum de densité de vapeur pour la même température. Ainsi, l'humidité est extrême quand l'air contient toute la vapeur que comporte la température actuelle; la sécheresse extrême résulterait de l'absence complète de la vapeur.

Le degré d'humidité de l'air se mesure par le moyen d'instruments nommés *hygromètres*. Celui de Saussure est fondé sur ce fait que les substances organiques s'allongent par l'humidité et se raccourcissent par la sécheresse. Il se compose d'un cheveu, préalablement dégraissé dans une eau de potasse; ce cheveu est fixé par son bout supérieur; et sa partie inférieure, après s'être enroulée sur une poulie très petite et très mobile, supporte un petit poids destiné à tendre le cheveu et à faire tourner la poulie quand le cheveu s'allonge. La poulie est munie d'une longue aiguille, dont l'extrémité libre parcourt les divisions d'un arc de cercle gradué.

Pour faire cette graduation, on met l'appareil sous une cloche de verre, qui contient un corps très avide d'eau. Celui-ci dessèche l'air de la cloche et par suite le cheveu, qui, en se raccourcissant, fait tourner la poulie et son aiguille. On marque le point de l'arc où l'aiguille s'arrête : c'est le point de sécheresse extrême. On met ensuite de l'eau sous la cloche pour la saturer de vapeur, et le cheveu s'allonge le plus possible; alors la poulie tourne en sens contraire, et son aiguille s'arrête en un second point, qui est celui de l'humidité extrême. Cela fait, on divise en cent parties égales l'arc compris entre le point de sécheresse extrême, que l'on marque 0, et le point d'humidité extrême, que l'on marque 100. Malheureusement, les degrés intermédiaires n'indiquent pas des degrés proportionnels d'humidité, ainsi que le montrent les résultats suivants de l'observation :

degrés 0—10—20—30—40—50—60—70—80—90—100
vapeur 0— 7—12—18—24—28—36—47—61—79—100.

Par exemple, quand l'hygromètre marque 70 degrés, l'air ne renferme que les 47 centièmes, ou moins de la moitié de la vapeur qu'il pourrait contenir à la même température.

Sources de chaleur et de froid.

La principale source de chaleur réside dans les rayons solaires. Toutes les actions chimiques en produisent plus ou moins; ainsi, la combustion des matières végétales et animales, par exemple, du bois, du charbon, de l'huile, est une cause puissante de chaleur. Il existe sur le globe des sources d'eau chaude, qui, comme les volcans, acquièrent leur chaleur dans les entrailles de la terre, où la température va croissant d'un degré par 26 mètres de profondeur.

En diminuant subitement le volume d'un gaz, la compression rend libre une quantité notable de chaleur; au contraire, si l'on dilate ce gaz tout à coup, il y a absorption de chaleur ou production de froid. Ainsi, en comprimant de l'air dans un briquet pneumatique, on dégage assez de chaleur pour enflammer de l'amadou; et un gaz qui s'échappe d'un vase où il était fortement comprimé est très froid à l'orifice. Nous avons déjà cité les mélanges réfrigérents, page 220.

Les décharges électriques sont, de même que la foudre sortie des nuages orageux, accompagnées d'une chaleur très intense. Enfin, et ceci est très remarquable, les corps solides, frottés les uns contre les autres, développent une quantité pour ainsi dire illimitée de chaleur, sans qu'il y ait compression comme pour le gaz.

ÉLECTRICITÉ.

18. Développement de l'électricité par le frottement. — Corps conducteurs et non conducteurs. — Expériences sur lesquelles est fondée l'hypothèse de deux fluides.

Développement de l'électricité par le frottement.

Un baton de résine, de verre ou de cire d'Espagne, un morceau d'ambre, etc., frottés avec une étoffe de laine ou une peau de chat, attirent à eux les petits corps placés à peu de distance. Quelques-uns y adhèrent; d'autres, après les avoir touchés, sont repoussés vivement. Si l'on approche ces corps frottés de la main ou du visage, on éprouve une sensation semblable à celle que produiraient des toiles d'araignées; et, si on les touche, on entend le pétillement d'une étincelle, qui s'élance sur le corps qu'on leur a présenté. Cette étincelle devient visible dans l'obscurité. On appelle *électricité* la cause de ces phénomènes, du mot grec *électron*, qui signifie ambre, substance déjà essayée par les anciens.

Corps conducteurs et non conducteurs

Les substances vitrées et résineuses deviennent électriques par frottement. Mais cette expérience ne réussit avec les métaux qu'autant qu'on tient ceux-ci sur des supports ou par des manches

de verre ou de résine bien secs. Si ensuite on les touche avec le doigt, ou avec un autre métal, ils perdent subitement leur électricité. Il faut donc distinguer des corps *conducteurs*, c'est-à-dire qui transmettent ou laissent écouler l'électricité, et des corps *non conducteurs* ou *isolants*, c'est-à-dire qui conservent l'électricité. L'air atmosphérique est nécessairement de cette dernière classe, tandis que l'eau et sa vapeur sont de la première. Il faut donc que l'air ne soit pas trop humide si l'on veut que les expériences réussissent. Pour suspendre les corps, on se sert de fils de chanvre comme conducteurs, et de fils de soie comme isolants.

Expériences sur lesquelles est fondée l'hypothèse de deux fluides.

Si l'on suspend, par un fil de soie, une petite boule de sureau, celle-ci sera isolée et conservera l'électricité qu'on lui aura *communiquée* par le contact d'un cylindre de verre ou de résine frotté. Lorsqu'on approche pour la première fois le cylindre frotté, la boule de sureau est attirée ; elle vient toucher le cylindre, puis aussitôt elle le fuit et persiste à le fuir : d'où l'on conclut que les corps qui partagent entre eux la même électricité se repoussent. Pareille chose arrive si l'on touche, avec le cylindre frotté, deux boules de sureau supendues chacune à un fil et en contact : aussitôt qu'elles ont reçu la même électricité, elles se fuient, en faisant diverger les fils. Mais si, après avoir fait prendre à une boule de sureau, l'électricité d'un cylindre de verre par exemple, on approche de cette boule un cylindre de résine frotté, bien loin de fuir ce nouveau cylindre, elle s'en approche avec plus de rapidité que si elle se trouvait à son état naturel. La même attraction a lieu si l'on touche d'abord la boule avec un cylindre de résine, pour approcher ensuite le cylindre de verre.

On doit donc considérer deux espèces d'électricité, l'une analogue à celle que développe le verre frotté par un étoffe de laine; l'autre, semblable à celle que prend la résine ainsi frottée. La première se nomme *électricité vitrée*, et la seconde *électricité résineuse;* mais on donne aussi à l'une le nom *d'électricité positive* ou *en plus*, et à l'autre celui d'*électricité négative* ou *en moins*.

Cela posé, toutes les fois que l'on frotte deux corps ensemble, leur électricité *naturelle* ou *neutre* se trouve décomposée en électricité vitrée ou positive, qui se porte sur l'un des corps, et en électricité résineuse ou négative, qui se porte sur l'autre. Si les deux corps sont conducteurs, les deux fluides ainsi séparés se recombinent aussitôt; mais si ces corps, ou seulement l'un d'eux, est non conducteur, les deux fluides restent isolés, pourvu toutefois que leur accumulation ne soit pas trop grande; car il arrive toujours un terme où le frottement n'ajoute plus rien à la charge électrique, les nouvelles portions de fluides se recombinant au fur et à mesure de leur séparation.

19. Électricité par influence. — Électroscopes. — Électrophore. — Machines électriques.

Électricité par influence.

Soit un cylindre conducteur, placé horizontalement sur un support isolant; on y suspend, de distance en distance, et deux par deux, de petites boules de sureau, à l'aide de fils de chanvre, qui sont conducteurs. Dans cet état, on approche un corps électrisé de l'un des bouts du cylindre, mais sans le toucher. Aussitôt on voit chaque boule s'éloigner de sa voisine, preuve qu'elles sont électrisées deux à deux de la même manière; les répulsions sont plus fortes vers les deux bouts du cylindre qu'au milieu, où elles sont presque nulles. Si maintenant on éloigne le corps électrisé, toutes les boules reviennent au contact, preuve qu'il n'y a plus d'électricité sur le cylindre. Nouveau développement d'électricité si l'on rapproche le corps électrisé, et disparition de cette électricité si l'on retire ce dernier corps.

Pour expliquer ce phénomène, il faut admettre que tous les corps possèdent des quantités égales d'électricité vitrée et d'électricité résineuse, qui par leur conbinaison forment une électricité neutre, et constituent les corps à l'état naturel. Alors si l'on approche de notre cylindre conducteur un corps préalablement chargé d'électricité vitrée par exemple, celle-ci décompose à distance les électricités du cylindre, attirant à elle l'électricité de nom contraire, et repoussant l'électricité de même nom; et, en effet, on trouve que la partie du cylindre la plus proche du corps électrisé vitreusemement est chargée d'électricité résineuse, tandis que le bout opposé ne possède que de l'électricité vitrée. Cette décomposition de l'électricté *à distance* est dite aussi *par influence.*

Ainsi, toutes les fois qu'un corps vient à être électrisé, il réagit tout autour de lui sur les corps environnants, attirant sur les surfaces qui le regardent une électricité de nom contraire à la sienne, et repoussant sur les surfaces opposées l'électricité de même nom. De plus, toute cette électricité développée par influence réagit à son tour sur les corps primitivement électrisés, soit pour disposer autrement l'électricité préexistante, soit pour en développer de nouvelles quantités. En général, deux corps ne peuvent réagir l'un sur l'autre, si tous deux ne sont chargés d'électricité développée d'une manière quelconque; c'est pour cela que l'action à distance sur les corps conducteurs est plus grande que sur les corps non conducteurs, parce que les premiers, mieux que les seconds, permettent aux fluides électriques d'y circuler.

Électroscopes.

Un électroscope est un instrument propre à reconnaître de très

petites quantités d'électricité. Il se compose ordinairement de deux brins de paille, ou de deux minces lanières d'or, ou de deux petites boules de sureau, suspendus à une même tige métallique. Pour éviter les agitations de l'air, on renferme les deux pailles, lanières, ou boules, dans une cage de verre, en faisant sortir le haut de la tige par une ouverture garnie de gomme laque. Le moindre degré d'électricité communiquée à ces petits corps au moyen de la tige, suffit pour les faire diverger; et l'on mesure la divergence à l'aide d'un arc de cercle gradué sur l'une des faces de la cage.

Électrophore.

L'*électrophore* consiste en un plateau de résine que l'on électrise au moyen d'une peau de chat. On pose sur ce plateau un disque métallique armé d'un manche de verre; on touche ce disque pour faire écouler l'électricité résineuse qu'il possède à sa surface supérieure; puis on retire le doigt, et l'on enlève le disque en le tenant par son manche. Ce disque est alors chargé d'électricité vitrée, qui se trouvait tout à l'heure retenue par l'électricité contraire de la résine.

Machines électriques.

Pour se procurer beaucoup d'électricité, on emploie une machine particulière. Elle se compose d'un grand disque ou *plateau* de verre, muni à son centre d'un axe terminé par une manivelle, pour le faire tourner sur lui-même. Dans ce mouvement, le plateau frotte entre deux coussins de peau, rembouré de crin, et que l'on nomme *frottoirs*. Pour que le contact du verre avec les frottoirs soit plus intime, on enduit ceux-ci d'une couche d'or mussif, qui est un composé jaune d'étain et de soufre. Le plateau de verre prend alors l'électricité vitrée, et les coussins l'électricité négative, qui s'écoule ensuite dans le sol au moyen d'une chaîne métallique attachée aux frottoirs. En face et tout près du plateau se trouvent des pointes métalliques terminant un système de corps conducteurs, isolés par des supports de verre. L'électricité du plateau décompose par influence l'électricité naturelle de ces conducteurs, attire à elle la résineuse, qui passe à l'aide des pointes sur le plateau pour la neutraliser, et repousse l'électricité vitrée dans les parties les plus éloignées des conducteurs. La machine se trouve alors chargée d'électricité vitrée. Si l'on voulait la charger d'électricité résineuse, il suffirait d'amener les pointes des conducteurs en face des frottoirs, que l'on isolerait, et de faire communiquer le plateau avec le sol. Au moyen d'*excitateurs*, ou d'arcs métalliques soutenus par des manches de verre, on fait passer l'électricité des conducteurs sur tout autre corps que l'on veut.

20. Lois des attractions et des répulsions électriques. — Distribution de l'électricité sur les corps conducteurs. — Pouvoir des pointes.

Lois des attractions et des répulsions électriques.

On observe ces lois à l'aide de la balance de torsion. Elle se compose d'un fil métallique très fin AB (fig. 148), fixé par son bout supérieur, et portant à son bout inférieur un petit levier horizontal BC en gomme laque, dont l'une des extrémités C est armée d'un petit disque métallique. En face de ce disque est une petite boule métallique D, placée à l'extrémité de la tige DE. En touchant E avec un corps électrisé, le fluide électrique se répand en D et C; alors le disque C est repoussé, et il en résulte une torsion du fil AB. En vertu de cette torsion, l'effet répulsif s'arrête à une certaine distance entre C et D. On tord ensuite le fil en A, dans le but de diminuer cette distance, et il en résulte une torsion supérieure à la première, qui contrebalance l'effet répulsif du disque et de la boule. Or, on trouve que ces torsions, et par suite les répulsions électriques, sont en raison inverse des carrés des distances. Quand la boule et le disque sont chargés d'électricités différentes, leurs attractions sont encore en raison inverse du carré des distances. Enfin, si l'on enlève à la boule D, la moitié de son électricité, en touchant DE par le même système à l'état naturel et isolé, l'attraction ou la répulsion entre C et D se trouvera réduite à moitié pour la même distance, ce qui prouve que les attractions sont proportionnelles aux quantités d'électricité. Les actions électriques suivent donc les mêmes lois que la pesanteur universelle.

Distribution de l'électricité sur les corps conducteurs.

L'expérience montre que la quantité d'électricité que prennent les corps dépend uniquement de leurs surfaces; en sorte qu'une boule pleine et une boule creuse, de même rayon, étant mises en contact, se partagent également la somme de leur électricité. Il suffit même de mettre sur un corps non conducteur la plus mince couche métallique, pour lui faire jouer le rôle d'un corps conducteur.

On est donc arrivé à ce résultat, que l'électricité *libre*, vitrée ou résineuse, se porte tout entière à la surface des corps, où elle forme une couche infiniment mince, mais d'épaisseur en général variable d'un point à un autre du même corps. Là, elle presse contre l'air pour s'échapper, en vertu de la répulsion mutuelle de ses molécules, comme étant de la même nature. La pression exercée en chaque point est proportionnelle au carré de l'épaisseur de la couche en ce point; et si, quelque part, la pression devenait égale à celle de l'air, une portion du fluide électrique s'échapperait par là sous forme d'étincelle.

Action des pointes.

Sur une sphère, la couche est évidemment de même épaisseur partout. Sur un ellipsoïde, la couche est comprise entre la surface du corps et une surface semblable un peu plus petite; de telle manière que les épaisseurs aux pôles et à l'équateur de l'ellipsoïde sont entre elles comme le rayon polaire est au rayon équatorial. Si l'on conçoit maintenant que l'ellipsoïde s'allonge indéfiniment dans le sens du rayon polaire, il se transformera en une tige de plus en plus pointue, et la couche électrique deviendra de plus en plus épaisse à ces pointes, jusqu'à ce qu'enfin elle puisse vaincre par sa pression la résistance de l'air. C'est ainsi que les pointes ont la propriété de donner écoulement à l'électricité, ou, comme on dit, de la *soutirer*.

21. Électricités dissimulées. — Condensateurs. — Bouteille de Leyde. — Batteries électriques.

Électricités dissimulées.

Si l'on approche un corps chargé d'électricité vitrée du bout d'une tige métallique isolée, l'électricité naturelle de cette tige sera décomposée, le fluide résineux se portant en face du corps électrique, et le fluide vitré dans le bout opposé. En touchant ce bout, le fluide vitré de la tige s'écoulera dans le sol, et il ne restera sur cette tige que du fluide résineux, qui sera *dissimulé* tant que le corps électrisé se trouvera en face. Si l'on retire ce corps, le fluide résineux se répandra sur toute la tige et réagira sur les corps environnants; mais si l'on ramène le corps à la même place, le fluide résineux de la tige en sera de nouveau attiré, son influence ne se fera plus sentir, il sera ce qu'on appelle *dissimulé*, c'est-à-dire caché, inaperçu.

Condensateurs.

C'est sur ce fait qu'est fondé le *condensateur*. Il se compose de deux disques métalliques, séparés par une feuille de verre, un taffetas gommé, ou même une simple couche de résine. Ces disques sont armés de manches de verre au moyen desquels on peut les rapprocher ou les éloigner l'un de l'autre. Si l'un des deux est mis en communication avec une source électrique, il se chargera d'électricité, qui sera vitrée par exemple. Posant ensuite le second disque sur le premier, l'électricité de celui-ci attirera la résineuse de l'autre, et repoussera la vitrée, qui s'échappera dans le sol, si on lui offre une communication. Quant au fluide résineux, il sera dissimulé par l'attraction du fluide vitré du premier disque; mais à son tour le fluide résineux, attirant le fluide vitré, le dissimulera en très grande partie. Alors une nouvelle quantité de fluide vitré coulera de la source sur le premier disque, dissimulera une

nouvelle quantité du fluide résineux sur le second disque, lequel fluide résineux dissimulera du fluide vitré sur le premier, et ainsi de suite; en sorte que les deux quantités de fluide résineux et vitré, qui se dissimuleront réciproquement d'un disque à l'autre, seront considérablement plus grandes que si ces disques avaient été mis séparément en communication avec la source. En d'autres termes, les fluides électriques se trouveront *condensés* sur les disques, et deviendront libres lorsqu'on séparera ces disques.

Bouteille de Leyde.

La bouteille de Leyde, ainsi nommée du nom de la ville où elle a été inventée, n'est pas autre chose qu'un condensateur sous une forme particulière. C'est une bouteille de verre, recouverte extérieurement et intérieurement de feuilles métalliques, qui ne communiquent point entre elles. Une tige de métal, qui sort par le goulot, sert à mettre l'intérieur de la bouteille en communication avec une source électrique, tandis qu'on tient la bouteille par la panse. Si la source est vitrée, l'intérieur de la bouteille prendra la même électricité, et l'extérieur se recouvrira d'électricité résineuse, ces deux fluides agissant l'un sur l'autre à travers le verre pour se dissimuler et se condenser. Si, au contraire, on avait tenu la bouteille par sa tige, et mis sa panse en contact avec la source électrique, l'intérieur eût été résineux, et l'extérieur vitré comme la source.

Quand la bouteille est ainsi *chargée*, si l'on vient à faire communiquer entre elles ses deux faces, intérieure et extérieure, par un arc métallique, il se produira une forte étincelle, provenant de la combinaison des deux fluides; ce qui arrive aussi lorsqu'on établit la communication entre les deux faces opposées d'un condensateur ordinaire.

Batteries électriques.

Une *batterie électrique* résulte de plusieurs bouteilles de Leyde qui communiquent toutes ensemble par l'extérieur d'une part, et par l'intérieur d'autre part. On peut aussi faire communiquer l'extérieur de la première avec l'intérieur de la seconde; l'extérieur de celle-ci avec l'intérieur de la troisième, et ainsi de suite.

GALVANISME.

22. Développement de l'électricité par le contact. — Principes sur lesquels repose la construction de la pile voltaïque. — Modification de cet appareil. — Effets qu'il produit.

Développement de l'électricité par le contact.

Le contact de deux corps hétérogènes suffit pour développer de l'électricité, qui est vitrée ou positive pour l'un, et résineuse ou

négative pour l'autre, après qu'on les a séparés. Cette action se manifeste surtout par le contact des métaux, comme zinc et cuivre, le zinc s'électrisant positivement et le cuivre négativement. Deux métaux mis en contact forment ce qu'on appelle une *paire voltaïque*, du nom de Volta, qui le premier a réuni ces paires pour en former une pile.

Principes sur lesquels repose la construction de la pile voltaïque.

Si l'on empilait les uns sur les autres des disques alternativement de cuivre et de zinc par exemple, on ne produirait rien de plus qu'en mettant en contact un seul cuivre avec un seul zinc. Mais l'effet s'accroîtra proportionnellement au nombre des paires, cuivre et zinc, si l'on sépare ces différentes paires par des disques de drap humide, qui n'ont pas d'action sensible sur les métaux, et ne servent que comme corps conducteurs d'une paire à l'autre. Dans ce cas, les électricités développées par les deux métaux d'une paire se répandent de part et d'autre sur tout le reste de la pile; tellement que la différence électrique entre les deux métaux en contact sera encore la même que si cette paire existait seule.

Supposons, par exemple, qu'une pile verticale soit formée de paires cuivre et zinc, séparées par des rondelles de drap humide, les disques de zinc étant tournés vers le haut, et ceux de cuivre vers le bas pour chaque paire. Le premier cuivre, placé à l'extrémité inférieure de la pile, et en communication avec le sol, laissera écouler son électricité négative, tandis que le premier zinc aura une certaine quantité d'électricité positive, laquelle se répandra sur tous les disques supérieurs, tant cuivre que zinc, par simple communication à travers les rondelles humides. Le second cuivre laissera de même son électricité négative s'écouler dans le sol, et le second zinc répandra son électricité positive sur tous les disques placés en dessus. En continuant ainsi, il est aisé de voir que le premier cuivre étant à l'état naturel, le premier zinc et le second cuivre auront chacun la même quantité d'électricité positive; le second zinc et le troisième cuivre, chacun une quantité double de la même électricité; le troisième zinc et le quatrième cuivre, chacun une quantité triple, et ainsi de suite.

Si la pile était posée sur un corps isolant pour empêcher le départ de l'électrité négative, celle-ci s'accumulerait vers le bas de la pile, tandis que l'électricité positive se porterait vers le haut, et le milieu de la pile serait alors à l'état neutre.

Au moment où l'on met en communication les deux extrémités ou *pôles* d'une pile, par un fil métallique, l'équilibre électrique tend à s'y établir; mais comme cet équilibre est sans cesse troublé par le dégagement de l'électricité au contact du cuivre et du zinc de chaque paire, l'électricité positive se portant d'un côté, et l'électricité négative de l'autre, il s'établit deux courants, un de

chaque fluide électrique, et ces fluides se recombinent sur tout le *circuit*, lequel comprend la pile et le fil de communication entre les deux pôles.

Modifications de cet appareil.

On a beaucoup varié la forme des piles voltaïques. Celle *à colonne* est formée comme on vient de le dire. La pile *à auges* consiste en une auge de bois, divisée en compartiments par des paires formées chacune d'un cuivre et d'un zinc soudés ensemble. On verse dans ces compartiments un liquide conducteur qui tient lieu de drap humide. C'est ordinairement de l'eau acidulée. La pile imaginée par Wollaston est la plus énergique de toutes : dans cette pile chaque lame de zinc est enveloppée d'une double lame de cuivre, mais sans contact, celle-ci étant soudée au zinc précédent. La communication de l'électricité d'une paire à l'autre se fait en plongeant ces métaux dans des vases pleins d'eau acidulée. Dans la fig. 149, les plaques de zinc sont représentées ombrées, et la soudure avec le cuivre est à la partie supérieure de chaque zinc.

Effets qu'il produit.

Lorsqu'une personne établit la communication entre les deux pôles d'une pile, en y portant à la fois les deux mains, elle éprouve des commotions électriques, qui peuvent devenir insupportables si la pile est forte. En faisant aboutir à la langue les deux fils qui partent des pôles, on éprouve une saveur saline particulière. Mises à une petite distance l'une de l'autre dans l'eau, les extrémités de ces deux fils décomposent ce liquide en gaz hydrogène, qui se dégage du côté du pôle négatif ou cuivre, et en gaz oxigène, qui apparaît du côté du pôle positif ou zinc ; mais il faut que les fils conjonctifs de la pile soient de platine ou d'autre métal difficilement oxidable. Les courants de la pile donnent lieu à une multitude de décompositions chimiques. De plus, ils échauffent, rougissent et brûlent les fils métalliques suffisamment fins. Le charbon lui-même, placé dans le vide, devient alors resplendissant, bien qu'il ne se consume point.

MAGNÉTISME.

23. Attraction qui s'exerce contre l'aimant et le fer. — Expériences par lesquelles on reconnaît qu'il y a toujours au moins deux pôles dans un aimant. — Expériences sur lesquelles est fondée l'hypothèse de deux fluides magnétiques.

Attraction qui s'exerce entre l'aimant et le fer.

Il existe dans les mines deux espèces de fer combiné avec l'oxigène, savoir le *fer oxidulé* et le *fer oxidé*. Le premier, qui

contient moins d'oxigène que le second, est en général noir, plus ou moins cristallisé, et présente quelquefois le singulier phénomène du *magnétisme*. Les échantillons de fer oxidulé qui se trouvent doués de cette propriété, sont des *aimants naturels*. Ils attirent les morceaux de fer doux (fer pur), et les morceaux d'acier (fer combiné au carbone), qui sont placés à de petites distances. Plongés dans la limaille de fer, ils se hérissent d'aigrettes formées de plusieurs parcelles de fer mises bout à bout. Cette limaille s'attache principalement en deux extrémités opposées, qui sont les deux *pôles* de l'aimant.

Expériences par lesquelles on reconnaît qu'il y a toujours au moins deux pôles dans un aimant.

Si l'on suspend un aimant par le milieu, ou mieux, si on le pose sur un liége flottant à la surface de l'eau, on verra l'aimant se diriger du nord au sud ou à peu près, et revenir constamment à cette direction, lorsqu'on l'en aura écarté. Il y a donc un côté nord et un côté sud pour chaque aimant. Si l'on met en regard les côtés nord, ou les côtés sud de deux aimants, il y aura répulsion mutuelle; mais il y aura attraction mutuelle, si l'on met en regard le côté nord de l'un avec le côté sud de l'autre. C'est ce qu'on exprime en disant que les côtés ou pôles de même nom se repoussent, et les côtés ou pôles de noms contraires s'attirent.

On peut considérer la terre comme un gros aimant, puisqu'elle dirige les aimants, de même que ceux-ci se dirigent les uns les autres. Alors les pôles magnétiques de la terre seront vers les pôles géographiques; l'un sera le pôle *nord* ou *boréal*; l'autre, le pôle *sud* ou *austral*. Ensuite on nommera pôle nord ou boréal d'un aimant, celui de ses pôles qui se tourne vers le pôle de nom contraire du globe, savoir vers le sud; et pôle *sud* ou *austral* de l'aimant, celui qui se dirige vers le nord de la terre.

Expériences sur lesquelles est fondée l'hypothèse de deux fluides magnétiques.

Les précédentes observations s'expliquent bien en admettant deux fluides magnétiques, très subtils, dont les molécules de l'un attirent celles de l'autre, les molécules du même fluide se repoussant au contraire. L'un est le *fluide austral*, et l'autre le *fluide boréal*. Combinés ensemble, il forment un *fluide neutre*, c'est-à-dire qui n'agit plus ni par attraction ni par répulsion, vu que les actions sont égales et opposées. On développe le magnétisme en séparant les deux fluides; mais cette séparation se fait dans chaque particule du corps magnétique, et non pas d'une particule à une autre, ainsi qu'on s'en assure par expérience. On *recompose* le magnétisme en combinant les deux fluides préalablement séparés. Dans le fer doux, la séparation et la recomposition des deux fluides se font avec facilité; mais ces changements ont plus de peine à s'ef-

fectuer dans les combinaisons du fer, dans l'acier par exemple. Cette résistance se nomme *force coercitive;* elle fait la permanence des aimants, puisque sans elle les deux fluides se recomposeraient, et toute vertu magnétique disparaîtrait.

24. Définir la déclinaison et l'inclinaison, et donner une idée des boussoles de déclinaison et d'inclinaison.

Définir la déclinaison et l'inclinaison, et donner une idée des boussoles de déclinaison et d'inclinaison.

Si l'on suspend une aiguille aimantée par son centre, ou bien si on la pose sur une pointe autour de laquelle elle puisse librement pivoter, tout en demeurant horizontale, la direction qu'elle prend indique le *méridien magnétique* du lieu. En général, ce méridien fait un certain angle avec le méridien géographique, et l'angle de ces deux méridiens est ce qu'on nomme la *déclinaison magnétique* en ce lieu; déclinaison *orientale* ou *occidentale*, suivant que la partie nord du méridien magnétique est à l'est ou à l'ouest du méridien géographique. Pour mesurer cet angle, on place le pivot de l'aiguille au centre d'un cercle gradué, et l'appareil est alors une *boussole de déclinaison.* A Paris, la déclinaison est d'environ 22 degrés ouest.

Il y a aussi une *boussole d'inclinaison*, servant à mesurer l'angle que l'aiguille aimantée fait avec l'horizon, lorsqu'elle peut tourner dans le plan du méridien magnétique autour d'un axe passant exactement par son centre de gravité. Cet angle indique ce qu'on appelle l'*inclinaison magnétique* du lieu. Ainsi, à Paris, le côté de l'aiguille qui se dirige vers le nord plonge sous l'horizon d'un angle de 67 degrés deux tiers.

25. Procédés d'aimantation.

Procédés d'aimantation.

On a remarqué que le choc développe dans le fer la propriété magnétique, de même que la torsion, le frottement de la lime, et toutes les actions mécaniques un peu fortes et subites. Le magnétisme ne se communique pas directement d'un corps à un autre, mais il se développe dans le second sous l'influenee magnétique du premier. Ainsi quand le pôle austral d'un aimant est présenté à un cylindre de fer doux, par exemple, l'aimant développe les deux fluides magnétiques dans chacune des particules du cylindre, qui deviennent comme antant de petits aimants. Ceux-ci réagissent les uns sur les autres, et il en résulte une accumulation apparente du fluide boréal dans le bout du cylindre le plus proche de l'aimant, et une accumulation du fluide austral dans le bout opposé. En éloignant l'aimant, les deux fluides développés dans le cylindre n'obéissent plus qu'à leurs actions mutuelles et se combinent; ce

qui veut dire, en termes consacrés, que le cylindre revient à *l'état naturel.* Il peut ainsi passer autant de fois que l'on veut de l'état naturel à l'état magnétique, en approchant et éloignant l'aimant.

Si le cylindre, mis en présence de l'aimant était d'acier, il s'y développerait moins de magnétisme, mais des portions plus ou moins grandes des fluides magnétiques y demeureraient séparées, après qu'on aurait éloigné l'aimant; en sorte que ce cylindre d'acier deviendrait un nouvel aimant permanent, lequel à son tour pourrait servir à en faire d'autres. Les aimants d'acier sont dits *artificiels*, par opposition aux aimants *naturels*, trouvés dans le sein de la terre.

Ordinairement, on magnétise des *barreaux* d'acier; on les réunit en *faisceau*, les pôles de même nom du même côté, et il en résulte des aimants artificiels très énergiques. Dans la pratique, on aimante à l'aide de pareils barreaux, soit simples, soit par faisceau, en promenant l'une de leurs extrémités tout le long du corps que l'on veut aimanter : c'est ce que l'on appelle faire une *touche*. On réussit mieux par la *double touche*, qui consiste à poser les pôles contraires de deux barreaux aimantés sur le milieu du corps soumis à l'aimantation, puis à faire glisser en sens contraires ces barreaux vers les deux bouts opposés du corps, les inclinant dans le sens de leur marche, les éloignant en même temps pour les ramener ensemble au milieu du corps, et recommençant la même opération autant que l'on voudra.

On a beaucoup varié les procédés d'aimantation, mais nous ne pouvons faire connaître ici toutes ces méthodes. Nous nous bornerons à citer l'emploi des *armatures*. On appelle ainsi des morceaux de fer doux qui se placent aux deux extrémités d'un barreau, soit qu'on veuille l'aimanter, soit qu'on veuille y conserver le magnétisme. Ces armatures réagissent par leur magnétisme sur celui du barreau, et y tiennent les deux fluides séparés. Nous citerons encore les aimants en *fer à cheval*, qui sont des barreaux repliés de telle manière que leurs extrémités soient assez proches l'une de l'autre et parallèles. On met ces extrémités en contact avec un seul morceau de fer doux, qui s'y attache fortement, et peut ainsi soutenir des poids considérables. L'acier est dit *aimanté à saturation*, quand le magnétisme y atteint sa limite, son maximum; car il est de fait qu'un barreau d'acier ne peut pas prendre, ou plutôt ne peut conserver une quantité indéfinie de magnétisme.

ÉLECTRO-MAGNÉTISME.

26. Expériences qui constatent l'action des courants sur les aimants, et l'action des courants sur les courants.

Expériences qui constatent l'action des courants sur les aimants, et l'action des courants sur les courants.

Lorsque les deux pôles d'une pile voltaïque sont mis en com-

munication par un fil conjonctif, nous avons dit que les deux électricités tournent dans le circuit ainsi formé pour s'y recomposer en chaque point. Il y a donc deux courants, l'un pour l'électricité positive, qui va du pôle zinc au pôle cuivre à travers le fil; l'autre, pour l'électricité négative, qui va en sens inverse du premier. Mais, pour abréger, les physiciens sont convenus de ne considérer qu'un seul courant, celui qui va du pôle positif au pôle négatif à travers le fil conjonctif, et, par conséquent, du pôle négatif au pôle positif à travers la pile elle-même. Le sens de ce courant est donc envisagé comme *direct*, et le sens contraire comme *indirect*.

Si l'on conçoit qu'une aiguille aimantée, suspendue par son centre de gravité, et libre de toute action terrestre, soit approchée d'un courant voltaïque rectiligne, elle affectera une position ainsi déterminée : elle se mettra dans un plan perpendiculaire au courant, perpendiculairement à la droite menée de son centre au courant, et de telle manière que son pôle austral (qui se dirige vers le nord de la terre), se trouve à gauche d'un spectateur qui, entraîné dans le courant, la tête en avant, regarderait l'aiguille. Cette position de l'aiguille est absolument la même que s'il régnait un tourbillon autour du fil voltaïque comme centre, et perpendiculairement à sa longueur; c'est en cela que consiste la découverte de M. Oersted.

Une découverte très importante faite ensuite par Ampère est celle des attractions et répulsions des courants électriques. Lorsque deux conducteurs (fig. 150) ou deux portions d'un même circuit, l'une fixe AB, l'autre mobile CD, situées parallèlement entre elles, sont traversées par des courants électriques, elles s'attirent si les courants vont dans le même sens, et se repoussent s'ils vont en sens contraires. Pour faire cette expérience, la portion fixe AB du conducteur est portée par deux supports de verre; l'autre portion mobile a la forme ECDF, ses extrémités E et F sont deux pointes fines d'acier plongeant dans des vases remplis de mercure : ceux-ci sont portés par des tiges métalliques H et J, reposant sur des morceaux de verre, en sorte que HECDFJ forme un conducteur unique et isolé. V est une tringle de verre qui porte à son milieu une tige et une boule G disposées de manière à ce que la portion mobile ECDF puisse se mettre en équilibre dans toutes les positions qu'elle peut prendre en tournant sur les points E et F. Maintenant, si l'on veut que le courant électrique traverse AB et CD dans la même direction, on fera communiquer A avec un des pôles de la pile, B avec H, et J avec l'autre pôle. Dans ce cas, CD se portera vers AB, et si le contact peut s'opérer, il subsistera tant que le courant électrique aura lieu. Si l'on veut que le courant en AB ait une direction contraire à celui en CD, on fera communiquer A avec le premier pôle de la pile, B avec J, et H avec le se-

cond pôle : on observera alors une répulsion, et CD s'éloignera de AB.

Quant à la loi élémentaire de ces phénomènes, pour l'exprimer, il faut concevoir deux éléments de courants, situés dans un même plan, perpendiculairement à la droite qui les joint. Alors les deux éléments s'attireront ou se repousseront en raison inverse du carré de la distance, suivant qu'ils iront dans le même sens ou en sens contraire. Si l'un de ces éléments était dirigé suivant la perpendiculaire élevée sur le milieu de l'autre, ils n'exerceraient entre eux aucune action. Si enfin, ces deux éléments étaient sur la même droite, ils se repousseraient ou s'attireraient, suivant qu'ils iraient dans le même sens ou en sens contraire, et avec une intensité moitié moindre que quand ils sont perpendiculaires à la même droite, dans le même plan et à la même distance.

Pour calculer l'action de deux éléments de courants obliques l'un à l'autre, il faut les décomposer en d'autres courants qui soient dans les positions indiquées tout à l'heure, absolument de la même manière qu'on décompose une force en plusieurs autres par des parallélogrammes. Enfin, pour avoir l'action d'un courant de forme quelconque, sur un second courant de forme aussi quelconque, il faut savoir trouver l'effet résultant de chacun des éléments du premier sur tous les éléments du second, ce qui est un genre de calcul en général très compliqué.

M. Ampère a eu l'idée de construire des courants voltaïques en hélice, ou tire-bouchon, et il a vu qu'avec cette forme un courant agit précisément comme un barreau aimanté. L'un des bouts de l'hélice est un pôle austral, et l'autre bout un pôle boréal. L'hélice, suspendue par son centre de gravité, se tourne d'elle-même comme l'aiguille magnétique d'inclinaison ; et alors le courant va de l'est à l'ouest, dans la partie inférieure de chaque spire ou tour d'hélice. Il est inutile de dire que deux hélices s'attirent par leurs extrémités dissemblables, et se repoussent par leurs extrémités semblables : qu'enfin le bout de l'hélice, qui se dirige vers le nord, attire le pôle boréal d'un aimant et repousse son pôle austral.

27. Construction et usage du multiplicateur.

Construction et usage du multiplicateur.

Pour reconnaître l'existence et la direction des courants électriques, même très faibles, on se sert d'un appareil nommé *galvanomètre multiplicateur*, ou simplement *galvanomètre*. Il consiste en un long fil métallique, de cuivre par exemple, enroulé autour d'un châssis de bois, et dont les deux extrémités viennent plonger dans deux coupelles de mercure ou *rhéophores*. Il est nécessaire d'envelopper ce fil métallique, sur toute sa longueur, avec du fil de soie, pour isoler les tours qu'il forme sur le châssis, et prévenir en

même temps la déperdition du fluide électrique. On suspend une petite aiguille aimantée, parallèlement aux tours du fil, et tout près du faisceau. Pour reconnaître un courant électrique, on achève le circuit en plongeant dans les rhéophores les deux extrémités du fil où se produit le courant, ou bien, en amenant directement les extrémités du fil galvanométrique en contact avec la source électrique. Alors l'aiguille aimantée se trouve déviée dans un sens ou dans un autre, suivant la direction du courant, et avec une énergie indiquée par les divisions d'un cercle gradué que parcourt l'aiguille.

28. Moyens de produire les courants thermo-électriques. — Description du thermo-multiplicateur.

Moyens de produire les courants thermo-électriques.

La chaleur seule est capable de produire des courants électriques dans un circuit de métaux soudés ensemble, et cette découverte est due à Seebeck, physicien allemand. L'action est le plus remarquable entre le bismuth et l'antimoine. Si l'on soude des tiges de ces deux métaux, à la suite les unes des autres, de manière à en composer un circuit fermé et alternatif, au moment où l'on chauffera l'une des soudures, un courant s'établira dans tout le circuit, marchant de la partie chaude à la partie froide du bismuth. En chauffant également deux soudures consécutives, on obtiendrait donc des effets égaux et en sens inverses, qui s'annulleraient; mais en chauffant les soudures de deux en deux, les effets s'ajoutent et produisent un courant passablement énergique. On active encore ce genre de pile thermo-électrique, en chauffant toutes les soudures de rang pair par exemple, et refroidissant en même temps les soudures de rang impair.

On reconnaît le sens et l'énergie du courant, en lui présentant une aiguille aimantée, laquelle se trouvera déviée, de côté ou d'autre, qu'elle fasse partie ou non d'un galvanomètre. Un circuit thermo-électrique, suspendu par son centre de gravité, se met, comme un courant électrique ordinaire, dans un plan perpendiculaire à l'aiguille magnétique d'inclinaison.

Description du thermo-multiplicateur.

C'est à l'aide d'une petite pile thermo-électrique, repliée sur elle-même, de manière à présenter toutes les soudures de rang pair d'un côté, et, de l'autre, toutes les soudures de rang impair, que M. Melloni a déterminé les lois de la chaleur rayonnante : cette chaleur tombe sur l'un des côtés de la pile, et y produit un courant que l'on peut faire passer dans le fil d'un galvanomètre, courant que l'on mesure à l'aide des déviations d'une petite aiguille aimantée.

ACTIONS MOLÉCULAIRES.

20. Capillarité. — Ascension ou dépression des liquides dans les tubes capillaires, et autres effets de la capillarité.

Capillarité.

Les liquides adhèrent ordinairement aux corps solides que l'on y plonge : en retirant ceux-ci, il reste à leur surface une couche de liquide adhérente. Ainsi, une tige de verre, retirée de l'eau, emporte une certaine quantité de ce liquide, qui s'agglomère à son bout inférieur sous forme de goutte. Si l'un des bassins d'une balance est mis en contact avec l'eau, il faudra pour l'en détacher, mettre un poids assez considérable dans l'autre bassin ; et quand le premier bassin sera détaché de l'eau, il conservera une couche de ce liquide, mais il faudra diminuer le poids placé de l'autre côté de la balance.

Il résulte de là que certains liquides contractent adhérence avec certains corps solides, et que les particules liquides ont aussi entre elles une adhérence très sensible. Cette force d'adhérence se manifeste encore lorsqu'on met en contact parfait les surfaces de deux corps solides. Dans tous les cas, elle est due à ce qu'on nomme la *cohésion*, ou l'*attraction moléculaire*, qui cesse d'agir à des distances sensibles pour nos organes, mais qui est très puissante au contact. A cette force sont dus les phénomènes de *capillarité*, ainsi nommés parce qu'on les observe principalement à l'aide des tubes de verre capillaires, c'est-à-dire qui ont un diamètre intérieur assez petit pour être comparé à celui des cheveux. Voici en quoi consiste ce genre de phénomènes.

Ascension ou dépression des liquides dans les tubes capillaires, et autres effets de la capillarité.

Si l'on plonge le bout inférieur d'un tube de verre verticalement dans l'eau, ce liquide s'élève dans l'intérieur du tube au-dessus du niveau extérieur, et d'autant plus que le diamètre du tube est plus petit. L'extrémité de la colonne liquide ainsi soulevée est concave, et présente sensiblement la surface d'une demi-sphère.

Si, au contraire, on plonge le tube de verre dans le mercure, celui-ci s'abaisse dans le tube au-dessous du niveau extérieur, et d'autant plus que le diamètre du tube est plus petit. Dans ce cas, l'extrémité de la colonne liquide est convexe.

L'ascension de l'eau dans un tube de verre a lieu, parce que l'attraction moléculaire du liquide pour le solide est plus que la moitié de l'attraction moléculaire du liquide pour lui-même. La dépression du mercure dans le tube de verre a lieu, parce que l'attraction du verre pour le mercure est moindre que la moitié de l'attraction du mercure pour lui-même ; et le calcul apprend que, si l'attraction du solide pour le liquide était précisément la moitié

de l'attraction du liquide sur ses propres particules, il n'y aurait ni ascension ni dépression dans le tube.

Lorsqu'on plonge dans l'eau le bout inférieur de deux plans de verre verticaux, parallèles et suffisamment rapprochés, le liquide s'élève entre les deux verres, mais à une hauteur moitié de celle qu'il atteint dans un tube de verre dont le diamètre intérieur est égal à l'écartement des deux plans.

Si l'on rapproche les plans de verre en les mettant en contact par un de leurs bords verticaux, comme deux feuillets d'un livre dont le dos est vertical, le liquide s'élève entre eux, si c'est de l'eau, et s'abaisse si c'est du mercure, en figurant une courbe *hyperbolique*, dont les deux asymptotes sont représentées par la ligne de contact des deux verres et la ligne d'immersion.

Les phénomènes capillaires sont très variés, mais nous devons nous borner à citer encore les suivants, comme étant plus fréquemment observés. Si l'on pose sur l'eau deux petites boules, susceptibles de flotter et d'être mouillées, l'eau formera tout autour des anneaux liquides; et, lorsque ces anneaux viendront à se rencontrer par leurs bases, les deux boules se précipiteront l'une contre l'autre et se maintiendront au contact. La même attraction a lieu quand, posées sur du mercure, de petites boules ont la propriété de déprimer tout à l'entour un anneau liquide. Mais il y aura répulsion des deux boules, si l'une élève le liquide tandis que l'autre le déprime.

30. Élasticité. — Compressibilité des liquides. — Compressibilité des solides. — Élasticité de tension et de torsion. — Ténacité.

Élasticité.

Lorsque les molécules d'un corps ont été infiniment peu écartées de leurs positions naturelles, elles tendent à y revenir, et y reviennent en effet quand la force qui s'y opposait a cessé d'agir : c'est en cela que consiste l'élasticité des corps. Un corps solide parfaitement élastique reprend, après la compression, la forme qu'il avait auparavant. Dans les liquides et les gaz, on n'a plus égard à la forme, mais seulement au volume. Les liquides et les gaz sont éminemment élastiques, en ce sens qu'ils ont exactement le même volume avant et après la compression; mais la *compressibilité*, c'est-à-dire la diminution de volume est excessivement faible pour les liquides, et considérable pour les gaz.

Compressibilité des liquides.

Pour mesurer la compression des liquides, de l'eau par exemple, on renferme celle-ci dans un réservoir de verre terminé par un tube gradué, excessivement fin et ouvert. Une petite colonne de mer-

cure est à l'extrémité de la colonne de l'eau dans le tube. On met cet appareil dans un vase que l'on remplit d'eau ; celle-ci est ensuite fortement pressée par le moyen d'un piston jouant dans le col du vase ; la pression se communique, à travers la colonne, dans l'intérieur du réservoir, lequel ne peut se déformer, vu que la pression sera la même à l'intérieur et à l'extérieur. C'est ainsi que l'eau est démontrée compressible : elle diminue de la fraction 0,000045 de son volume pour chaque pression atmosphérique, représentée par une colonne de 32 pieds d'eau ou de 28 pouces de mercure.

Compressibilité des solides.

Les solides peuvent aussi être comprimés; mais leur compression est encore moindre que celle des liquides, car elle n'est que de un à deux millionièmes par atmosphère. Il ne faut pas confondre cette compression avec celle que l'on produit à coups de marteau sur un métal. Dans ce cas on rapproche la matière de ce métal en diminuant les pores qui en augmentent toujours le volume après le refroidissement du métal en fusion, refroidissement qui a presque toujours lieu très rapidement.

Élasticité de tension et de torsion.

Un fil métallique, tiré par les deux bouts, s'allonge en vertu de son élastique, et reprend sa longueur primitive quand cette action cesse. L'allongement est proportionnel à la force de traction, dans le cas où le fil n'éprouve pas un allongement permanent. Quant à la torsion d'un fil métallique, elle est aussi proportionnelle à la force de torsion, dans les limites de l'élasticité parfaite. C'est sur ce fait qu'est construite la balance de Coulomb, dont on a parlé en étudiant les lois des attractions et répulsions électriques. En essayant la torsion de fils de même matière et de différents diamètres, on trouve que pour une égale torsion, la force est proportionnelle à la quatrième puissance des diamètres des fils.

Ténacité.

La *ténacité* d'un corps est la résistance qu'il oppose à sa flexion ou à sa rupture. Ainsi, pour rompre un fil de fer dont la section est d'un millimètre carré, il faut un poids d'environ 60 kilogrammes, tandis qu'il en faut trois fois moins pour un fil de cuivre rouge de même grosseur. Ce genre de ténacité est en proportion directe avec la section du fil, et croît par conséquent comme le carré du diamètre.

ACOUSTIQUE.

31. De la production du son et de sa vitesse de transmission dans l'air atmosphérique.

De la production du son et de sa vitesse de transmission dans l'air atmosphérique.

Le *son* résulte d'un mouvement très rapide de va-et-vient dans les corps; ce mouvement se communique aux molécules d'air environnantes, et se propage en rayonnant dans toutes les directions avec une grande rapidité. Il faut, de plus, que ce mouvement produise sur l'oreille, qui est l'organe de l'ouïe, une sensation déterminée; car il y a des mouvements *vibratoires* qui ne produisent pas de son pour notre organe.

Le moyen le plus simple d'engendrer une *onde sonore*, est de pincer fortement une petite lame par l'un de ses bouts, et de la faire vibrer par l'autre bout, en l'écartant un peu de sa position d'équilibre, pour l'abandonner à elle-même; car la lame oscillera, de part et d'autre de cette position d'équilibre, absolument comme un pendule que l'on a écarté de la verticale, mais avec une rapidité incomparablement plus grande. Lorsque la lame s'avance d'un côté, elle pousse l'air devant elle, et le *condense;* elle occasionne derrière elle un certain vide, qui *raréfie* l'air. Quand elle revient en sens contraire, elle raréfie l'air qu'elle venait de condenser, et condense l'air qu'elle venait de raréfier. Eh bien, ce sont ces condensations et raréfactions alternatives de la couche d'air, immédiatement en contact avec la lame, qui, dans ce cas, constituent les ondes sonores. D'abord dirigées dans deux directions seulement, elles dévient bientôt dans tous les sens, et finissent par se propager dans l'air, en formant des ondes sphériques, dont le centre commun est la plaque *vibrante.*

Quand un corps solide, par exemple un métal très élastique, vient à être frappé en l'un de ses points, il y a un son produit; car, sous le choc, la surface du métal s'est un peu enfoncée; et, après le choc, l'élasticité l'a fait revenir à son ancienne configuration, qu'elle a dépassée par l'effet d'une vitesse acquise, d'où sont résultées des vibrations extrêmement rapides. En frappant une cloche, tout le contour de cette cloche change infiniment peu, s'allongeant et se raccourcissant alternativement dans la direction du choc. Enfin, une corde tendue, que l'on fait vibrer, soit en la frottant avec un archet, soit en la pinçant ou la frappant, pousse alternativement l'air des deux côtés, et produit des sons. En général, toutes les ondes sonores résultent d'un mouvement très rapide de va-et-vient, qui se communique nécessairement à l'air en contact.

Si l'on suppose, par la pensée, une seule vibration en un certain point, laquelle aura produit dans l'air telles condensations et raréfactions que l'on voudra, on prouve, et l'expérience confirme

ce fait, que l'onde sonore se propage dans un canal rectiligne en conservant toujours sa forme et son intensité primitive, soit dans l'une, soit dans l'autre direction. Elle parcourt ainsi 333 mètres par seconde, l'air étant à la pression de 76 centimètres de mercure et à la température zéro; car la vitesse s'accroît quand la température s'élève sans que la pression diminue.

Dans l'air atmosphérique, l'onde sonore se propage sphériquement; elle conserve la forme qu'elle avait à l'origine, mais les condensations et raréfactions diminuent progressivement d'intensité, et l'onde s'efface peu à peu, comme un tableau dont on affaiblirait les couleurs. La vitesse de propagation est encore la même, savoir de 333 mètres par seconde.

32. Lois des vibrations des cordes. — Évaluation numérique des sons. — Sons graves et aigus.

Lois des vibrations des cordes.

Si l'on suppose une corde tendue par un poids constant, le nombre des vibrations qu'elle exécute en une seconde sera en raison inverse de sa longueur; c'est-à-dire, par exemple, que le nombre des vibrations sera réduit à moitié, si la longueur de la corde est doublée.

En second lieu, les nombres de vibrations par seconde seront proportionnels aux racines carrées des poids qui tendront la corde; c'est-à-dire que si l'on quadruple le poids, ou la *tension* de la corde, celle-ci fera deux fois plus de vibrations par seconde; elle en fera trois fois plns, si on la tire neuf fois plus fortement, etc.

En troisième lieu, les nombres de vibrations par seconde sont en raison inverse des diamètres des cordes, supposées faites de la même matière.

En quatrième lieu, si les densités des cordes sont différentes, à longueur, grosseur et tension égales, les nombres de vibrations par seconde seront en raison inverse des racines carrées des densités; c'est-à-dire, par exemple, que si la densité d'une corde est quadruple de celle d'une autre corde prise dans les mêmes circonstances, la première fera deux fois moins de vibrations que la seconde.

Toutes ces lois se vérifient au moyen d'un instrument nommé *sonomètre* ou *monocorde*.

Évaluation numérique des sons.

Puisque le nombre des vibrations est en raison inverse de la longueur d'une même corde, si on raccourcit cette corde au moyen d'un *chevalet*, on pourra former différents sons, ou varier le *ton* de la corde. On a donné des noms à ces différents sons, comme on le voit dans le tableau suivant :

Noms des sons	*ut*	*ré*	*mi*	*fa*	*sol*	*la*	*si*	*ut*.
Longueurs de la corde	1	8/9	4/5	3/4	2/3	3/5	8/15	1/2.
Nombres des vibrations	1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2.

On voit ainsi que le nom redevient le même quand la longueur de la corde est réduite à moitié, ou que le nombre de vibrations est doublé.

L'intervalle de *ut* à *ré* se nomme une *seconde;* de *ut* à *mi*, une *tierce;* de *ut* à *fa*, une *quarte;* de *ut* à *sol*, une *quinte;* de *ut* à *la*, une *sixième;* de *ut* à *si*, une *septième;* enfin, d'un *ut* au suivant, une *octave*.

En musique, on fait encore usage des sons intermédiaires aux précédents, et que l'on nomme les *dièses* et les *bémols* de ceux-ci; dièses, quand ils leur sont supérieurs, et bémols dans le cas contraire. Pour avoir le nombre des vibrations d'un dièse, il faut multiplier par $\frac{25}{24}$ le nombre des vibrations que fait le son *naturel* auquel il se rapporte, et multiplier par $\frac{24}{25}$ pour avoir le bémol.

Les *accords* résultent de la simultanéité de plusieurs sons rendus par différents instruments, et il est d'autant plus *parfait*, que le rapport des nombres de vibrations est plus simple. Il y a *unisson* dans le cas de l'égalité parfaite des sons. Les sons *harmoniques* sont ceux qui suivent la série des nombres naturels 1, 2, 3, 4.... Le second est l'*octave supérieure* du premier; le quatrième est l'octave supérieure du second, ou la *double octave* du premier, etc.

Sons graves et aigus.

L'*intensité* du son résulte des condensations et raréfactions plus ou moins fortes imprimées à l'air, agitations qui ébranlent plus ou moins notre organe de l'ouïe.

Quant à la *gravité* et l'*acuité* des sons, elles dépendent de la *longueur* même des ondes sonores; ou, si l'on veut, de l'*intervalle* qui les sépare. Supposons, par exemple, une lame qui vibre dans l'intervalle d'une seconde, c'est-à-dire qui reste une seconde pour aller de droite à gauche, et autant pour venir de gauche à droite. Pour chacune de ces oscillations, le commencement de l'onde sera déjà à 333 mètres de distance lorsque la fin de cette onde aura lieu vers la plaque même. Après une onde condensante viendra une onde raréfiante, et chacune aura 333 mètres de longueur. Si maintenant la plaque faisait deux vibrations par seconde, il est clair que les longueurs des ondes seraient moitié moindres, savoir de 166 mètres. Avec trois vibrations par seconde, les ondes se succéderaient à des intervalles de 111 mètres. Avec quatre vibrations par seconde, les ondes courraient les unes après les autres à des distances de 83 mètres; et ainsi de suite, la longueur des ondes étant le quotient de 333 mètres par le nombre de vibrations exécutées en une seconde. Cela posé, le son est *grave* lorsque les ondes ont

une grande longueur, ou se succèdent à de longs intervalles; le son est *aigu*, quand les ondes ont peu de longueur, ou se succèdent à de courts intervalles.

L'expérience montre que les ondes sonores commencent à être perçues par l'oreille, quand elles ont 32 pieds ou environ dix mètres de longueur, auquel cas, il se fait 32 vibrations par seconde. Avec une longueur plus grande, ou un moindre nombre de vibrations par seconde, l'onde ne produirait pas pour nous la sensation du son. En d'autres termes, le corps qui fait 32 vibrations par seconde, produit le son le plus grave que nous puissions percevoir. Quant à l'acuité, on avait cru y trouver une limite; mais des expériences récentes ont prouvé que cette limite, si elle existe en effet, doit être considérablement reculée.

OPTIQUE.

33. Propagation de la lumière dans un milieu homogène. — Moyen de déterminer le temps qu'elle met pour venir du soleil à la terre.

Propagation de la lumière dans un milieu homogène.

La lumière, partie d'un point, se propage tout autour de ce point comme centre, en suivant des lignes droites ou rayons. Il est alors facile de prouver qu'elle s'atténue avec la distance au point rayonnant, et que son intensité est en raison inverse du carré de l'éloignement; car, par exemple, la même quantité de rayons qui tombera sur une surface à l'unité de distance, recouvrira une surface quadruple à une distance double.

Dans l'hypothèse de l'émission, admise par Newton, la lumière consisterait en molécules lancées par les corps lumineux; et dans l'hypothèse des ondulations, suivie aujourd'hui par tous les physiciens, l'univers serait rempli d'une matière infiniment subtile et élastique, désignée sous le nom d'*éther*, qui, vibrant à la manière de l'air, produirait le phénomène de la lumière.

Toute ligne suivant laquelle la lumière se propage est un *rayon* lumineux. Un ensemble de rayons, marchant dans le même sens, compose ce qu'on appelle un *faisceau* de lumière.

Jadis on admettait que les *vibrations* de l'éther, c'est-à-dire les mouvements de va-et-vient qui constituent l'onde lumineuse, se faisaient dans la direction même du rayon. Mais aujourd'hui les vibrations de la lumière sont considérées comme s'exécutant dans une direction perpendiculaire au rayon. On donne une image parfaite des vibrations lumineuses, en secouant une corde par l'un de ses bouts; car on voit alors des ondes se propager en serpentant jusqu'à l'autre bout : la propagation se fait le long de la corde, mais les vibrations s'exécutent en travers. Les ondes lumineuses sont de même formée par des *vibrations transversales*.

La *couleur* d'un rayon de lumière résulte du nombre des vibrations faites dans un temps déterminé. Ainsi, les points d'un rayon violet font cinq vibrations, pendant que les points d'un rayon rouge n'en font que trois.

La *longueur* d'une onde, c'est-à-dire l'espace qu'occupe le long du rayon le va-et-vient des molécules d'éther, est au contraire plus grande pour le rouge que pour le violet, dans le rapport de cinq à trois. Cette longueur est, pour le rouge, environ les denx tiers d'un millième de millimètre; en sorte que, dans une seconde, les molécules d'éther vont et viennent le nombre immense de fois représenté par 477 000 000 000 000.

Une lumière *simple* on *homogène* est celle où toutes les vibrations se font dans le même temps, où toutes les longueurs d'ondes se trouvent être les mêmes. Une lumière *composée* ou *hétérogène* résulte de la réunion de plusieurs lnmières simples. Jamais une lumière simple ne peut se transformer en une autre lumière, mais on a trouvé le moyen de séparer les rayons élémentaires d'une lumière composée. On verra que le blanc n'est pas une lumière homogène, mais la réunion d'une multitude de rayons simples, parmi lesquels on a distingué sept nuances, *rouge*, *orange*, *jaune*, *vert*, *bleu*, *indigo*, *violet*. Le *noir* n'est pas une couleur, mais l'absence de toute lumière.

Une lumière, soit simple, soit composée, est dite *naturelle*, quand il se fait autant de vibrations dans une direction que dans une autre, tout autonr du rayon ou du faisceau; mais elle est dite *polarisée* dans le cas contraire. Nous nous bornerons à examiner les lois que suit la lumière naturelle.

Moyen de déterminer le temps qu'elle met pour venir du soleil à la terre.

L'astronome Rœmer a trouvé la vitesse de propagation de la lumière à l'aide des éclipses du premier satellite qui tourne autour de Jupiter en 42 heures et demie. L'orbite de Jupiter J (fig. 151) embrasse l'orbite de la terre T. Quand Jupiter passe de J en J', le temps qui s'écoule entre deux éclipses consécutives de son satellite *s* va sans cesse en diminuant, parce que la lumière a continuellement moins de chemin à parcourir pour arriver en T. Au contraire, l'intervalle entre deux éclipses du même satellite augmente à mesnre que Jupiter passe de J' en J, puisque la lnmière doit parcourir, pour arriver en T, un espace qui grandit toujours. Or, l'accélération totale de ces éclipses dans le passage de J à J', sera évidemment représentée par le temps que la lumière emploie à parcourir le diamètre de l'orbite terrestre, c'est-à-dire deux fois la distance de la terre au soleil. L'observation donne 16 minntes 26 secondes pour cette différence de temps; en sorte que la lumière met 8 minutes 13 secondes à venir du soleil à la terre, c'est-à-dire à

faire 34 millions de lieues; ce qui donne environ 70 mille lieues par seconde.

34. Réflexion. — Lois de la réflexion. — Effets des miroirs sphériques, concaves et convexes.

Réflexion.

Quand la lumière tombe sur les corps, ceux-ci en renvoient, en *réfléchissent* une plus ou moins grande partie, suivant le poli de leurs surfaces. On distingue deux espèces de *réflexion*; l'une, régulière, qui fournit une image du corps lumineux; l'autre, irrégulière, qui donne aux corps leur couleur propre.

Plus un corps est poli, plus la réflexion régulière est abondante, et plus faible est la réflexion irrégulière. La quantité de lumière régulièrement réfléchie s'accroît encore par l'inclinaison de la lumière sur les surfaces où elle tombe.

Lois de la réflexion.

Dans le cas de la réflexion régulière, le rayon incident et le rayon réfléchi qui en dérive sont dans un même plan passant par la perpendiculaire à la surface réfléchissante, si celle-ci est plane, et par la normale menée au point de réflexion, si la surface est courbe; de plus, il y a égalité parfaite entre les angles que forment, avec la perpendiculaire ou la normale, les rayons incidents et réfléchis, ce qu'on exprime en disant que l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence.

Effets des miroirs plans et des miroirs sphériques, concaves et convexes.

Soit (fig. 152), MN un miroir plan, et ACB un objet d'où partent des rayons de lumière. Un œil, placé en O, recevra les rayons partis des différents points A,B,C, et réfléchis en *a*, *b*, *c*, absolument de la même manière que s'ils venaient des points A',B',C', symétriques de A,B,C; en sorte que l'image de l'objet paraîtra renversée, et à une distance derrière le miroir égale à la distance de l'objet lui-même en avant de ce miroir.

Soit (fig. 153), AB un miroir sphérique concave: c'est une portion très petite de la surface de la sphère sur laquelle le miroir a été travaillé, sphère dont le centre est supposé en C. Le rayon AC, mené par le milieu A du miroir, et prolongé indéfiniment, est ce qu'on nomme l'*axe* du miroir. Des rayons lumineux, qui arrivent parallèlement à cet axe, sont réfléchis par ce miroir, de telle manière qu'ils viennent tous passer par le point F, situé sur l'axe et à une distance du miroir égale à la moitié du rayon AC. Le point F est dit le *foyer principal*; *foyer*, parce qu'il est vivement éclairé, et *principal*, à cause que le point d'entrecroisement des rayons ré-

fléchis s'éloigne du miroir à mesure que le point lumineux S se rapproche de ce miroir. Ainsi, en appelant D la distance du point lumineux, R le rayon de la sphère à laquelle appartient le miroir, on aura pour calculer la *distance focale* F, la formule

$$F = \frac{DR}{2D - R}.$$

Supposons maintenant (fig. 154) que les rayons lumineux proviennent d'un corps quelconque SS'. Par chacun des points S, S', etc., de ce corps et par le centre C, il faudra mener des axes sur lesquels se formeront les foyers respectifs de ces points, en sorte que l'image de l'objet SS' sera renversée, plus petite ou plus grande que l'objet lui-même, suivant que ce dernier sera au delà ou en deçà du centre C par rapport au miroir.

Si le miroir, au lieu d'être concave était convexe, il ne se formerait pas de foyers réels, et les rayons seraient réfléchis comme s'ils provenaient de points situés derrière le miroir, auquel cas on dit que les foyers sont *fictifs*.

Les objets sont vus avec leurs dimensions naturelles par réflexion sur les miroirs plans : ils paraissent plus petits sur les miroirs convexes, et plus grands sur les miroirs concaves.

35. Réfraction. — Lois de la réfraction. — Effets des prismes, considérés par rapport à la déviation seulement. — Effets des lentilles concaves et convexes.

Réfraction. — Lois de la réfraction.

Lorsqu'un rayon SI (fig. 155), tombe sur la surface AB d'un corps diaphane, une partie se réfléchit comme il vient d'être dit, et le reste pénètre dans l'intérieur du corps suivant IR, faisant, avec la perpendiculaire MN à la surface, un angle de *réfraction* RIN différent de l'angle d'*incidence* SIM ; mais ces deux angles sont dans un même plan, et sont tels que si, du point I comme centre, on décrit une circonférence de cercle coupant le rayon *incident* en S et le rayon *réfracté* en R, les lignes SM et RN, menées perpendiculairement à MN, seront toujours entre elles dans le même rapport quand on fera varier l'incidence du rayon lumineux. Soit par exemple S'I un autre rayon incident, qui se réfracte suivant IR', on aura la proportion

$$SM : NR :: S'M' : N'R',$$

ou les rapports égaux, $\frac{SM}{NR} = \frac{S'M'}{N'R'}$.

Les lignes qui entrent dans ces rapports sont désignées par le nom de *sinus*, et la loi précédente s'énonce ainsi : *les sinus des angles d'incidence et de réfraction sont, pour la même substance, dans un rapport constant.* Pour l'eau, ce rapport est égal à 4/3 ; c'est-à-dire que

le sinus de l'angle d'incidence étant 4, le sinus de l'angle de réfraction est 3, quand le rayon lumineux pénètre dans le liquide; mais si le rayon sortait du liquide pour entrer dans l'air, le rapport en question serait renversé, en sorte que le sinus de l'angle d'incidence étant 3, le sinus de l'angle de réfraction serait 4. Pour l'entrée dans le verre, le sinus d'incidence est au sinus de réfraction comme 3 est à 2; et comme 2 est à 3, si le rayon passe du verre dans l'air.

Si le rayon lumineux passait de l'eau dans le verre, le rapport s'obtiendrait en divisant 3/2 par 4/3, d'où 9/8; c'est-à-dire que le sinus de l'angle d'incidence étant 9, le sinus de l'angle de réfraction sera 8. Si, au contraire, le rayon passait du verre dans l'eau, le sinus de l'angle d'incidence serait au sinus de l'angle de réfraction comme 8 est à 9.

Par tous ces exemples, on voit qu'un rayon qui passe d'une substance dans une autre, ou comme on dit, d'un *milieu* dans un autre, peut suivre le même chemin en sens inverse, le rayon réfracté se changeant en rayon incident, et *vice versâ*.

Effets des prismes, considérés par rapport à la déviation seulement.

Soit BAC (fig. 156) la section d'un prisme de verre triangulaire, faite perpendiculairement aux arêtes du prisme. Si un rayon de lumière SI tombe sur la face dont AB est la section, traverse la matière du verre suivant II' et sort suivant I' S' par la face dont la section est AC, ce rayon se trouvera brisé aux points d'*incidence* I et I' à l'entrée et à la sortie du verre. Menons par ces deux points les perpendiculaires NR et N'R' aux faces AB et AC du prisme. En vertu de la réfraction, le rayon SI se rapprochera de la perpendiculaire NR, en passant de l'air dans le verre; et s'écartera de la perpendiculaire N'R', en passant du verre dans l'air. Il éprouvera ainsi deux déviations successives et dans le même sens; d'abord, la déviation représentée par l'angle S''IS''', puis la déviation représentée par l'angle S'''I'S'; leur somme est la déviation totale, représentée par l'angle S'OS''. Le rayon se rapproche du côté BC, nommé la *base* du prisme, et s'éloigne du sommet A, désigné par le nom d'*angle de réfringence*. Il est clair que cette base et cet angle de réfringence peuvent être tour à tour les trois côtés du prisme et les trois angles opposés.

L'observation et le calcul s'accordent pour montrer que la déviation totale d'un rayon lumineux passant à travers un prisme est la plus grande possible, ou à son état maximum, quand les deux déviations partielles sont égales; auquel cas le rayon traverse le prisme suivant une droite II' parallèle à la base BC, en supposant AB=BC, ou mieux, les points I et I' d'entrée et de sortie sont à égale distance du sommet A de l'angle de réfringence.

Si le rayon lumineux se présentait trop obliquement à la

surface de sortie du prisme, il serait réfléchi sur cette surface comme sur un miroir plan, et traverserait de nouveau le prisme pour sortir par une autre face. C'est ce qu'on appelle la *réflexion intérieure*. On y recourt assez souvent en optique. Par exemple, ayant un prisme BAC (fig. 157) rectangulaire en A, on fait arriver le rayon lumineux suivant SI, perpendiculairement à AB; il pénètre sans se dévier jusqu'en R, où il se réfléchit sous un angle de 45 degrés, suivant RI', pour s'échapper sans déviation suivant I'S'; en sorte que SRS' est un angle droit, et que BC fait précisément l'office d'un miroir plan.

Effets des lentilles concaves et convexes.

Les lentilles sont toujours composées de surfaces planes ou sphériques, à cause de la facilité qu'il y a de leur donner de semblables formes. Elles sont dites *convergentes* si elles se trouvent plus épaisses au centre que sur les bords, et *divergentes* si l'épaisseur est plus grande sur les bords que vers le centre. Les unes servent à faire converger les rayons de lumière partis d'un point vers un autre point, qui est le foyer ou l'image du premier; tandis que les autres n'ont que des foyers fictifs, et font immédiatement diverger les rayons. Enfin les lentilles convergentes servent à grossir les images des objets que l'on voit à travers, tandis que les lentilles divergentes rendent les images plus petites que les objets. Chaque lentille est désignée par la nature de ses deux faces; par exemple on dit une lentille *plan-convexe*, pour indiquer que l'une de ses faces est plane et l'autre convexe.

L'axe d'une lentille est la droite indéfinie passant par les milieux des deux faces de la lentille, ou par les centres des sphères auxquelles ces faces appartiennent. Nommons D la distance à la lentille d'un point lumineux placé sur cet axe, R le rayon de la lentille tournée vers ce point, R' le rayon de la face opposée, enfin n le rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction, qui pour le verre est environ 3/2, on déterminera la distance focale F par la formule approximative,

$$F = \frac{1}{\frac{1}{D} + (n-1)\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right)},$$

les rayons R et R' devant être regardés comme positifs, si les faces de la lentille présentent leurs concavités vers le point lumineux, et négatifs si elles tournent leurs convexités vers ce même point. Si F prenait une valeur positive, le foyer serait du côté du point lumineux, et par conséquent fictif; en d'autres termes, la lentille serait divergente; mais elle sera convergente, si F prend une valeur négative, auquel cas le foyer est de l'autre côté de la lentille, relativement au point lumineux.

Par exemple, soit $R = -2$ décimètres, $R' = 3$ décimètres, $D = 48$ décimètres, et $n = \frac{3}{2}$; cela signifie que la première face de la lentille tourne sa convexité, et la seconde sa concavité vers le point lumineux. On aura $F = -\frac{48}{19}$, c'est-à-dire, que le foyer sera environ à 2 décimètres et demi de l'autre côté de la lentille par rapport au point lumineux.

Quand le point lumineux est à une très grande distance, on peut regarder D comme infini, et la valeur de F se réduit à

$$F = \frac{1}{(n-1)\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right)};$$

alors la distance focale est la plus courte possible, et le foyer est dit *principal*, par opposition aux autres foyers, qui s'éloignent sans cesse à mesure que le point lumineux se rapproche. Quand celui-ci n'est pas sur l'axe de la lentille, les foyers se forment sur la droite qui joint ce point au centre de cette lentille, et il arrive que les images sont renversées.

36. Décomposition et recomposition de la lumière.

Décomposition et recomposition de la lumière.

Lorsqu'on fait passer un faisceau de lumière blanche à travers une substance terminée par deux faces inclinées l'une à l'autre, par exemple à travers deux des grandes faces d'un prisme de verre triangulaire, on voit le faisceau de lumière en sortir dilaté dans un sens et coloré de diverses teintes. Ce phénomène prouve que les rayons de la lumière blanche sont inégalement réfractés par le prisme, qui les sépare les uns des autres, et que ces rayons possèdent des couleurs propres qui les distinguent à la vue. Si l'on reçoit sur un écran l'ensemble des rayons ainsi réfractés et décomposés, et, pour plus de netteté, dans un lieu obscur, on aura ce qu'on appelle le *spectre solaire*.

Dans ce spectre, dont la largeur est égale au diamètre du faisceau incident, et dont la longueur, beaucoup plus considérable, est transversale aux arrêtes du prisme, on reconnaît un assez grand nombre de teintes, qui passent les unes aux autres par des nuances insensibles. Pour en faciliter l'étude, Newton et après lui tous les physiciens ont considéré le spectre comme formé de sept teintes principales dans l'ordre suivant : *rouge*, *orange*, *jaune*, *vert*, *bleu*, *indigo*, *violet*. Les rayons rouges sont les moins réfringents, et les violets se dévient le plus au contraire.

On obtient encore les couleurs du spectre les unes après les autres, en faisant passer un faisceau de lumière blanche à travers

des plaques de verre coloré. Ainsi, une plaque rouge ne laisse passer que les rayons rouges et éteint les autres; une plaque jaune ne laissera passer que les rayons jaunes, et ainsi de suite; en sorte que la décomposition de la lumière se fera par absorption, et non plus par des réfractions inégales.

Des rayons colorés, séparés de toute autre espèce de rayons, forment de la lumière simple et homogène, qui ne peut plus être décomposée, ni par réfraction ni par absorption. Mais on peut recomposer de la lumière blanche en faisant coïncider tous les rayons d'un spectre solaire. A cet effet, il ne suffit pas de les diriger vers un centre commun, il faut encore qu'ils y arrivent suivant la même droite: un simple entrecroisement des rayons donnerait bien de la lumière blanche en ce point commun, mais au delà les rayons divergents se sépareraient de nouveau.

Les teintes *composées* résultent de l'union de plusieurs rayons colorés qui ne produisent pas le blanc. Voici la règle donnée par Newton pour déterminer toutes ces teintes.

Partagez la circonférence d'un cercle en 474 parties égales; prenez, à la suite les unes des autres,

80 parties pour le rouge,	ou	60°	45′	34″,	
45 parties pour l'orange,	ou	34	10	38	,
72 parties pour le jaune,	ou	54	41	01	,
80 parties pour le vert,	ou	60	45	34	,
72 parties pour le bleu,	ou	54	41	01	,
45 parties pour l'indigo,	ou	34	10	38	,
80 parties pour le violet,	ou	60	45	34	.

Ayez soin de dégrader les teintes ainsi qu'elles le sont dans le spectre solaire, de telle sorte que la circonférence soit comme un spectre de forme circulaire. Affaiblissez ensuite chaque teinte, en allant de la circonférence au centre, qui sera un point blanc. Cela fait, marquez les milieux des arcs occupés par les sept couleurs principales; inscrivez 45 au milieu de l'arc rouge, 27 à l'orange, 48 au jaune, 60 au vert, 60 au bleu, 40 à l'indigo, et 80 au violet: ces nombres représentent les rayons des sept couleurs, dans un faisceau de lumière blanche supposé contenir 360 rayons. Si l'on combine enfin ces différents rayons comme des forces parallèles appliquées en ces mêmes points, le point d'application de leur résultante tombera au centre du cercle, ce qui signifie que les couleurs du spectre donneront un composé blanc.

Maintenant, appliquant aux milieux des mêmes arcs les mêmes rayons colorés, mais en proportions différentes, la résultante de ces rayons considérés comme des forces parallèles, ne sera plus appliquée au centre du cercle, mais en un autre point, dont la teinte sera précisément celle qui résulterait du mélange de toutes ces couleurs. On obtiendrait ainsi la teinte composée d'un nombre quelconque de rayons colorés, pris dans des rapports arbitraires.

Dans la construction indiquée ci-dessns les milieux des arcs colorés ne sont pas situés deux à deux sur le même diamètre; d'où l'on peut conclure que deux des sept couleurs du spectre, dans leur plus grand état de pureté, ne pourraient faire un mélange parfaitement blanc, en quelque proportion qu'on les prît. Mais trois quelconques des sept couleurs principales du spectre étant prises dans des proportions convenables, peuvent donner de la lumière blanche par leur mélange.

En prolongeant les rayons menés par les milieux des arcs, on trouve que

le rouge est opposé au bleu verdâtre,
l'orange . . . . bleu indigo,
le jaune . . . . violet indigo,
le vert. . . . . rouge violet,
le bleu . . . . rouge orangé,
indigo. . . . . jaune orangé,
violet . . . . jaune verdâtre.

Ces couleurs, opposées dans le cercle chromatique de Newton, sont dites *complémentaires* l'une de l'autre, parce que, ensemble, elles peuvent former du blanc. En général, si l'on sépare les rayons du spectre solaire en deux portions quelconques, l'un des faisceaux sera dit complémentaire de l'autre.

37. Structure de l'œil et vision.

Structure de l'œil et vision.

L'œil forme une espèce de chambre obscure, où viennent se peindre les images des objets extérieurs. En allant du dehors en dedans, les rayons lumineux traversent d'abord la *cornée*, membrane transparente, derrière laquelle se trouve un petit espace occupé par un liquide désigné sous le nom d'*humeur aqueuse*. Vers la partie postérieure, se trouve l'*iris*, membrane opaque, percée d'un trou nommé la *pupille*, qui se rétrécit quand la lumière est trop vive, et se dilate dans l'obscurité pour laisser passer une plus grande quantité de rayons. Immédiatement derrière l'iris, on trouve une capsule renfermant un *cristallin*, espèce de lentille convergente, formée de plusieurs couches diversement réfringentes.

Au sortir du cristallin, les rayons pénètrent dans un grand espace rempli par l'*humeur vitrée*, et tapissé par une membrane nerveuse, extrêmement délicate : c'est la *rétine*, épanouissement du nerf optique, qui reçoit les images et donne la sensation de la vision. La rétine repose sur une couche de matière noire, *pigmentum nigrum*, sans doute destinée à éteindre les rayons, qui sans cela se réfléchiraient dans l'œil et y produiraient une grande confusion. Le pigmentum recouvre la membrane *choroïde*. Toutes ces mem-

branes et ces humeurs sont renfermées dans une dernière enveloppe, la *sclérotique*, qui vient s'unir à la cornée et former le blanc de l'œil.

Les images, sur la rétine, sont dans nne position renversée, et cependant nous voyons les objets dans lenr situation effective, parce que nous rapportons ces objets dans la direction des axes visuels. Ainsi, deux objets A et B forment des images *a* et *b*, telles que les axes A*a* et B*b* s'entre-croisent dans l'œil, en avant de la *rétine*.

38. **Donner une idée des instruments d'optique les plus simples, tels que : la chambre claire. — La chambre noire. — La loupe. — Le microscope simple. — Le microscope solaire. — La lunette de Galilée. — La lunette astronomique. — Les télescopes.**

Chambre claire.

Que l'on se représente un prisme à quatre pans, dont la section soit ABCD (fig. 158). L'angle A est de 90 degrés; les angles B et D chacun de 77 degrés et demi ; et l'angle C de 115 degrés. Un rayon SI pénètre dans le prisme, perpendiculairement à AB; il éprouve une réflexion intérieure en I, en se déviant de 45 degrés ; il subit une seconde réflexion intérieure en I', et se dévie encore de 45 degrés; en sorte que la déviation totale est de 90 degrés, et que le rayon sort du prisme perpendiculairement à AD. L'œil le reçoit en E, comme s'il venait dn point S que l'on voit directement. Il faut, ponr que cet effet ait lieu, que le rayon sorte du prisme tout près de l'angle D, où l'on place l'œil, dont l'ouverture se partage entre les rayons qui viennent du prisme, et ceux qui viennent du dehors dans le voisinage dn point D.

Chambre noire.

La chambre noire est un lieu fermé de toute part, et où les images des objets extérieurs viennent se produire. A cet effet, la partie supérieure de la chambre est percée d'un trou, qui reçoit une lentille L de long foyer (fig. 159) et sur laqnelle on fait tomber les rayons lumineux réfléchis par un miroir M placé un peu plus haut, et incliné d'environ 45 degrés à l'horizon. En recevant les images sur le papier P, on peut en dessiner les contours, et en imiter les couleurs.

Loupe et Microscope.

Les instruments au moyens desquels on grossit les très petits objets qui sont à notre portée se nomment *loupes* on *miscroscopes*, suivant qu'il y entre une seule on plusieurs lentilles.

Pour voir un objet à la loupe, on place cet objet an foyer principal de la lentille ; alors, l'image va se former de l'autre côté de la lentille, et à une très grande distance, en sorte que cette image serait immensément grandie si on pouvait la recevoir sur un écran.

Au lieu d'écran, on place l'œil, mais à une distance assez rapprochée de la lentille pour que la vision soit distincte.

Lorsqu'on veut grossir davantage les objets, on emploie plusieurs lentilles, dont les unes, placées très près de l'objet, forment l'*objectif*, et dont les autres, voisines de l'œil, composent l'*oculaire*. Dans ces systèmes amplifiants, les images sont ou *droites* ou *renversées* par rapport à l'objet.

Soit, par exemple, un petit corps AB placé un peu plus loin que le foyer de l'objectif *m*, qui est une lentille de très court foyer. L'image de ce corps vient se former en A'B', au foyer de l'oculaire *n*; et l'œil, en O, voit le corps comme s'il occupait l'espace très amplifié A''B'', et dans une position renversée.

Microscope solaire.

Le microscope solaire se compose essentiellement d'une lentille convergente de très court foyer. En plaçant un petit objet *ab* (fig. 161) au foyer de cette lentille, l'image irait se former à l'infini avec des dimensions également infinies; mais en éloignant un peu l'objet, son image se rapprochera de la lentille et ira se former en AB avec des dimensions colossales. Tel serait le microscope solaire dans toute sa simplicité; mais les rayons lumineux partis de *ab* se trouveront très-affaiblis en AB, et cette image ne sera visible qu'autant que l'objet *ab* se trouvera vivement éclairé. On concentre donc la lumière solaire en *ab*, à l'aide d'une lentille de grande dimension. Au lieu des rayons émanés directement du soleil, on a récemment fait usage de la lumière éblouissante qui se produit par la combustion de l'hydrogène au contact d'une petite boule de chaux vive.

Lunette de Galilée.

La lunette imaginée par Galilée se compose d'un objectif convergent MM (fig. 162) et d'un oculaire divergent NN. En l'absence de cet oculaire, l'image d'un objet AB irait se former quelque part en A'B', dans une situation renversée; mais l'interposition de l'oculaire NN rend divergents les rayons qui allaient converger en A' et B' par exemple, de la même manière que s'ils provenaient de points A'' et B'' situés entre les deux lentilles; en sorte que l'objet AB sera vu par l'œil placé tout près de NN, sous un angle plus grand que celui qu'il soutendrait directement; en d'autres termes, il se trouvera grossi, sans être renversé comme dans les microscopes à objectif et oculaire convergent. Mais cette lunette a le défaut de diminuer le *champ* de la vision, c'est-à-dire le nombre des objets que l'on peut ainsi voir ensemble.

Lunette astronomique

La lunette astronomique se compose, comme le microscope,

d'un objectif et d'un oculaire convergent, qui renversent les images. Mais, dans la lunette, l'objectif a un long foyer, tandis que l'oculaire est d'un court foyer. L'intervalle qui les sépare est à peu près égal à la somme des deux distances focales, en sorte que le grossissement des images est dans le rapport de ces distances.

Télescope.

Le télescope le plus simple se compose d'un miroir métallique MM (fig. 163) placé au fond d'un tube, sa concavité tournée vers les objets qu'il s'agit de grossir. Les images de ces objets se forment en avant du miroir, images très brillantes que l'on grossit en les observant directement à la loupe.

Pour ne pas intercepter les rayons qui, des objets, viennent tomber sur le miroir, Newton a proposé de recevoir l'image sur un petit plan métallique *n* (fig. 164), incliné de 45 degrés sur l'axe du tube, et qui réfléchit les rayons dans une direction perpendiculaire à cet axe; alors on regarde l'image à travers une ouverture O pratiquée sur le côté du tube.

Le télescope imaginé par Grégory, le seul que l'on emploie encore aujourd'hui, porte un petit miroir *m* (fig. 165) dont la concavité est tournée vers le grand miroir; ce petit miroir reçoit les rayons concentrés par l'autre, et les renvoie en sens inverse à travers une ouverture O, pratiquée au centre du grand miroir. Dans le télescope de Cassegrain, le petit miroir est convexe, mais alors il est placé entre le grand miroir et le foyer de ce dernier.

MÉTÉOROLOGIE.

39. Moyenne hauteur annuelle du baromètre en différents lieux. — Limites des oscillations extrêmes. — Variations horaires à diverses latitudes.

Moyenne hauteur annuelle du baromètre en différents lieux.

Supposons que l'on observe le baromètre d'heure en heure. En ajoutant les 24 observations du jour, et divisant leur somme par 24, on aura la hauteur barométrique moyenne du jour. En ajoutant les hauteurs moyennes de tous les jours du mois, et divisant leur somme par le nombre de jours, on aura de même la hauteur barométrique moyenne du mois. La hauteur moyenne de l'année s'obtient également en ajoutant les 365 ou 366 moyennes du jour, et divisant leur somme par leur nombre. Enfin, on réunit les moyennes de plusieurs années pour en déduire la moyenne générale du lieu de l'observation. C'est ainsi qu'à l'Observatoire de Paris, on a trouvé 756 millimètres pour cette hauteur moyenne générale, ce qui donne 761,5 millimètres au niveau de la mer.

Limites des oscillations extrêmes.

On est aussi dans l'usage de noter chaque jour la plus grande et la plus petite hauteur du baromètre, c'est-à-dire le maximum et le minimum. On prend ensuite la moyenne de tous les maximum, et celle de tous les minimum, soit durant un mois, soit pendant l'année entière. Le baromètre est d'autant plus variable qu'on approche plus des pôles de la terre. Les plus grandes variations sont de 6 millimètres à l'équateur ; de 30 au tropique ; de 40 en France à la latitude moyenne ; et de 60 à 25 degrés du pôle. En général, le baromètre descend plus au dessous de la moyenne qu'il ne monte au dessus, à peu près dans le rapport de 5 à 3.

Variations horaires à diverses latitudes.

Quand on observe le baromètre dans les pays situés entre les tropiques, on ne tarde pas à voir qu'il monte et descend périodiquement deux fois en 24 heures. Ces variations sont de 2 à 3 millimètres. Le baromètre est à son

	mm.	
minimum du matin,	— 0,49,	à 4 heures 13 minutes ;
maximum du matin,	+ 1,46,	à 9 heures 23 minutes ;
minimum du soir,	— 1,09,	à 4 heures 8 minutes ;
maximum du soir,	+ 0,35,	à 10 heures 23 minutes.

La différence entre le maximum du matin et le minimum du soir, ou la *grande période*, est donc de 2,55 millimètres.

Ces variations diurnes du baromètre s'affaiblissent à mesure que l'on avance vers les pôles de la terre : on ne les reconnaît plus que dans les moyennes de 15 jours ou d'un mois, et cessent complètement au delà du 60e degré de latitude. Voici la valeur moyenne de la grande période, à diverses latitudes :

mm.	
2,55,	à l'équateur,
2,24,	à 20 degrés de latitude,
1,88,	à 30 degrés,
1,37,	à 40 degrés,
1,06,	à 45 degrés,
0,65,	à 50 degrés,
0,20,	à 55 degrés,
insensible,	à 60 degrés.

Les heures des maximum et des minimum, dans nos climats, varient aussi avec les saisons. Le maximum du matin arrive entre 7 et 8 heures durant l'été, et de 9 à 10 heures durant l'hiver. Le maximum du soir tombe entre 4 et 5 heures pendant la première saison, et entre 2 et 3 pendant la seconde.

40. Températures moyennes annuelles à la surface du sol à diverses latitudes. — Climats tempérés. — Climats excessifs. — Températures à diverses profondeurs.

Températures moyennes annuelles à la surface du sol à diverses latitudes.

On détermine les températures moyennes du jour, du mois et de l'année, de la même manière que les hauteurs barométriques moyennes. Ainsi, à Paris, la température moyenne annuelle est de 10 degrés deux tiers. Cette moyenne augmente à mesure que l'on approche de l'équateur, et diminue quand on s'avance vers le pôle; mais cette moyenne est loin d'être la même à tous les points d'un même parallèle. En Amérique, par exemple, à la latitude moyenne, cette température est environ de 5 degrés moindre qu'en France; elle diminue aussi à mesure que l'on s'avance vers l'Asie; en sorte que ce sont les pays situés à l'occident de l'Europe et en Afrique, qui, à égalité de latitude, jouissent des températures moyennes les plus élevées : celle de l'équateur est de 28 degrés, et celle des régions polaires d'environ 16 degrés sous zéro.

Climats tempérés. — Climats excessifs.

Les climats sont tempérés aux latitudes moyennes, très chauds dans les régions équatoriales, et très froids dans les régions polaires. Mais, outre cette diversité dans les températures moyennes annuelles, il faut encore distinguer les climats où les variations de chaleur sont faibles, des climats où ces variations sont très grandes; ceux-ci sont des climats *excessifs* et règnent en général dans l'intérieur des continents, tandis que les climats plus réguliers se rencontrent dans le voisinage des mers et surtout dans les îles situées au milieu de l'Océan.

Températures à diverses profondeurs.

La chaleur du globe a trois origines distinctes. D'abord, l'espace où se meut la terre est à une température d'environ 60 degrés sous zéro; cette température, dite *des espaces planétaires*, serait celle de la surface et de l'intérieur de notre globe, en l'absence des deux autres causes dont nous allons parler.

A mesure qu'on pénètre plus avant dans le sol, on observe un accroissement de température, qui est environ d'un degré pour 26 mètres de profondeur. On explique ce fait en admettant que la terre a une chaleur propre, due à un état primitif d'incandescence et même de fusion. Cette chaleur se dissipe très lentement, et n'augmente que d'une petite fraction de degré la température moyenne des différents points de la surface; en sorte que cette surface serait à très peu près aussi froide que les espaces planétaires, si le soleil ne la réchauffait perpétuellement de ses rayons.

La chaleur que nous envoie cet astre s'est accumulée dans l'intérieur de la terre; ce qu'en a reçu chaque point de la surface terrestre diffère beaucoup avec la latitude, mais ne varie pas sensiblement dans le sens de la profondeur du sol. Ainsi, à Paris, la température moyenne est à peu près de 11 degrés au-dessus de zéro, ce qui fait 71 degrés au-dessus de la température des espaces planétaires : ce dernier nombre exprime donc l'effet solaire pour Paris. A l'équateur, la température moyenne est de 25 à 30 degrés, ce qui donne, terme moyen, 88 degrés pour l'effet solaire. Quant aux pôles, la température moyenne doit y être de 16 sous zéro, ce qui réduit l'action solaire à 44 degrés. Ainsi, la chaleur solaire est deux fois plus forte à l'équateur qu'aux pôles, et cependant, le calcul apprend que la quantité de chaleur versée par le soleil aux pôles, n'est que les 415 millièmes ou moins de la moitié de la chaleur versée à l'équateur. Cette différence tient aux déplacements de l'air et des eaux de l'Océan, d'où résulte un mélange continuel qui efface une partie de la différence entre ces températures extrêmes. Un autre effet de ce mélange continuel des diverses parties de l'atmosphère et de l'Océan est de rendre inégales les températures de points situés à la même latitude.

Dans le sol, il y a des variations de température durant le jour et durant le cours de l'année. Les variations annuelles se font sentir à des profondeurs 19 fois plus grandes que les variations diurnes; si les premières sont insensibles à 19 mètres de profondeur, les secondes le sont à 1 mètre. A une vingtaine de mètres et au delà, la température est par conséquent invariable; elle équivaut à la température moyenne de la surface, augmentée d'un degré par 26 mètres de profondeur.

41. Quantité de pluie à diverses hauteurs et en différents lieux. — Formation de rosée, de la gelée blanche, du verglas, etc.

Quantité de pluie à diverses hauteurs et en différents lieux.

Quand, par leur rencontre mutuelle, les gouttelettes qui composent un nuage ont acquis une grosseur suffisante, elles tombent sous forme de *pluie*. On mesure la quantité de pluie que reçoit un lieu déterminé au moyen d'un *pluviomètre*, vase disposé pour recevoir la pluie. Divisant le volume total de la pluie ainsi recueillie durant une année, par la surface que présente l'ouverture du vase, on a pour quotient l'épaisseur de la couche d'eau qui eût recouvert le sol, si l'eau n'avait été ni absorbée par la terre ni évaporée dans l'air.

On a observé que la couche de pluie qui tombe annuellement à l'équateur est d'environ 3 mètres. Dans nos climats, vers 45 degrés de latitude, elle n'est plus que de 8 décimètres; mais il y a d'énormes différences pour des lieux situés à la même latitude,

différences qui résultent du voisinage des mers et de la direction ordinaire des vents.

On observe aussi des différences dans les quantités de pluie que l'on recueille à diverses hauteurs. Ainsi, l'eau qui tombe annuellement dans la cour de l'Observatoire de Paris est de 56 centimètres, tandis qu'elle n'est que de 50 centimètres sur la terrasse élevée de 28 mètres. C'est tout le contraire à Genève, où il tombe moitié moins d'eau qu'au Saint-Bernard, qui est de deux mille mètres plus élevé.

Formation de la rosée, de la gelée blanche, du verglas, etc.

La rosée n'est qu'un dépôt de la vapeur d'eau atmosphérique, qui se forme la nuit sur les corps très refroidis. Quand le ciel est serein, la surface du sol rayonne vers le ciel, qui lui renvoie moins de chaleur; en sorte que la terre, dont le pouvoir émissif est considérable, arrive à une température bien inférieure à celle de la couche d'air en contact; alors, une partie de la vapeur contenue dans cette couche repasse à l'état liquide, et se forme en gouttelettes à la surface de la terre et de la plupart des corps qui s'y rencontrent.

La quantité de rosée qui se forme dépend donc de la pureté du ciel; elle sera plus abondante encore si l'air est un peu agité, de manière à ce que plusieurs couches viennent se mettre tour à tour en contact avec le sol; mais il ne faudrait pas qu'il régnât un vent fort, parce que le contact trop souvent renouvelé de l'air et de la terre empêcherait celle-ci de se refroidir suffisamment

La présence des nuages est un obstacle à la productiou de la rosée, parce que ces nuages interceptent tout ou partie des rayons qui de la terre iraient se perdre dans l'espace, et les renvoient vers le sol. Il suffira donc d'abriter une partie de la surface terrestre, pour qu'il ne s'y dépose pas de rosée. Dans des circonstances égales, la terre végétale reçoit plus de rosée que les plantes, celles-ci plus que les pierres, et ces dernières plus que les métaux, parce que le rayonnement, et par suite le refroidissement de ces diverses substances, sont rangés dans le même ordre en allant du plus au moins.

La *gelée blanche* n'est autre chose que la rosée gelée sur place. Elle se produit ordinairement durant les fraîches matinées du printemps et de l'automne; il s'en forme aussi en hiver, mais rarement en été. Cette gelée est formée de petits cristaux délicatement posés les uns à côté des autres. En général, cette masse floconneuse est située à la face supérieure des tiges et des feuilles végétales, c'est-à-dire sur les parties de ces plantes tournées vers le ciel. Les parties inférieures, tournées vers le sol, se sont moins refroidies, parce qu'elles étaient en communication de rayonnement avec des corps ayant à peu près la même température.

Quand la température du sol est inférieure à zéro, s'il vient à tomber un peu de pluie, celle-ci se congèle à la surface de tous les corps et y forme un enduit de glace, unie et transparente, que l'on nomme *verglas*.

La neige est formée de gouttes d'eau gelées dans les hautes régions de l'air, ou durant leur chute. Les petits cristaux de glace qui en résultent se grouppent en flocons légers. Mais la neige se dispose parfois en petites pelottes, ou réunions de cristaux plus ou moins serrés et entrelacés. Dans ce cas, on l'appelle *grésil*.

42. Électricité atmosphérique. — Effets de la foudre. — Construction des paratonnerres.

Électricité atmosphérique.

L'électricité répandue dans l'atmosphère donne lieu à plusieurs phénomènes: d'abord, c'est l'origine des éclairs et de la foudre; ensuite, elle entre pour beaucoup dans la formation de la grêle; elle apparaît encore dans les trombes que nous venons de décrire, ét dans l'aurore boréale dont nous parlerons ci-après.

L'atmosphère est dans un état électrique habituel. Par un temps calme et serein, elle possède un excès d'électricité positive, qui varie, soit pendant le jour, soit d'une saison à l'autre. On a expliqué de bien des manières l'origine de cette électricité. On l'a attribuée tour à tour à l'évaporation de l'eau, au frottement de l'air contre le sol, à la végétation, aux compressions et dilatations de l'air, etc.; quelques-uns ont considéré la terre comme une vaste pile voltaïque, d'autres comme un appareil thermo-électrique.

On peut admettre, avec quelque apparence de vérité, que l'électricité, d'abord disséminée dans l'atmosphère, compose de petites couches tout autour des gouttelettes d'un nuage. Lorsque les gouttes ont acquis une certaine grosseur, et qu'elles sont assez rapprochées les unes des autres, leurs couches électriques, qui se sont aussi accrues, peuvent se déverser de proche en proche, et venir former une couche unique à la face du nuage. Dans cet état, la couche électrique exercera une puissante action, tant sur les nuages voisins que sur les objets placés à la surface du sol; et la pression de la couche finira par vaincre la résistance de l'air, ce qui donnera écoulement au fluide électrique sous forme de grosses étincelles, qui sont les *éclairs*.

Effets de la foudre.

En lançant un cerf-volant dans les nuages orageux, Franklin et après lui d'autres physiciens ont pu soutirer de ces nuages, et par le moyen de la corde du cerf-volant, des étincelles électriques redoutables, qui partaient avec le bruit d'une arme à feu. L'éclair n'est donc qu'une étincelle électrique, au moyen de laquelle l'électricité se distribue d'une manière nouvelle entre l'atmosphère et la masse

solide du globe. Sa forme habituelle est en zig-zag, et sa longueur atteint parfois une lieue.

Par suite des attractions électriques entre les nuages et le sol, la foudre tombe de préférence sur les lieux élevés et sur les meilleurs conducteurs. Tout le monde connaît le pouvoir destructeur de ce terrible météore. Il tue les hommes et les animaux, il consume les arbres, il incendie les habitations, il fond ou réduit en poussière les matières métalliques et pierreuses qu'il trouve sur son passage. Il répand habituellement une odeur de soufre; mais cette odeur résulte des vapeurs ou poussières entraînées par le courant électrique, et dont une partie se dépose à l'entrée et à la sortie de tous les corps qu'il traverse.

Lorsqu'un nuage électrisé vient à se décharger par l'un de ses bouts, l'autre bout, qui tenait en arrêt l'électricité contraire du sol ayant cessé d'agir, l'électricité de ce sol rentre violemment dans l'intérieur de la terre, et la commotion qui en résulte pour les êtres vivants peut aller jusqu'à produire leur mort. On dit alors qu'ils sont frappés par le *choc en retour*.

On distingue deux espèces de *grêle;* la première résulte de simples gouttes de pluie gelées par le froid des hautes régions de l'atmosphère, et tombe habituellement dans les régions polaires; la seconde, qui est plus désastreuse, est particulière aux climats tempérés, et se forme au milieu de circonstances extraordinaires. Elle tombe pendant la saison la plus chaude, et à la suite d'un refroidissement subit et considérable opéré dans la région des nuages, et qui se fait même sentir jusqu'à la surface du sol. Dans ce cas, les vents soufflent avec une grande violence, et changent souvent de direction. Les nuages arrivent de tous les points du ciel; ils s'accumulent et composent bientôt une masse nuageuse immense; l'obscurité qui en résulte a quelque chose d'effrayant. Tout à coup, on entend dans les airs un bruissement particulier qui, quelques minutes après, est suivi de la chute des grêlons. Cette chute dure très peu de temps, rarement un quart d'heure; mais la quantité de grêle est parfois si considérable, qu'elle a bientôt recouvert la terre d'une couche de plusieurs pouces d'épaisseur.

Ce terrible météore apparaît presque toujours à la lueur des éclairs et au bruit de la foudre. Il précède ordinairement les pluies d'orage; il les accompagne quelquefois; jamais, ou presque jamais, il ne les suit, surtout quand ces pluies ont quelque durée. La grosseur ordinaire des grêlons est celle d'une noisette; mais, dans certains cas ils prennent des dimensions énormes : on en a vu qui pesaient plus d'une demi-livre. Leur forme est en général sphérique, mais parfois elle est conique, ou irrégulière et anguleuse. Vers leur centre, on trouve fréquemment un noyau blanc et poreux, environné de couches concentriques d'une glace transparente, ou d'un blanc opaque, ou alternativement opaque et transparente.

Volta a supposé que les grêlons sont ballottés entre deux nuages chargés d'électricités différentes, ce qui expliquerait leur accroissement et la succession de leurs couches; mais cette théorie offre plusieurs difficultés qu'il est inutile d'énumérer ici.

Construction des paratonnerres.

Si l'on pouvait faire arriver jusqu'à la région des nuages un courant d'électricité contraire à celle qui s'y trouve accumulée, on neutraliserait cette dernière, et l'on préviendrait la chute de la foudre. Il faudrait planter à la surface du terrain que l'on voudrait protéger une tige métallique suffisamment longue. Le *paratonnerre*, imaginé par Franklin, ne remplit qu'une partie de cette condition; c'est une tige de fer ayant plusieurs mètres de longueur, qui offre un écoulement facile à l'électricité du sol, attirée par l'électricité contraire du nuage, mais qui, ne la transportant point jusque là, ne peut prévenir la chute du tonnerre. Cet appareil n'a guère pour effet que de détourner un peu le courant fulminaire, en lui offrant un chemin dans le sol. Aussi, le paratonnerre ne protége-t-il les lieux environnants que jusqu'à une distance double de sa longueur. On conseille de lui donner 27 pieds de long et 2 pouces de diamètre à sa base. Sa partie inférieure sera une barre de fer de 25 pieds; puis, viendra une baguette de laiton de 22 pouces, terminée par une pointe de platine de 2 pouces, le tout s'amincissant régulièrement de la base au sommet. Le paratonnerre étant fixé solidement au faîte d'une maison, on attache à sa base une corde en fil de fer, qui descend le long du toit et de la façade jusque dans le sol, où elle doit aboutir dans une terre naturellement humide, et, s'il est possible, dans l'eau d'un puits.

CHIMIE.

1° Considérations générales sur la nature des corps, et sur la force qui unit leurs parties constituantes.

Dans la théorie corpusculaire, on admet que la matière se compose d'atomes, ou particules insécables. Ces atomes sont de natures diverses, c'est-à-dire qu'ils jouissent de propriétés différentes. Si des atomes identiques entre eux viennent à se réunir, ils formeront un corps *simple;* mais si plusieurs espèces d'atomes se combinent d'une manière intime, il en résultera un corps *composé*.

Tout corps d'où l'on ne peut tirer qu'une espèce de matière est réputé simple; tout corps d'où l'on peut extraire plusieurs sortes de matières est composé. La distinction entre les matières simples et composées est donc relative à l'état de nos connaissances en *chimie*, science qui traite de la nature des corps et de leurs combinaisons.

Nous avons déjà dit, page 188, que la force de cohésion, qui réunit les atomes des corps, ne doit pas être confondue avec la pesanteur universelle. En chimie, on se sert du mot *cohésion* pour désigner la force qui maintient en contact les atomes de même espèce, soit simples, soit composés, et l'on désigne sous le nom d'*affinité* la force qui provoque et conserve la réunion ou combinaison d'atomes de diverses natures. A la cohésion est due la *cristallisation*, qui est d'autant plus régulière, que les corps passent plus lentement de l'état liquide ou gazeux à l'état solide, et qui prend le nom de *précipité*, si ce passage se fait trop brusquement. Mais à l'affinité sont dues toutes les merveilles de la chimie, et c'est l'étude de cette force incompréhensible qui fait presque toute l'occupation du chimiste.

2° Nomenclature chimique; ordre d'après lequel les corps doivent être étudiés.

On dit du *sulfure de carbone* ou du *carbure de soufre*, pour indiquer une combinaison de soufre ou de carbone, donnant ainsi la terminaison *ure* au premier mot, si le composé est solide ou li-

quide; mais si ce composé était gazeux, on donnerait au second mot la terminaison *é*, comme *hydrogène carboné*, *hydrogène phosphoré*.

Quand un radical, comme le fer, se combine avec diverses proportions de soufre par exemple, le composé où il entre le moins de soufre se nommera *proto-sulfure de fer*; le second, *deuto-sulfure de fer*; le troisième, *trito-sulfure de fer*, et ainsi de suite, réservant la dénomination de *per-sulfure de fer* pour désigner le composé où entre la plus grande quantité de soufre possible.

Les composés d'un corps simple avec l'oxygène portent les noms génériques d'*oxide* ou d'*acide*, suivant les propriétés chimiques de ces composés. Les divers degrés d'oxidation s'indiquent de la manière suivante : *protoxide de fer*, *deutoxide de fer*, *tritoxide de fer*; mais il y a des chimistes qui les distinguent par leurs couleurs : *oxide blanc de fer*, *oxide noir de fer*, *oxide rouge de fer*.

Il y a, en général, deux degrés d'acidification; le premier reçoit la terminaison *eux*, et le second la terminaison *ique*. Ainsi, *acide sulfureux* et *acide sulfurique*, le second renfermant plus d'oxigène que le premier. Un degré inférieur à l'acide sulfureux donne l'*acide hypo-sulfureux*; un degré intermédiaire aux acides sulfureux et sulfurique donne l'*acide hypo-sulfurique*.

Plusieurs chimistes disent, par analogie, *oxide ferreux* et *oxide ferrique*, pour désigner le premier et le dernier degré d'oxigénation du fer; et ils considèrent les combinaisons intermédiaires comme des composés de ces deux extrêmes.

La combinaison d'un oxide avec un acide produit un composé du second ordre, qui porte le nom générique de *sel*. L'acide en *eux* donne au sel la terminaison *ite*, et l'acide en *ique* donne à ce sel la terminaison *ate*. Ainsi, *sulfite de potasse* désigne un sel résultant de la combinaison de l'acide sulfureux avec la potasse (qui est un oxide de potassium); et *sulfate de potasse*, un sel formé d'acide sulfurique et de potasse. Quant le sel contient un atome d'acide avec un atome d'oxide, ce dernier étant la *base* du sel, on dit que le sel est *neutre*; mais c'est un *sel acide* ou un *bi-sel*, quand deux atomes d'acide sont réunis à un seul atome de base; et c'est un *sel basique* ou un *sous-sel*, lorsque deux atomes de base sont réunis à un seul atome d'acide.

Toutes ces expressions forment la nouvelle nomenclature chimique; mais on a conservé beaucoup d'anciennes dénominations, qui ont l'avantage de la simplicité : l'usage seul peut les faire connaître.

On connaît aujourd'hui cinquante-trois corps simples ou réputés tels. M. Thénard les a classés suivant leur affinité pour l'oxygène, qui joue un rôle remarquable dans les combinaisons. M. Berzelius les a rangés d'après leurs propriétés électriques, sous l'influence de la pile de Volta. M. Despretz les a répartis en familles

dites *naturelles*, d'après l'ensemble de leurs caractères. D'autres chimistes ont imaginé beaucoup de classifications plus ou moins heureuses, ou, si l'on veut, plus ou moins défectueuses. Nous définirons ci-après les corps simples, en les rangeant conformément à la méthode de M. Thénard, c'est-à-dire suivant leur affinité plus ou moins grande pour l'oxygène, substance très répandue, et qui joue le rôle le plus important dans les combinaisons chimiques.

3° Notions sur la chaleur et l'électricité.

La chaleur et l'électricité étant les agents naturels les plus actifs des combinaisons et des décompositions chimiques, on doit en faire une étude préalable (Voir aux pages 213 et 228).

4° Lois suivant lesquelles les corps se combinent ; nombres proportionnels.

On a remarqué que les gaz et les vapeurs se combinent dans des rapports simples en volume, leur volume étant toujours remené à la pression atmosphérique de 76 centimètres de mercure et à la température zéro. On a tiré de là cette conséquence, hypothétique il est vrai, mais qui facilite beaucoup le calcul des combinaisons, que des volumes égaux de toute espèce de gaz renferment les mêmes nombres d'atomes. Appliquant, par analogie, ce principe aux substances qui ne peuvent être gazéifiées, on a posé les bases d'une théorie *atomique*, où toutes les combinaisons résultent de la réunion de nombres déterminés d'atomes.

En général, les combinaisons sont *binaires*, c'est-à-dire qu'elles se forment par la réunion de deux espèces de matières simples. Ces combinaisons sont dites du *premier ordre;* elles engendrent, deux à deux, les combinaisons du *second ordre;* celles-ci, deux à deux, produisent les combinaisons du *troisième ordre*, et ainsi de suite.

Une combinaison binaire contient, le plus souvent, un atome de chacun des corps élémentaires; mais il y a beaucoup d'exemples de la réunion d'un atome A avec deux atomes B, ou d'un atome B avec deux atomes A; plus rarement, un atome A se joindra à trois ou à quatre atomes B. Les cas où deux atomes A sont combinés avec trois atomes B sont très rares; l'un des éléments joue presque toujours le rôle de l'unité, formant ainsi le *radical* du composé. Quand aux gaz, qui donnent des combinaisons également gazeuses, ils suivent les trois lois suivantes: 1° si les deux gaz se combinent sous des volumes égaux, leur produit, ramené à la même pression et à la même température, aura pour volume la somme des volumes primitifs; 2° si un volume du premier gaz se combine avec deux volumes du second gaz, le composé sera de deux volumes, en sorte qu'il y a condensation d'un volume; 3° enfin, si un volume de l'un se combine avec trois volumes de l'autre, le

composé sera de deux volumes, moitié de la somme des volumes primitifs.

CORPS SIMPLES NON MÉTALLIQUES.

5° Oxygène ; définition et cause de la combustion ; flamme.

L'oxygène libre est gazeux, incolore, inodore et sans saveur ; on n'a pu encore le liquéfier ni par refroidissement ni par compression ; sa densité est 1,1026, celle de l'air étant prise pour unité. On le rencontre dans l'air, dans presque toutes les matières végétales et animales, et dans la plupart des minéraux. Il est indispensable à la vie organique. C'est la cause active de la combustion, et un corps ne brûle que parce que ses éléments se combinent de diverses manières avec l'oxygène de l'air. On l'extrait communément de l'oxide noir de manganèse, en chauffant fortement cette poudre minérale dans une cornue, et recueillant le gaz qui s'en échappe sous une cloche pleine d'eau. Lorsqu'on plonge dans l'oxygène une allumette récemment éteinte, mais présentant encore quelques points en ignition, la combustion se ranime et produit bientôt une vive flamme, qui n'est qu'un produit gazeux porté à la température rouge par l'effet de la combinaison avec l'oxygène.

6° Hydrogène ; carbone ; phosphore.

L'*hydrogène* pur est gazeux, incolore, inodore et sans saveur ; sa densité est de beaucoup plus faible que celle de tous les autres gaz, n'étant que de 0,0688. Lorsqu'on y plonge un corps enflammé, il y a une petite détonnation, suivie d'une combustion par couches, produisant une flamme peu vive. Mais si l'on fait un mélange d'hydrogène et d'oxygène, et qu'on y mette le feu, la détonnation est violente, parce que la combinaison s'effectue à la fois sur tous les points. Dans le cas où l'on aurait mélangé un volume d'oxygène avec deux volumes d'hydrogène, le mélange disparaîtrait tout-à-fait par la détonnation, et il ne resterait que quelques gouttes d'eau ; de ce fait on tire la conséquence très importante que l'eau est une combinaison d'oxygène et d'hydrogène dans le rapport de 1 à 2 en volume. On répète cette expérience dans un *eudiomètre*, cylindre de verre à fortes parois, dont la base ouverte repose sur l'eau ou le mercure, et dont le sommet est hermétiquement bouché au moyen d'une tige métallique servant à faire passer une étincelle électrique à travers le mélange gazeux.

On se procure de l'hydrogène en mettant dans un vase (dont le col est armé d'un tube recourbé, qui vient plonger sous une éprouvette pleine d'eau ou de mercure) du zinc, de l'acide sulfurique et de l'eau. Le zinc s'empare de l'oxygène de l'eau, et l'oxide de zinc qui en résulte, s'unit à l'acide sulfurique pour former du

sulfate de zinc; alors l'hydrogène de l'eau décomposée se dégage sous forme gazeuse. Au lieu de zinc, on peut employer du fer.

On a trouvé depuis peu qu'un jet de gaz hydrogène s'enflamme dans l'air au contact du platine très poreux. Cette propriété appartient à des degrés divers aux autres gaz mis en contact avec les métaux très divisés.

Le *carbone* est le nom que les chimistes modernes ont donné au charbon pur. Le charbon est le résidu ordinaire de la combustion des substances végétales et animales; mais alors il renferme quelques centièmes de matières terreuses, que l'on obtient sons forme de *cendres*, après la combustion complète du carbone. Ainsi obtenu, le charbon est noir, très poreux, capable d'absorber le gaz en le condensant dans ses pores, de purifier l'eau corrompue, et de clarifier les liquides, en enlevant, soit leurs couleurs, soit les matières pulvérulentes qui s'y trouvent suspendues.

Le charbon se rencontre dans les couches superficielles du globe à l'état de houille plus ou moins pure. Mais ce qu'il y a de très remarquable, c'est que la plus dure des substances minérales, le diamant n'est que du carbone cristallisé; en effet, on est parvenu à brûler cette pierre précieuse, et l'on a obtenu, comme avec le charbon ordinaire, de l'acide carbonique, gaz formé de carbone et d'oxygène.

Le *phosphore*, découvert par Brandt en 1669, fut d'abord extrait de l'urine, puis des os. Il est solide, très flexible à l'état de pureté, mou, odorant comme l'ail et l'arsenic, transparent, translucide ou noir, suivant qu'il se solidifie lentement ou subitement dans l'eau. Mais la propriété la plus caractéristique du phosphore est de répandre une lueur lorsqu'il est exposé à l'air, où il se consume lentement. Chauffé, ou simplement frotté, il s'allume et brûle en répandant une vive lueur, obscurcie bientôt par une vapeur blanche et épaisse, qui est de l'acide phosphorique. Pour l'extraire des os, où il se trouve à l'état de phosphate de chaux, on réduit les os en une poudre que l'on traite par l'acide phosphorique; le phosphate acide de chaux qui en résulte est fortement calciné avec de la poudre de charbon dans une corne de grès; la vapeur du phosphore, appartenant à l'excès d'acide phosphorique, se dégage et vient se condenser sous l'eau. Cette opération est difficile et exige beaucoup de précautions que l'on ne peut détailler ici.

7° Soufre; chlore; azote.

Tout le monde connait le soufre; solide, jaune, fragile, fusible à 108 degrés. Entre 110 et 140 degrés, il est très liquide; mais il commence à s'épaissir vers 160 degrés, et ne coule plus du tout entre 220 et 250 degrés; sa couleur qui est continuellement foncée, est alors d'un brun-rouge; enfin de 250 degrés jusqu'au terme

de l'ébullition, il se liquéfie un peu. Si alors on le refroidit subitement, en le coulant dans l'eau froide, il reste mou, tandis qu'il devient cassant si on le verse dans l'eau à son état liquide. Le soufre, en brûlant dans l'air, engendre le gaz acide sulfureux. On l'extrait des terrains volcaniques, par distillation. Ses usages sont nombreux; il sert à faire des allumettes, à blanchir la soie et la laine; il entre dans la composition de la poudre à canon; en médecine, on l'emploie contre les maladies de la peau. On en consomme beaucoup pour la fabrication de l'acide sulfurique.

Le *chlore* a été découvert en 1774 par Schéele; on l'avait pris pour un *acide muriatique oxigéné*. Son nom actuel lui vient de sa couleur jaune-verdâtre; il est gazeux, d'une densité près de deux fois et demi plus grande que celle de l'air; son odeur et sa saveur sont extrêmement fortes et piquantes. En dissolution dans l'eau, il sert à blanchir les tissus; car il détruit les matières colorantes dont il enlève l'hydrogène. Son affinité pour ce corps est telle, que le mélange de ces deux gaz détonne sous l'action des rayons solaires. Quelques métaux réduits en poudre, s'enflamment instantanément dans le chlore gazeux. Sa préparation est la suivante : on chauffe légèrement un mélange d'oxide noir de manganèse et d'acide muriatique, qui est un composé de chlore et d'hydrogène. Cet hydrogène s'empare de l'oxigène pour former de l'eau, et le chlore se combine avec le manganèse; mais la proportion du chlore étant trop forte pour produire le chlorure de manganèse, une partie se dégage sous forme gazeuse. Dans cet état, il provoque la toux; mais, répandu dans l'air en petite quantité, il le purifie en détruisant les miasmes; sa solution dans l'eau enlève aux corps en putréfaction leur mauvaise odeur.

L'*azote* se distingue par des propriétés presque toutes négatives. En effet, ce gaz est incolore, sans saveur ni odeur; il ne réagit directement sur aucun corps. Cependant, il est très-répandu dans la nature, il forme les quatre cinquièmes de l'air atmosphérique. Sa présence dans presque toutes les matières animales, et son absence de la plupart des matières végétales, peut servir à caractériser ces deux classes de matières organiques. Pour l'obtenir pur, on absorbe l'oxigène de l'air par la combustion du phosphore, et on lave le résidu gazeux avec de l'eau alcaline. L'azote ainsi séparé de l'oxigène, est impropre à la respiration, et c'est de là que lui vient son nom.

8° Air atmosphérique.

Nous avons parlé ailleurs des propriétés physiques de l'air; il nous reste à faire connaître ses caractères chimiques. L'air atmosphérique contient essentiellement de l'oxigène et de l'azote; on y rencontre habituellement un peu de vapeur d'eau et de gaz acide carbonique; et accidentellement, des traces de certaines exhalai-

sons. Voici de quelle manière on peut séparer ces substances étrangères et faire l'analyse de l'*air pur*, formé exclusivement d'oxigène et d'azote.

On absorbe l'acide carbonique de l'air au moyen d'eau de chaux; puis, la vapeur aqueuse, à l'aide d'une substance avide d'eau, comme la potasse. Ensuite, on introduit dans un *eudiomètre* AC, fig. 166, reposant sur l'eau, ou mieux sur le mercure, cinq mesures d'air, puis trois mesures d'hydrogène, en sorte que le mélange est de huit mesures. On fait passer une étincelle électrique de A en B, d'où résulte autant d'eau que peut en fournir l'oxigène de l'air, puisqu'on a eu soin d'employer un excès d'hydrogène. Par la liquéfaction subite de la vapeur d'eau ainsi formée, le mélange gazeux se trouve réduit à cinq mesures. Des trois mesures disparues, l'une était d'oxigène et les deux autres d'hydrogène, puisque tel est le rapport de ces gaz pour former de l'eau. Ainsi, sur cinq mesures d'air passées dans l'eudiomètre, il y en avait une d'oxigène et quatre d'azote.

On démontre encore que l'air est formé de 4 volumes d'azote sur un volume d'oxigène, en renfermant 5 volumes d'air avec un bâton de phosphore dans un tube de verre communiquant avec un réservoir de mercure; peu à peu le phosphore absorbe l'oxigène, et il reste 4 volumes d'azote.

En France, et à Paris en particulier, on trouve, pour la moyenne annuelle, un litre de vapeur aqueuse (supposée à la température zéro et à la pression de 76 centimètres), dans 94 litres d'air. Quant à l'acide carbonique, on en trouve environ un litre dans 2500 litres d'air. Nous verrons à l'article de l'*eau*, que l'air se dissout dans ce liquide, mais que l'oxigène et l'azote ne s'y trouvent pas en même proportion que dans l'atmosphère.

COMPOSÉS COMBUSTIBLES NON MÉTALLIQUES.

9° Hydrogène proto et bicarboné; hydrogène phosphoré.

On obtient l'hydrogène bicarboné en soumettant à l'action d'une douce chaleur une partie d'alcool et quatre parties d'acide sulfurique concentré; l'alcool pouvant être représenté par de l'hydrogène bicarboné et de l'eau, l'acide sulfurique s'empare d'abord de l'eau et met l'hydrogène bicarboné en liberté; mais bientôt il se forme de l'acide sulfureux et de l'acide carbonique, et pour que l'hydrogène bicarboné ne se trouve pas souillé par ces gaz, on absorbe ceux-ci par l'eau de chaux. Il se forme un dépôt de charbon dans la cornue où s'opère cette réaction.

Pour analyser l'hydrogène bicarboné on met un volume de ce gaz avec trois volumes d'oxigène dans l'eudiomètre; et, après le passage de l'étincelle électrique, il reste deux volumes d'acide car-

bonique, lesquels sont formés de deux volumes d'oxigène et de deux volumes de carbone, (voir *acide carbonique*). Il y avait de plus un volume d'oxigène qui s'est combiné avec deux volumes d'hydrogène pour produire de l'eau. De là il résulte que l'hydrogène bicarboné est composé de deux volumes d'oxigène et de deux volumes de carbone, condensés en un seul volume.

Exposé à une haute température, l'hydrogène bicarboné laisse déposer presque tout son carbone. Mélangé avec de l'oxigène en excès, il détonne fortement si on l'enflamme, comme dans l'analyse ci-dessus. Le soufre le décompose à une faible chaleur, et produit de l'hydrogène sulfuré. Si l'on plonge une bougie allumée dans un mélange de deux volumes de chlore et un volume d'hydrogène bicarboné, ou si on expose ce mélange aux rayons solaires, il s'enflamme et détonne. Mais lorsque le mélange est placé dans l'obscurité, il se forme de l'hydro-carbure de chlore. Tout le monde sait que l'hydrogène bicarboné s'emploie pour l'éclairage; on l'extrait alors de la houille ou de l'huile par la distillation, mais il se trouve mélangé d'autres produits gazeux, et on est obligé de le purifier plus ou moins avec la chaux caustique. Il avait reçu le nom de *gaz oléfiant*.

L'*Hydrogène protocarboné*, ou gaz des marais, est formé au fond des eaux stagnantes, par la décomposition des matières organiques. On le recueille au moment où l'on agite la vase, en plaçant à la surface de l'eau des flacons renversés à large orifice. Il contient alors un peu de gaz carbonique, d'oxigène et d'azote. A l'état de pureté, et en faisant l'analyse comme pour le précédent gaz, on trouve qu'un volume d'hydrogène protocarboné contient deux volumes d'hydrogène et un volume de carbone, condensés en un seul volume. Il brûle dans l'air avec une flamme jaunâtre.

Il existe un *hydrogène phosphoré*, gazeux, qui s'enflamme spontanément dans l'air, en donnant lieu à des couronnes de vapeur blanche. On l'obtient en chauffant dans une fiole 10 parties de chaux en pâte avec 1 partie de phosphore découpé en petits morceaux; ou mieux en introduisant sous une éprouvette pleine de mercure, d'abord de l'eau distillée, puis du phosphure de chaux en poudre dans un morceau de papier. Dans l'un et l'autre cas, l'hydrogène phosphoré est mêlé de gaz hydrogène en quantités variables.

La composition de l'hydrogène phosphoré a soulevé bien des discussions, que nous ne rappelerons pas ici. La seule chose que nous ajouterons, c'est que ce gaz se produit selon toute apparence dans les lieux marécageux et les cimetières humides, en donnant lieu aux feux follets; car le phosphore se rencontre dans les os et surtout dans la matière cérébrale.

Il existe aussi un hydrogène phosphoré qui ne s'enflamme pas spontanément à l'air.

DES OXIDES ET ACIDES NON MÉTALLIQUES.

10° De l'eau.

Nous avons déjà fait connaître les propriétés physiques de l'eau. Dans la nature, on ne la trouve jamais à l'état de pureté parfaite. Sans compter les matières qu'elle dissout, ou qui y demeurent en suspension, l'eau contient toujours une certaine quantité d'air, environ le 25e de son volume à 10 degrés de température et sous la pression ordinaire. On l'expulse, soit en faisant bouillir l'eau, soit en la mettant sous le récipient de la machine pneumatique. La composition de cet air n'est pas la même que dans l'atmosphère; ici l'oxigène forme le cinquième du volume, mais dans l'eau il y entre pour le tiers. Pour purifier l'eau, on la distille dans un appareil nommé *alambic*.

L'eau est formée de 889 parties d'oxigène sur 111 d'hydrogène en poids, ou d'un volume d'oxigène et deux volumes d'hydrogène. On peut l'analyser au moyen du fer. Pour cela, on introduit dans un tube de porcelaine de la limaille ou de la tournure de fer; on chauffe au rouge, et on fait passer à travers le tube un poids déterminé d'eau réduite en vapeur: le fer s'empare de presque tout l'oxigène de l'eau, et celle qui échappe vient se liquéfier dans un alambic; quant à l'hydrogène, il arrive sous un grand flacon rempli d'eau. On pèse l'eau et le fer avant l'opération, on pèse ensuite tous les produits, ce qui conduit au résultat donné ci-dessus.

On peut encore faire l'analyse de l'eau par l'électricité voltaïque. A cet effet, on amène dans une cuvette pleine d'eau, les bouts de deux fils de platine dont les autres bouts communiquent avec les extrémités d'une pile voltaïque; et l'on renverse sur les deux bouts, ainsi plongés dans l'eau et assez rapprochés l'un de l'autre, deux éprouvettes de verre pleines d'eau. Au moment où le courant s'établit, et pendant toute sa durée, on voit apparaître dans l'eau, et tout autour des fils de platine, de petites bulles de gaz, qui en s'élevant viennent remplacer l'eau des éprouvettes. Celle qui reçoit les bulles parties du pôle négatif de la pile se remplit deux fois plus vite que l'autre, qui reçoit les bulles dégagées du pôle positif; le premier gaz est de l'hydrogène, et le second de l'oxigène, dans le rapport de deux volumes à un; ces gaz viennent évidemment de l'eau, vu que les fils de platine demeurent intacts, ainsi que les parois de la cuvette.

Pour opérer la recomposition de l'eau, on fait arriver dans un ballon des courants d'oxigène et d'hydrogène; on provoque la combustion du mélange, et l'on obtient de la vapeur d'eau, qui se condense sur les parois du vase. D'après les volumes des deux

gaz employés, on peut reconnaître que l'eau résulte de deux volumes d'hydrogène et d'un volume d'oxigène. On arrive au même résultat, si l'on brûle dans l'eudiomètre un mélange d'oxigène et d'hydrogène.

11° De l'oxide de carbone; de l'acide carbonique; de l'oxide de phosphore, et des acides hypophosphorique et phosphorique.

L'*oxide de carbone* est un gaz incolore, insipide, impropre à la respiration. Pour le préparer, on fait un mélange de fer en limaille et de poudre de carbonate de baryte, à parties égales. On l'introduit dans une cornue de grès, de manière à la remplir entièrement, et l'on y adapte un tube propre à recueillir le gaz. A l'aide de la chaleur, le fer s'empare d'une portion de l'oxigène de l'acide carbonique pour se combiner avec la baryte, et il se dégage de l'oxide de carbone. Un autre procédé consiste à chauffer ensemble un mélange de parties égales d'oxide de zinc et de charbon calciné; le zinc perd de son oxigène, qui se porte sur le charbon. Dans l'un et l'autre cas, il faut faire passer le gaz à travers une dissolution de potasse, pour enlever l'acide carbonique qu'il renfermerait. L'analyse eudiométrique donne un volume de carbone et un demi-volume d'oxigène condensés en un seul, pour la composition de l'oxide de carbone.

L'*acide carbonique* est gazeux, incolore, d'une saveur un peu aigre, et d'une odeur légèrement piquante. Il rougit faiblement la teinture de tournesol; il éteint les corps en combustion, et asphyxie promptement les êtres animés. Pour se le procurer, on met de la chaux carbonatée dans l'eau, on y verse un acide quelconque, qui s'empare de la chaux et met l'acide carbonique en liberté. L'emploi de l'acide sulfurique a l'inconvénient de procurer en premier lieu un dégagement considérable de gaz carbonique qui s'arrête bientôt, parce que le sulfate de chaux ainsi produit s'oppose par son insolubilité à la décomposition du carbonate de chaux qu'il recouvre. Mieux vaut donc employer de l'acide muriatique, qui forme avec la chaux un sel très soluble; mais alors il faut prendre de petits morceaux de marbre, pour que la cohésion ralentisse l'action trop subite de cet acide sur la chaux.

L'acide carbonique contient un volume d'oxigène égal au sien, ce dont on peut s'assurer en faisant passer et repasser un volume déterminé d'oxigène, d'une cloche dans une autre, à travers un tube de porcelaine, rempli de charbons incandescents bien purs. Ensuite, pour abréger les explications, on considère la quantité de carbone que renferme un volume d'acide carbonique comme formant un égal volume de *vapeur de carbone*, qui réellement ne peut subsister qu'à l'état de combinaison. Ainsi cet acide serait formé d'un volume d'oxigène et d'un volume de carbone condensés en un

seul. Or, la densité de l'acide carbonique étant 1,52, il faudra en retrancher la densité 1,10 de l'oxigène, pour avoir la densité de la vapeur de carbone, savoir 0,42.

L'acide carbonique est décomposé par le potassium qui s'empare de tout son oxigène, et laisse déposer le carbone. On le trouve dans quelques grottes en assez grande quantité pour produire l'asphyxie. Il se dissout dans l'eau des sources et se dégage à l'air libre. Par compression, on en dissout une grande proportion dans l'eau, que l'on désigne alors sous le nom d'*eau de Seltz*, aujourd'hui d'un fréquent usage comme boisson. Enfin, l'acide carbonique se trouve combiné avec un grand nombre de matières formant des couches pierreuses très puissantes.

Le phosphore s'unit à l'oxigène en plusieurs proportions. Et d'abord, il existe un *oxide de phosphore*, que l'on obtient en faisant passer un courant d'oxigène à travers du phosphore fondu sous l'eau chaude. Il est rouge, insipide, inodore, insoluble dans l'eau et l'alcool; il ne répand aucune lueur dans l'obscurité. Il brûle et même détonne avec le chlore, l'acide nitrique, le chlorate de potasse et le salpêtre.

L'*acide phosphorique* est solide, très sapide et sans couleur; il se ramollit, puis se volatilise par la chaleur; il a une grande affinité pour l'eau. Le carbone le décompose à une température élevée, et il en résulte du gaz acide carbonique ou du gaz oxide de carbone et du phosphore. Le potassium et le sodium, après l'avoir décomposé, se combinent à l'état d'oxide avec le phosphore. L'acide phosphorique peut s'obtenir, soit en brûlant du phosphore dans l'air, soit en décomposant le phosphate d'ammoniaque par le feu, ou le phosphate de baryte par l'acide nitrique. Il est formé de 4 parties de phosphore sur 5 parties d'oxigène.

L'*acide hypophosphorique* se forme par l'action lente de l'air humide sur le phosphore; il est visqueux, incolore, très sapide, et se dissout dans l'eau. Lorsqu'on le chauffe, il décompose l'eau et se transforme en acide phosphorique et en hydrogène phosphoré non inflammable. M. Dulong le regarde comme formé d'acide phosphorique et d'un acide phosphoreux, combinés à la manière d'un sel, d'où le nom d'acide *phosphatique* qu'il lui a donné.

12° Des acides sulfureux et sulfurique.

L'*acide sulfureux* est gazeux, sans couleur, mais d'une saveur forte et d'une odeur très piquante, qui excite la toux, resserre la poitrine et suffoque. Le soufre et le carbone le décomposent à la chaleur rouge. Le potassium et le sodium réagissent aussi sur ce gaz, et produisent un sulfure et un sulfate, ou du soufre et du sulfate. Le gaz hydrogène sulfuré et l'acide sulfureux à l'état humide se décomposent subitement, en formant de l'eau et un dépôt de soufre.

Il se produit par la combustion du soufre dans l'air ; mais pour l'avoir pur, on fait bouillir dans une cornue de l'acide sulfurique sur du mercure ; une partie de l'acide fournit son oxigène pour oxider le mercure, et il reste de l'acide sulfureux qui se dégage. Celui-ci est pur quand il se dissout sans résidu dans l'eau. Un volume d'acide sulfureux contient un égal volume d'oxigène ; et ; comme sa densité est 2,234, si l'on en retranche celle de l'oxigène 1,1026, il restera 1,1314 pour la densité de la vapeur du soufre, telle qu'elle se trouve en combinaison. On se sert de cet acide pour blanchir la soie et le chanvre ; on l'emploie aussi contre les maladies de la peau.

L'acide sulfurique est liquide, incolore, inodore, d'une consistance oléagineuse ; il exerce une très forte action sur la teinture de tournesol et sur toutes les matières végétales et animales. Il contient habituellement de l'eau ; le plus concentré en renferme le cinquième de son poids, et a une densité de 1,842. Il se congèle et cristallise à -20 degrés. Soumis à une chaleur progressive, il se vaporise ; mais il se décompose lorsqu'il éprouve l'action subite d'une haute température. Il absorbe promptement les vapeurs aqueuses et devient jaunâtre ; on peut ensuite le concentrer de nouveau en le chauffant jusqu'au point où il émet des vapeurs blanches, signe de son ébulition prochaine.

L'hydrogène décompose l'acide sulfurique à une haute température, et il en résulte de l'acide sulfureux ou du soufre, et de l'eau. Mis en contact avec le carbone à la température de 150 degrés, on obtient de l'acide carbonique et du gaz acide sulfureux. Si la température était très élevée, et le carbone en excès, on obtiendrait du soufre et du gaz oxide de carbone. A la température rouge, il se formerait en outre de l'acide carbonique et de l'hydrogène carboné.

Presque tous les métaux, mis en contact avec l'acide sulfurique à une température un peu élevée, se transforment en oxides, en décomposant l'eau de l'acide, et alors il se dégage de l'hydrogène ; ou bien, ces métaux s'emparent en outre d'une partie de l'oxigène de l'acide, qui alors se dégage sous forme d'acide sulfureux, tandisque une autre portion d'acide sulfurique se combine avec l'oxide du métal pour former un sulfate.

L'acide sulfurique versé et agité dans l'eau, produit un grand dégagement de chaleur. L'acide sulfurique et la neige, mêlés en diverses proportions, peuvent produire une élévation ou un abaissement de température, suivant que l'acide ou la neige sera en excès.

Pour former l'acide sulfurique dans les laboratoires, on fait arriver dans un grand ballon plein d'oxigène humide, deux courants, l'un de deutoxide d'azote, l'autre d'acide sulfureux. En présence de l'eau, l'acide sulfurique se forme instantanément, et se dépose sous

forme d'aiguilles sur les parois du vase, en combinaison avec l'eau, et de l'acide hyponitrique. Celui-ci redevient libre et apparaît sous forme de vapeurs rutilantes, si l'on verse de l'eau sur cette cristallisation. La présence de l'acide hyponitrique transforme une nouvelle quantité d'acide sulfureux en acide sulfurique, et ainsi de suite; de sorte qu'avec une petite quantité d'acide hyponitrique, et suffisamment d'oxigène, on peut transformer tout l'acide sulfureux en acide sulfurique.

La préparation de cet acide dans les fabriques est un peu différente. On chauffe à l'entrée d'une grande chambre de plomb dont le sol est couvert d'eau, un mélange de 8 parties de soufre et de 1 partie de salpêtre ou nitrate de potasse. L'acide nitrique de ce sel abandonne une portion de son oxigène à du soufre, et l'on obtient ainsi du sulfate de potasse, corps solide et fixe, et du deutoxide d'azote qui se dégage et passe à l'état d'acide hyponitrique en se combinant avec l'oxigène de l'air. Il se forme en outre beaucoup de gaz acide sulfureux par la combinaison de l'oxigène de l'air avec le soufre, qui est en excès. Alors toutes les conditions pour former de l'acide sulfurique sont remplies, puisque l'acide sulfureux, l'acide hyponitrique, l'eau et l'air sont en présence. L'acide sulfurique doit être ensuite chauffé dans des cornues de verre, ou mieux de platine, pour chasser l'acide sulfureux, l'acide nitrique et l'excès d'eau qu'il renferme. Il reste un peu de sulfate de plomb et les matières salines que l'eau tenait en dissolution; mais ces substances étrangères ne gênent nullement les opérations des arts.

En faisant passer la vapeur de l'acide sulfurique dans un tube de porcelaine incandescent, elle se transforme en gaz acide sulfureux et en oxigène; on a ainsi trouvé qu'il contient deux parties de soufre sur trois parties d'oxigène, en poids.

On fabrique à Nordhausen de l'acide sulfurique, en calcinant le sulfate de fer sec. Cet acide contient moins d'eau que l'acide le plus concentré que l'on obtient comme il vient d'être dit. On en extrait, par distillation, des vapeurs d'acide sulfurique anhydre, qui se condensent dans un tube environné de glace. La masse blanche ainsi formée est fusible à 25 degrés, et en un liquide dont la densité est 1,57. Remis dans l'eau, il n'est plus que de l'acide sulfurique ordinaire.

13° Des oxides d'azote, et des acides azoteux et azotique.

L'azote forme avec l'oxigène 5 combinaisons, dont 2 oxides et 3 acides, savoir :

	Vol. d'azote.	Vol. d'oxigène.
Le protoxide d'azote, composé de	2	1
Le deutoxide d'azote,	2	2
L'acide nitreux ou azoteux,	2	3
L'acide hyponitrique ou hypoazotique,	2	4
L'acide nitrique ou azotique,	2	5

Le *protoxide d'azote* est un gaz incolore et inodore. Il entretient la combustion mieux que l'air ; il peut même servir à la respiration durant quelque temps. A une haute température, il se transforme en acide hyponitrique et en azote. On l'obtient en chauffant convenablement le nitrate d'ammoniaque desséché, dans une très petite cornue. On produit alors de la vapeur aqueuse et de l'oxide d'azote. L'hydrogène de l'ammoniaque s'est donc emparé d'une partie de l'oxigène de l'acide nitrique, et le reste de cet oxigène a fait passer l'azote de l'acide et de l'ammoniaque à l'état de protoxide.

Le *deutoxide d'azote* est un gaz sans couleur, qui éteint les corps en combustion et asphyxie les animaux. Son caractère distinctif est de se combiner subitement avec l'oxigène de l'air, et de donner lieu à de l'acide hyponitrique qui est rutilant. Pour le préparer, on verse dans un flacon à deux tubulures de l'eau et de l'acide nitrique sur de la tournure de cuivre. L'acide se partage en deux parties ; l'une cède une portion de son oxigène au cuivre, et se dégage en deutoxide d'azote ; l'autre se combine avec l'oxide de cuivre pour former un nitrate.

L'*acide nitreux* ou *azoteux* ne peut pas s'obtenir isolément. Lorsqu'on fait passer dans une éprouvette 4 volumes de deutoxide d'azote, un peu d'eau alcaline et 1 volume d'oxigène, les 5 volumes gazeux se trouvent absorbés et se combinent avec l'alcali pour former un nitrite, dont l'acide résulte nécessairement des 2 volumes d'azote du deutoxide et des 3 volumes d'oxigène, dont 2 venant de l'oxide. Quand on s'empare de l'alcali, cet acide se transforme en deutoxide d'azote, et en acide hyponitrique ou nitrique.

L'*acide hyponitrique* est liquide, d'un jaune orangé quand la température est de 15 à 28 degrés, d'un jaune fauve à zéro, presque incolore à —10 degrés, et tout-à-fait incolore à —20 degrés. Il bout à 28 degrés, et se transforme en un gaz rutilant. C'est cet acide qui se produit tout à coup par le mélange du deutoxide d'azote avec l'air. Quand l'air est sec, il ne fait que le colorer, mais il s'en empare et passe à l'état d'acide nitrique par la présence de l'eau, dans laquelle il se dissout. Versé et agité de suite dans une grande quantité d'eau, l'acide hyponitrique est décomposé instantanément ; il se forme alors beaucoup de deutoxide d'azote et d'acide nitrique qui devient limpide ; mais, si l'on verse l'eau peu à peu, l'acide se colore en vert, puis en jaune. Il en est de même lorsqu'on fait passer du deutoxide d'azote à travers l'acide nitrique plus ou moins concentré.

On obtient l'acide hyponitrique en distillant du nitrate de plomb sec et neutre dans une cornue de verre ; et on le recueille en faisant plonger le col de la cornue dans un récipient entouré d'un mélange réfrigérant. L'acide nitrique du nitrate se trouve

décomposé en acide hyponitrique qui se condense, et en oxigène qui s'échappe.

L'*acide nitrique* ou *azotique*, est liquide, incolore et très corrosif. On ne peut l'obtenir sans eau; le plus concentré en contient le septième de son poids, et sa densité est de 1,51. Il bout à 86 degrés; à une chaleur plus forte, il se décompose et donne naissance à de l'acide hyponitrique et à de l'oxigène. A 50 degrés sous zéro, il se prend en une masse de la consistance du beurre. La lumière agit sur cet acide comme la chaleur, mais sa décomposition n'est pas totale, et il se trouve alors coloré en jaune ou en vert, suivant la quantité plus ou moins grande d'acide hyponitrique formée sous cette influence.

L'acide nitrique est décomposé par tous les corps combustibles non métalliques, excepté par l'azote, le chlore et l'iode. Il attaque tous les métaux, excepté une dizaine, parmi lesquels figurent l'or et le platine. Il oxide les métaux, et l'on obtient en outre du gaz oxide d'azote ou même de l'azote. Quelquefois les oxides, ainsi formés, s'unissent à une portion de l'acide nitrique. Mêlé avec l'acide sulfurique concentré, celui-ci lui enlève son eau, et l'acide nitrique se dégage transformé en deutoxide d'azote.

On obtient l'acide nitrique en traitant le nitrate de potasse, ou salpêtre, par l'acide sulfurique à une température élevée. L'acide sulfurique s'empare de la potasse, et fait sortir l'acide nitrique en vapeurs, que l'on reçoit dans un récipient, où elles se condensent. Il y a d'abord des vapeurs rutilantes, puis des vapeurs blanches d'acide nitrique, puis enfin des vapeurs rutilantes. L'acide ainsi obtenu tient en dissolution de l'acide hyponitrique, qui le colore en jaune, un peu de chlore et même de l'acide sulfurique. Pour le purifier, on le distille de nouveau; les premières portions qui passent sont l'acide hyponitrique et le chlore : on les retranche vite, et l'on continue la distillation; mais on arrête l'opération avant que l'acide sulfurique ne commence à s'évaporer lui-même.

L'acide nitrique, anciennement dit *eau forte*, s'emploie dans un grand nombre de circonstances; mais son usage dans les arts est moins fréquent que celui de l'acide sulfurique.

14° Des acides chlorohydrique; fluorhydrique; sulfhydrique.

L'*acide chlorohydrique*, aussi nommé *hydrochlorique*, et anciennement *muriatique*, est gazeux, incolore, d'une odeur insupportable et dangereuse, d'une densité 1,247. L'eau a tant d'affinité pour cet acide, qu'il en absorbe 464 fois son volume. Mêlé avec l'acide nitrique, il constitue l'*eau régale*, ainsi nommée parce qu'elle peut dissoudre l'or, regardé par les anciens chimistes comme le roi des métaux. On obtient l'acide hydrochlorique en

versant de l'acide sulfurique sur le chlorure de sodium, ou sel marin; il en résulte du gaz acide hydrochlorique qui se dégage, et du sulfate de soude. Un volume de cet acide est formé d'un demi volume d'hydrogène et d'un demi volume de chlore.

L'acide fluorhydrique, ou simplement *fluorique*, est liquide et incolore; son odeur est très piquante, sa saveur est insupportable. C'est le plus corrosif de tous les corps : il détruit le tissu animal avec une énergie extrême, et fait périr infailliblement l'animal sur lequel on en verse quelques gouttes. On profite de la faculté qu'il a de ronger le verre, pour graver au moyen de sa vapeur. Il faut employer des vases d'argent pour le conserver pur, et des vases de plomb lorsqu'il est étendu d'eau. On l'obtient en traitant dans une cornue de plomb et à une température voisine de celle qui est nécessaire pour fondre ce métal, du fluate de chaux par l'acide sulfurique concentré; celui-ci s'empare de la chaux, tandis que l'acide fluorique se dégage sous forme de vapeurs que l'on fait condenser par refroidissement.

L'acide sulfhydrique, ou *hydrosulfurique*, vulgairement *hydrogène sulfuré*, est un gaz sans couleur, d'une odeur et d'une saveur insupportables. Une atmosphère qui en contient seulement un ou deux millièmes, fait périr promptement un petit oiseau. Le chlore et l'iode, à raison de leur grande affinité pour l'hydrogène, en opèrent la décomposition à froid. Pour l'obtenir, on met dans un matras du sulfure d'antimoine et cinq ou six fois son poids d'acide hydrochlorique concentré. On chauffe légèrement; il se dégage de l'acide hydrosulfurique, et il se forme un hydrochlorate d'antimoine. L'acide hydrosulfurique contient un volume d'hydrogène égal au sien; et comme sa densité est 1,1912, il suffit de retrancher celle de l'hydrogène 0,0688 pour avoir celle de la vapeur de soufre qui sera 1,1224.

DES MÉTAUX.

15° Étude générale. Classification des métaux; leurs propriétés physiques; action qu'exercent sur eux la chaleur, l'électricité, le fluide magnétique, l'oxigène, l'air, les corps combustibles (carbone, phosphore, soufre, chlore), l'eau, les acides sulfurique, azotique, chlorohydrique.

Les corps dont nous venons de parler appartiennent à la classe des *métalloïdes*, et ceux qu'il nous reste à faire connaître sont les *métaux* proprement dits. Les métalloïdes sont au nombre de treize, savoir : l'*oxigène*, l'*hydrogène*, le *bore*, le *silicium*, le *carbone*, le *phosphore*, le *soufre*, le *sélénium*, le *fluor*, le *chlore*, le *brôme*, l'*iode* et l'*azote*.

Quant aux métaux, on peut les diviser en six sections, rangées par ordre d'affinité pour l'oxigène, ainsi qu'il suit :

1re SECTION. Métaux qui peuvent absorber le gaz oxigène à la

température la plus élevée et décomposer subitement l'eau à la température ordinaire en s'emparant de son oxigène et en dégageant son hydrogène avec une vive effervescence. On en compte six : le *potassium*, le *sodium*, le *lithium*, le *barium*, le *strontium* et le *calcium*. On peut les appeler *métaux alcalins*, parceque leurs oxides sont connus sous le nom d'*alcalis*.

2me SECTION. Métaux qui, comme les précédents peuvent absorber le gaz oxigène à la température la plus élevée; mais qui ne décomposent l'eau qu'autant qu'elle est bouillante, ou même que de 100 ou 200 degrés. Ce sont le *magnésium*, le *glucinium*, l'*yttrium*, et l'*aluminium*. Leurs oxides étant connus sous le nom de *terres*, on peut les appeler *métaux terreux*.

3me SECTION. Métaux qui, comme les précédents, peuvent absorber l'oxigène à la température la plus élevée; mais qui ne décomposent l'eau qu'au degré de la chaleur rouge. Il y en a sept, le *manganèse*, le *zinc*, le *fer*, l'*étain*, le *cadmium*, le *cobalt*, et le *nickel*.

4me SECTION. Métaux qui, comme les précédents, peuvent absorber le gaz oxigène à la température la plus élevée, mais qui ne décomposent l'eau ni à chaud, ni à froid. Les voici au nombre de quatorze : l'*arsenic*, le *molybdène*, le *chrôme*, le *vanadium*, le *tungstène*, le *colombium*, l'*antimoine*, le *titane*, le *tellure*, l'*urane*, le *cérium*, le *bismuth*, le *cuivre* et le *plomb*. Les huit premiers sont acidifiables.

5e SECTION. Métaux qui ne peuvent absorber le gaz oxigène qu'à un certain degré de chaleur et qui ne peuvent point opérer la décomposition de l'eau. Ce sont le *mercure* et l'*osmium*.

6e SECTION. Métaux qui peuvent absorber le gaz oxigène et ne peuvent décomposer l'eau à aucune température, et dont les oxides se réduisent au-dessous de la chaleur rouge. Il y en a six, l'*argent*, le *palladium*, le *rhodium*, le *platine*, l'*or* et l'*iridium*.

Tous les métaux sont solides aux températures ordinaires, excepté le mercure qui reste liquide jusqu'à 40 degrés sous zéro. L'or est jaune, le cuivre et le titane sont rouges; tous les autres sont d'un blanc, tirant quelquefois sur le bleu ou le gris. Ils ont tous ce qu'on nomme l'éclat métallique, et tous sont opaques. Leurs densités varient beaucoup; celle du platine est la plus grande et s'élève à 21; puis viennent celles de l'or 19, 26, du mercure 13, 57, du plomb 11, 35, de l'argent 10, 47, du cuivre 8, 9, du fer 7, 8, de l'étain 7, 3, de l'arsenic 6; le sodium et le potassium sont les seuls qui pèsent moins que l'eau, savoir 0,97 et 0,87. Parmi les métaux, 17 sont ductiles et 16 cassants. C'est le fer qui offre la plus grande force de cohésion; puis viennent le cuivre, le platine, l'argent et l'or. Le fer est aussi le plus dur, le plomb se raye à

l'ongle, le potassium et le sodium sont tout-à-fait mous. Les plus durs sont aussi les plus élastiques et les plus sonores. Le fer, le plomb, le cuivre et l'étain ont une odeur et une saveur désagréables qui se développe surtout par le frottement.

Quant à la fusibilité des métaux, elle varie beaucoup de l'un à l'autre. Ainsi le point de fusion est à 40 degrés sous zéro pour le mercure; celui du potassium, à 58 au-dessus de zéro; du sodium, à 90; de l'étain, à 210; du bismuth, à 256; du plomb, à 260; du zinc, à 370. D'autres ne se fondent qu'à une chaleur rouge plus ou moins intense, l'argent d'abord, puis le cuivre, puis l'or, puis le fer. Les autres, et particulièrement le platine, ne peuvent se fondre qu'au chalumeau d'oxigène et d'hydrogène. Nous avons déjà dit que les métaux sont en général de bons conducteurs pour l'électricité. Le fer, le nickel et le cobalt sont les seuls attirables à l'aimant. Nous avons aussi rapporté cette propriété singulière qu'ont les métaux très divisés de provoquer la combinaison des gaz où ils se trouvent plongés; aussi le platine en éponge enflamme-t-il subitement un mélange d'hydrogène et d'oxigène.

La classification adoptée tout à l'heure indique suffisamment l'action que l'oxigène et l'air exercent sur les métaux. Ajoutons que la présence de l'eau accélère cette oxidation, sans doute parce que l'oxigène dissous dans l'eau hygrométrique se présente aux métaux à l'état liquide ou de gaz naissant. Le carbone ne forme de combinaison remarquable qu'avec le fer, qui devient *acier*, *fonte*, ou *plombagine*, suivant la quantité plus ou moins grande de carbone absorbé. Les composés du phosphore avec les métaux sont très cassants et plus fusibles que les métaux qu'ils contiennent; on peut les obtenir en faisant passer du phosphore en vapeur sur les métaux chauffés jusqu'au rouge brun. Le soufre se combine directement avec presque tous les métaux; les sulfures sont tous cassants, plus fusibles que les métaux qu'ils renferment, quand ceux-ci le sont difficilement, et moins fusibles dans le cas contraire. Par le grillage à l'air, beaucoup passent à l'état de sulfate. Leur composition est analogue à celle des oxides, de telle manière que le poids du soufre dans un sulfure correspondant à un oxide et pour la même quantité de métal, est précisément double du poids de l'oxigène de l'oxide; d'où l'on conclu que l'atome de soufre pèse deux fois plus que l'atome d'oxigène. Quant au chlore, son affinité pour les métaux est aussi très grande, et plusieurs de ces métaux réduits en poudre prennent feu spontanément dans le chlore gazeux; un fil de fer ou de cuivre, porté au rouge, brûle vivement dans le chlore, et le chlorure qui en résulte tombe goutte à goutte, entouré d'épaisses vapeurs.

Aucun métal n'est soluble dans l'eau; ceux de la première section la décomposent aux températures ordinaires; ceux de la seconde, de 100 à 200 degrés; et ceux de la troisième, à la chaleur

rouge. Dans tous les cas, l'oxigène de l'eau se combine avec le métal, et l'hydrogène se dégage. La présence d'un acide favorise beaucoup cette réaction. Le chrôme, le tungstène, le colombium, le titane, l'urane, le cérium, l'osmium, le palladium, le rhodium, le platine, l'or et l'iridium ne sont point attaqués par l'acide sulfurique, même à chaud; tous les autres sont oxidés par cet acide concentré, et forment avec lui un sulfate, avec dégagement d'acide sulfureux. L'acide nitrique en attaque deux de plus, savoir, l'urane et le palladium; il résulte de cette action de l'azote, soit pur, soit oxidé, et un oxide métallique qui d'ordinaire se combine avec une portion de l'acide nitrique pour former un nitrate. L'acide muriatique, sous forme gazeuse, est attaqué par les métaux des trois premières sections; l'action est plus vive quand l'acide est en dissolution dans l'eau; il en résulte un chlorure métallique, avec dégagement d'hydrogène. L'eau régale, mélange d'acides nitrique et muriatique, attaque tous les métaux excepté cinq, le colombium, le chrôme, le titane, le rhodium et l'iridium. Jetons maintenant un coup d'œil sur la préparation des principaux métaux.

deIl y a peu de mines d'étain; les principales sont dans le comté Cornouailles en Angleterre, dans la Saxe et la Bohême, à Banca et Malacca aux Indes, dans les provinces de Guanaxato et de Guadalaxara en Amérique. C'est du deutoxide d'étain qu'on l'extrait. On lave le minerai pour en séparer les terres, qui sont entraînées comme étant plus légères; on le grille s'il contient des sulfures et des arséniures, que l'on convertit en sulfates; on jette la matière rouge dans l'eau, où les sulfates se dissolvent, tandis que l'oxide d'étain se dépose, mêlé avec des oxides de fer, de cuivre, etc. On expose ces oxides à l'air pour les laver une seconde fois; celui d'étain va au fond comme le plus lourd. On le jette dans un fourneau avec du charbon, qui lui enlève son oxigène; l'étain métallique coule successivement dans plusieurs bassins, et c'est alors qu'on en retire les scories et les dernières impuretés.

Les minerais de fer sont très répandus. Le métal s'extrait de l'oxide de fer, du carbonate et du silicate de fer. Si la mine est en roche, on la grille pour la séparer du soufre et de l'arsenic qu'elle contient alors; si elle est terreuse, on se contente de la laver. Après cette préparation, le minerai est jeté avec du charbon dans de hauts fourneaux, en y ajoutant de l'argile si le minerai contient trop de calcaire, et du calcaire si le minerai renferme trop d'argile. Ces deux espèces minérales se servent mutuellement de fondants, et le carbone, mis ainsi en contact avec l'oxide de fer, lui enlève son oxigène. On active le feu à l'aide de grands soufflets. Peu à peu la *fonte* de fer coule au fond du fourneau, dans un creuset, où elle est continuellement recouverte par le *laitier* formé de toutes les roches étrangères en fusion, lesquelles sont plus légères que la fonte et s'écoulent successivement. Lorsque le creuset est

presque plein, on débouche son canal inférieur, qui donne issue à la fonte ; celle-ci coule dans un sillon sablonneux, et s'y moule en un long prisme triangulaire, connu sous le nom de *gueuse*.

La fonte de fer contient 2 à 3 centièmes de carbone et des traces de matières terreuses. Pour l'affiner, on l'expose à une forte chaleur dans un brasier entretenu par du charbon de bois. La fonte se met alors sous forme de grumeaux que l'ouvrier rassemble en une seule masse ; cette masse, retirée du feu, est battue pour en faire couler le laitier, et mise sous un lourd marteau qui la comprime et l'étire en barre compacte ; mais la nécessité qu'il y a de remettre plusieurs fois cette masse au feu occasionne une perte assez notable, et 7 livres de fonte ne donnent que 5 livres de fer.

Le cuivre se retire de minerais oxidés et carbonatés, et de minerais sulfurés. En fondant les premiers avec de la chaux, à l'aide de charbon de terre contenant du soufre, on en retire un sulfure de cuivre mêlé à du sulfure de fer, que l'on nomme *matte*, plus une portion de cuivre noir. Les seconds minerais sont d'abord grillés imparfaitement, puis, par la fusion, l'on obtient une matte contenant du sulfure de plomb. Pour transformer les mattes en cuivre noir, on les grille et on les fond avec du sable pur et un peu de charbon ; on répète plusieurs fois cette double opération qui a pour but la formation d'un silicate de fer et le départ du cuivre noir. Celui-ci renferme encore un peu de soufre et de fer ; et pour séparer le cuivre, qui est peu oxidable, de ces matières étrangères qui le sont beaucoup, on opère la fusion sous le vent d'un fort soufflet : les oxides ainsi formés se rassemblent à la surface du cuivre fondu, qui n'est cependant pas encore d'une pureté absolue.

Le plomb se rencontre abondamment dans la nature, en diverses combinaisons ; mais on l'extrait généralement du sulfure de plomb, appelé *galène*. On grille cette galène, puis on la traite par le charbon ; mais il faut parfois beaucoup d'autres manipulations et de grandes précautions, à cause des matières mélangées avec le plomb. Ce métal, ainsi obtenu, s'appelle *plomb d'œuvre;* il renferme encore du soufre, et ordinairement du cuivre, du fer, de l'antimoine, de l'arsenic et de l'argent, que l'on enlève par la *coupellation :* on la pratique dans un fourneau à réverbère, où le plomb est fondu ; la surface du bain se recouvre de scories épaisses que l'on enlève ; puis on dirige sur le bain le vent d'un soufflet pour oxider la masse. Les oxides des métaux étrangers viennent à la surface, et on les enlève. L'oxide de plomb coule au dehors à mesure qu'il apparaît sur le bain de plomb. Vers la fin, on active le feu, et l'on voit briller l'argent au fond du creuset.

Le mercure se rencontre quelquefois à l'état natif, dans les petites cavités de certaines roches ; mais on le retire du sulfure de mercure, nommé *cinabre*. On trie le minerai, on le broie, et on

le mêle avec de la chaux éteinte; on chauffe ce mélange dans des cornues de fonte; le mercure se volatilise et vient se condenser dans l'eau. En Espagne, aux mines d'Almaden, on entretient sous un lit de fragments de minerai, un feu de fagots, qui brûle le soufre et volatilise le mercure.

L'argent se rencontre à l'état natif; allié à d'autres métaux, comme l'antimoine, l'arsenic, le mercure et l'or; à l'état de sulfure, de chlorure; et enfin à l'état de carbonate. L'argent natif est tantôt régulièrement cristallisé, tantôt disposé en dendrites, en réseaux, en filaments, et se trouve dispersé dans les filons argentifères. Les divers procédés que l'on suit pour son extraction reviennent à oxider les métaux qui l'accompagnent, après l'avoir allié au plomb ou au mercure, comme il vient d'être dit à l'occasion du plomb. Quand le minerai est très pauvre, le procédé se complique un peu.

L'or est à l'état natif, ou combiné avec l'argent et d'autres métaux. Il est quelquefois cristallisé et disposé en dendrites; le plus souvent il est en petites lames, en paillettes, en grains. Lorsqu'on l'extrait des terrains d'alluvion, en Amérique, on jette la terre dans un canal étroit où passe un courant d'eau assez rapide. Des nègres, placés dans ce courant, remuent les matières terreuses, pour faciliter leur enlèvement par l'eau. Lorsqu'il ne reste plus que du gravier, le lavage s'achève dans un grand plat de bois de forme conique; on obtient d'abord un sable noir ferrugineux, qui, par un nouveau lavage, donne une certaine quantité de poudre d'or. L'or contenu dans les minerais de fer, de cuivre, d'antimoine, etc., s'obtient, 1° par la fusion simple, ou avec des matières plombifères, pour finir par la coupellation; 2° par le broiement et le lavage du minerai; 3° par le mercure, agissant sur le minerai en poudre, dans une espèce de moulin où s'opère le broiement.

Le platine est toujours combiné avec beaucoup de fer, et de petites quantités de palladium, de rhodium, d'iridium et d'osmium; on trouve ce minerai en paillettes, ou petits grains, rarement en masses, dans les terrains sabloneux aurifères. Pour l'en extraire, on dissout le minerai dans l'eau régale; on y verse du muriate d'ammoniaque; on calcine le muriate double qui s'est formé par précipitation, et le résidu est le platine en masse poreuse, autrement dit *platine en éponge*. Quant à la manière de forger ce métal, c'est le secret de ceux qui s'en occupent. Wollaston a fini par publier le sien dans les *Transactions philosophiques* de Londres, et son Mémoire est reproduit dans les *Annales de chimie et de physique*, tome 51.

DES ALLIAGES.

17° *Étude générale.* **Insister sur la dureté que prennent les métaux en s'alliant ; sur la décomposition des alliages par la chaleur, lorsqu'ils sont formés de métaux fixes et de métaux volatils, ou de métaux dont les degrés de fusion sont très différents ; sur les phénomènes que présentent les alliages dans leur contact avec l'air à une température élevée ; enfin, sur la propriété que possèdent les métaux de s'unir en toutes proportions. Indiquer ensuite la composition ou la nature des amalgames, du bronze, du métal des cloches, du tamtam, de l'étamage, du fer-blanc, du moiré, de la soudure des plombiers, des caractères d'imprimerie, du cuivre jaune, des monnaies d'argent, d'or, de billon ; de l'alliage fusible dans l'eau bouillante.**

On donne le nom d'*alliages* aux combinaisons des métaux entre eux, réservant celui d'*amalgames* à celles dont le mercure fait partie. Tous les alliages formés de métaux cassants, le sont eux-mêmes sans aucune exception. Ils sont encore cassants, lorsqu'ils résultent de la combinaison d'un métal ductile et d'un métal cassant, si celui-ci est en excès. Enfin, lorsqu'on allie entre eux les métaux ductiles, la moitié au moins des alliages qui en résultent sont cassants. D'où l'on tire cette conclusion, que le propre des alliages est de donner de l'aigre.

On remarque, en général, qu'un alliage est plus fusible que le métal le moins fusible qui entre dans sa composition. Si l'alliage contient un métal fixe et un métal volatil, une chaleur très grande rendra presqu'entièrement la liberté à ce dernier ; il en est de même des alliages formés par des métaux dont la fusibilité est très différente : c'est ce qu'on appelle *liquation*. On observe, en général, que les alliages s'oxident moins que les métaux dont ils sont formés. Enfin, les alliages ne semblent soumis à aucune loi de composition, et les métaux se combinent entre eux dans toute proportion. On en rencontre seulement une dixaine dans la nature. Ils se font en chauffant convenablement dans un creuset les métaux dont ils doivent être formés, ceux-ci étant réduits en petits morceaux et bien mélangés. Si l'un des métaux était volatil, il faudrait se garder d'exposer l'alliage à une haute température.

Amalgame d'étain. Plus il y entre d'étain et moins il est liquide. On s'en sert pour mettre les glaces au tain. A cet effet, on étend une feuille d'étain bien horizontalement ; on verse du mercure sur cette feuille, puis on glisse une glace de manière à partager cette couche de mercure en deux, et l'on charge la glace de poids. Bientôt l'étain se combine intimement avec le mercure, et forme un amalgame qui s'attache aux parois de la glace.

Amalgame de bismuth. Il renferme une partie de bismuth sur quatre parties de mercure. On s'en sert pour étamer intérieurement les globes de verre, en y versant l'amalgame à chaud et le promenant sur toute la surface du vase ; une partie de l'amalgame se solidifie et donne lieu à un étamage qui est assez beau.

Amalgame d'argent. Il s'obtient en chauffant jusqu'au rouge une

partie d'argent en grenailles, et la jetant peu à peu dans douze ou quinze parties de mercure chauffé à 200 degrés. Comprimant ensuite le mélange pour le faire passer à travers une peau de chamois, tout le mercure en excès passe avec un peu d'argent à travers la peau, tandis que l'amalgame mou reste au dessus.

Amalgame d'or. On le forme en chauffant dans un creuset de l'or laminé et du mercure. On l'emploie pour dorer le laiton.

Alliage d'étain et de cuivre ou *bronze.* Celui qui contient onze parties d'étain et cent de cuivre, sert à faire les bouches à feu et les statues de bronze. Les miroirs de télescopes résultent d'un alliage de un d'étain et deux de cuivre. Pour faire les cloches, on combine vingt deux parties d'étain avec soixante dix huit de cuivre; on y met un peu de zinc et de plomb. Le tamtam des orientaux est formé d'un alliage de vingt parties d'étain et de quatre-vingt de cuivre. Pour le travailler au marteau, il faut le tremper rouge dans l'eau froide; il acquiert alors une grande ductilité, tandis qu'il est très aigre et très sonore lorsqu'il se refroidit lentement. C'est ce qui arrive à tous les composés d'étain et de cuivre. L'étain sert à étamer le cuivre.

Alliage d'étain et de fer. Le fer-blanc n'est que du fer laminé, dont les deux surfaces sont recouvertes d'une petite quantité d'étain. c'est en désoxidant d'abord le fer, le plongeant ensuite dans un bain de suif, puis dans un bain d'étain couvert de suif fondu, et le frottant avec du son, qu'on prépare le fer-blanc

Lorsqu'on expose une feuille de fer-blanc à la vapeur de l'acide muriatique, ou lorsqu'on verse à plusieurs reprises sur cette feuille un liquide chaud, composé de 2 parties d'acide nitrique du commerce, 3 d'acide muriatique et 8 d'eau, qu'on tient ensuite la feuille dans un bain légèrement acidulé, et qu'on la lave, on obtient ce qu'on appelle le *moiré métallique.* Dans cette expérience, on ne fait évidemment que dissoudre la couche superficielle d'étain qui est très unie, et découvrir les autres, qui se composent d'une foule de cristaux.

Alliage d'étain et de plomb. Celui qui est formé d'une partie d'étain et de deux de plomb, sert à souder le plomb et l'étain lui-même, vu qu'il est plus fusible que ces métaux.

Alliage d'antimoine et de plomb. 20 parties d'antimoine et 80 de plomb donnent un alliage pour les caractères d'imprimerie. On y ajoute quelques centièmes de cuivre.

Alliage de zinc et de cuivre, ou *laiton.* Il est composé de 20 à 40 parties de zinc, et de 80 à 60 parties de cuivre. Un peu de plomb le rend plus facile à tourner, mais plus difficile à travailler au marteau. Ses usages sont nombreux.

Alliage d'argent et de cuivre. Les proportions sont de 9 d'argent et 1 de cuivre pour la monnaie d'argent en France; de 1 d'argent et 4 de cuivre pour la monnaie de billon. L'argent au premier titre,

pour les vases, les couverts et la vaisselle, contient 95 centièmes d'argent et 5 centièmes de cuivre. L'argent au second titre, pour les bijoux, renferme 80 centièmes d'argent et 20 centièmes de cuivre. On se sert aussi d'un alliage de cuivre et d'argent pour souder l'argent, mais alors on le forme de 3 à 4 parties de cuivre sur 10 parties d'argent, afin de le rendre plus fusible.

Alliage d'or et de cuivre. Il est plus dur que l'or. La monnaie d'or en France est un alliage de 9 parties d'or et de 1 partie de cuivre. Les titres des vases et de tous les ustensiles d'or sont au nombre de trois, savoir : 92 centièmes d'or et 8 de cuivre, pour le premier titre; 84 d'or et 16 de cuivre, pour le second titre; 75 d'or et 25 de cuivre, pour le troisième titre.

Alliage fusible. L'alliage le plus remarquable par sa fusibilité est celui qui résulte de 8 parties de bismuth, 5 de plomb et 3 d'étain. Il coule à la chaleur de l'eau bouillante.

DES OXIDES MÉTALLIQUES.

18°, 19° et 20° *Étude générale.* Classification ; principales propriétés physiques des oxides ; action qu'exercent sur eux la chaleur, l'électricité, le fluide magnétique, l'hydrogène, le carbone, le chlore, le potassium, l'eau, les acides. — Rappeler les lois de leur composition ; donner une idée de la préparation de la plupart des oxides, en faisant voir comment on peut se les procurer, soit en combinant le métal à l'oxigène, soit en les extrayant des sels par les bases, ou des azotes et des carbonates par la chaleur. — *Étude particulière.* Potasse, soude, baryte, chaux, magnésie, alumine, ammoniaque.

Les oxides métalliques sont le résultat de la combinaison des métaux avec l'oxigène ; ce sont, en d'autres termes, les métaux brûlés. Tous ces oxides sont solides, cassants, ternes en poussière, inodores, insipides (excepté ceux de la 1e section des métaux), plus pesant que l'eau, mais moins que les métaux qui servent à les former (le sodium et le potassium exceptés). Sans action sur le tournesol, plusieurs ramènent au bleu cette couleur rougie par les acides ; les oxides alcalins verdissent le sirop de violette, et rougissent le jaune de curcuma. Les oxides terreux n'éprouvent aucune altération par la chaleur ; ceux des 5e et 6e sections se réduisent facilement ; parmi ceux des 1e, 3e et 4e sections, beaucoup sont ramenés à un moindre degré d'oxigénation, mais aucun ne peut se réduire complètement. Tous les oxides peuvent être réduits par la pile voltaïque. Les oxides du fer sont beaucoup moins magnétiques que ce métal lui-même.

L'hydrogène à froid n'exerce aucune action sur les oxides métalliques ; mais à chaud, il ramène à l'état de protoxide tous les deutoxides et peroxides de la première section, et réduit tous les oxides des quatre dernières sections. Le carbone peut réduire à une température plus ou moins élevée tous les oxides métalliques,

excepté les oxides terreux, et ceux de barium, de strontium, de calcium et de lithium. Le carbone passe alors à l'état de gaz acide carbonique, ou de gaz oxide de carbone, suivant que le métal a une affinité plus faible ou plus grande pour l'oxigène. Le chlore ne décompose que l'oxide de magnésium parmi ceux de la seconde section; mais il décompose tous ceux des autres sections, en se substituant à l'oxigène. Le potassium et le sodium décomposent tous les oxides des quatre dernières sections, et font passer à l'état de protoxide les deutoxides alcalins.

Les oxides alcalins se dissolvent tous dans l'eau avec dégagement de chaleur. Les protoxides de fer, de manganèse et d'étain s'emparent de l'oxigène de l'eau pour passer à un état supérieur d'oxidation. Enfin, les peroxides de potassium et de sodium, aux températures ordinaires, et les deutoxides de barium, de strontium et de calcium à 100 degrés, sont décomposés par l'eau, et ramenés à l'état de protoxides. La plupart des oxides ont la propriété de se combiner avec l'eau, en formant ce qu'on appelle des *hydrates*. Dans les hydrates, l'oxigène de l'eau est en même quantité que l'oxigène de l'oxide. La chaleur dégage cette eau avec facilité; il n'y a que les hydrates alcalins et celui de magnésium qui la retiennent fortement; ceux de potasse et de soude ne la cèdent point.

Les acides, quand ils réagissent sur les oxides, donnent naissance à des composés connus sous le nom de sels; mais nous en parlerons plus loin.

Ordinairement, un deutoxide contient deux fois plus d'oxigène que le protoxide, pour la même quantité de métal; quelquefois le rapport des quantités d'oxigène dans ces oxides est de 2 à 3; quand le rapport devient plus compliqué, on peut admettre que l'oxide en question résulte de la combinaison ou du simple mélange de deux oxides définis.

Parmi les procédés que l'on emploie pour obtenir les oxides métalliques, nous citerons les suivants: 1° calcination du métal au contact de l'air ou de l'oxigène pur; 2° extraction de l'oxide d'un sel, en dissolvant le sel dans l'eau, y versant un alcali qui s'empare de l'acide du sel, et laissant déposer l'oxide; 3° extraction de l'oxide des carbonates, en exposant ceux-ci à l'action de la chaleur rouge, qui chasse l'acide carbonique; 4° extraction de l'oxide des nitrates, en décomposant l'acide nitrique par la chaleur. Nous allons dire un mot des principaux oxides.

Potasse ou protoxide de potassium. Il est blanc, fusible, déliquescent et très soluble dans l'eau. On l'obtient en lessivant les cendres de bois, et évaporant la liqueur. Alors il est à l'état de carbonate et mêlé à d'autres substances, et passe dans le commerce sous le nom de *perlasse*. Pour avoir la potasse pure, on mêle la perlasse avec deux fois son poids de chaux vive et dix fois son poids d'eau; on la fait bouillir pendant quelques heures dans un

vase de fer, ou bien on la laisse deux jours dans un vase de verre, en la remuant de temps à autre. On filtre, et on fait évaporer la liqueur dans un vaisseau d'argent, jusqu'à ce qu'elle ait la consistance du miel. On y ajoute de l'alcool en quantité égale au tiers de la perlasse employée; on agite bien le mélange, puis après l'avoir fait bouillir quelques minutes, on le verse dans une éprouvette fermée par un bouchon de liége. La liqueur se sépare d'elle-même en deux couches; l'inférieure contient les matières étrangères, et l'autre une dissolution de potasse pure. Décantant à l'aide d'un siphon, et chassant l'alcool par évaporation, on obtient la potasse pure, ou plutôt un hydrate de potasse.

La *soude*, ou protoxide de sodium, est blanche et se comporte comme la potasse avec les autres corps. On la trouve dans plusieurs plantes marines, comme les algues et les fucus. Les cendres de ces plantes sont connues sous le nom de *varec*; on les traite comme celles du bois dont on retire la potasse; on purifie la soude de la même manière; en sorte que l'histoire de ces deux substances est presque la même. Combinée à chaud avec les huiles, la soude forme la base des savons.

La *baryte*, ou protoxide de barium, est blanche; elle pèse quatre fois plus que l'eau, dans laquelle elle se dissout. On l'extrait du sulfate de baryte que l'on trouve à l'état naturel. La poudre de ce sulfate est d'abord fortement calcinée avec le charbon, puis jetée dans l'eau qui dissout un sulfure de barium; en y versant de l'acide nitrique il se dégage de l'hydrogène sulfuré, et il reste un nitrate de baryte qui cristallise. C'est ce nitrate que l'on calcine pour obtenir la baryte. La dissolution aqueuse de la baryte est le réactif ordinaire de l'acide sulfurique, qu'elle précipite de ses combinaisons en une poudre blanche très insoluble.

La *chaux*, ou protoxide de calcium, est blanche; on l'obtient en calcinant la pierre à chaux, ou carbonate de chaux naturel, au moyen de bois vert. La chaux, ainsi préparée, a une telle affinité pour l'eau qu'elle s'y combine en dégageant une chaleur considérable, et même une lueur dans l'obscurité. Ainsi éteinte, on la mêle avec le sable ou la brique pilée, pour former les divers mortiers employés dans la maçonnerie.

La *magnésie*, ou oxide de magnésium, est blanche, très douce au toucher; elle verdit le sirop de violette comme un alcali; elle est infusible. On l'obtient en versant une dissolution de sulfate de magnésie, recueillant le carbonate de magnésie qui se précipite, le lavant, le séchant et le décomposant par le feu. La magnésie forme avec les acides des sels d'un goût amer.

L'*alumine*, ou protoxide d'aluminium, est blanche, douce au toucher, happant à la langue, insoluble dans l'eau, et faisant pâte avec ce liquide. On l'extrait de l'alun qui est un sulfate double d'alumine et de potasse, en dissolvant ce double sel dans

l'eau chaude, y versant de l'ammoniaque qui précipite l'alumine et s'empare de son acide, puis lavant à grande eau ce précipité d'nne consistance gélatineuse.

L'*ammoniaque* est un gaz sans couleur, très acre, très caustique, dont l'odeur est vive et piquante. Il verdit fortement le sirop de violette; sa densité est 0,591. Ponr l'analyser, on y fait passer un très grand nombre d'étincelles électriques, et l'on juge que l'opération est terminée quand le gaz a doublé de volume: on trouve ainsi que 2 volumes de gaz ammoniac se décomposent en 1 volume d'azote et 3 volnmes d'hydrogène.

On extrait l'ammoniaque du muriate d'ammoniaque, connu dans le commerce sous le nom de *sel ammoniac*. On mélange parties égales de ce sel bien pulvérisé et de chaux vive en pondre, et on le distille dans une cornue de verre. La chaux s'empare de l'acide muriatique, et le gaz ammoniac se dégage, se dessèche à travers un tube plein de potasse, et vient se loger dans des éprouvettes renversées sur le mercure. On reconnaît qu'il est pur, quand il se dissout entièrement dans l'eau, ce liquide étant capable d'en absorber 430 fois son volume, ou le tiers de son poids.

Un mélange de gaz ammoniac et d'oxigène détonne, quand on y met le feu, l'oxigène s'emparant de l'hydrogène de l'ammoniaque et dégageant l'azote. Si des bulles de chlore sont introduites dans une éprouvette remplie de gaz ammoniac, il se produit une absorption considérable, un grand dégagement de chaleur, et des vapeurs épaisses que sillonne une lumière assez vive. Le chlore s'empare de l'hydrogène d'une partie de l'ammoniaque, passe à l'état d'acide muriatique, et s'unit alors avec l'autre portion d'ammoniaque pour former le sel ammoniac, qui se dépose sur les parois de l'éprouvette.

Lorsqu'on fait traverser an gaz ammoniac nn tube de porcelaine incandescent, dans lequel on a mis des fils de fer, de cuivre, d'argent, de platine ou d'or, l'ammoniaque se trouve décomposée, ce qui n'arrive pas quand le tube est bien net et vide. En outre, ces métaux, surtout le cuivre et le fer, deviennent extrêmement cassants, sans que pour cela ils aient rien acquis ni rien perdu. On explique ce fait en admettant une combinaison momentanée de l'azote de l'ammoniaque avec les métaux.

L'ammoniaque en dissolution dans l'eau a la propriété de dissoudre beaucoup d'oxides métalliques et de se combiner avec plusieurs de ces derniers. Les produits que l'on obtient avec l'or, l'argent et le platine, détonnent très fortement par le choc et la chaleur. Enfin, l'ammoniaque se combine avec tous les acides pour donner naissance à des sels neutres. C'est une base salifiable très énergique, et qui peut déplacer presque toutes les bases métalliques.

DES SELS.

21° et 22° *Étude générale.* **Nature des sels ; leur division en familles, genres et espèces. Propriétés qu'ont les oxides de s'unir en diverses proportions avec le même acide. Lois auxquelles les sels sont soumis dans leur composition ; conséquences importantes qu'on en tire pour l'analyse. — Action de l'eau, de la glace sur les sels. — Froids artificiels. — *Action hygrométrique de l'air ; sels efflorescents, déliquescents.* — Action du feu et de la pile sur les sels ; précipitation des métaux des dissolutions salines par d'autres métaux. Prouver ainsi que dans les sels de même genre, et au même état de saturation, les quantités d'acides sont proportionnelles à la quantité d'oxigène des oxides. Faire voir que les bases et les acides tendent à décomposer les sels, savoir : les bases, en s'emparant des acides, et les acides en s'emparant des bases des sels ; citer les bases et les acides les plus énergiques. — Décomposition réciproque de deux sels solubles qui peuvent former un sel soluble et un sel insoluble. — Citer les principaux sels doubles.**

On appelle *sel* la combinaison d'un oxide avec un acide. L'oxide porte alors le nom de *base salifiable.* Ayant un pareil composé, pour déterminer sûrement quelle est la base et quel est l'acide, il faut faire agir la pile voltaïque sur le composé préalablement dissous, ou humecté s'il n'est pas soluble; la base est portée vers le pôle négatif et l'acide vers le pôle positif de la pile. Davy s'est assuré qu'alors l'acide était chargé d'électricité négative et la base d'électricité positive. De plus, toutes les fois que la base du sel est décomposable par la pile elle-même, cette base abandonne son oxigène, qui se porte avec l'acide au pôle positif, où il s'unit avec cet acide, si celui-ci n'est pas à son *maximum* d'acidification. Enfin, l'acide est lui-même décomposé si la pile est énergique, ce qui arrive d'ailleurs toujours pour les acides hydrochlorique et hydriodique.

Le même corps ne manifeste pas toujours la même électricité, de telle sorte qu'il peut jouer le rôle de base et le rôle d'acide, suivant les corps avec lesquels on le combine. Dans les combinaisons binaires, l'oxigène donne sa propriété négative aux acides, et prend l'état positif du métal dans les oxides. Dans la combinaison de l'oxide avec l'acide, l'électricité de l'un saturera une portion de l'électricité de l'autre, ou *vice versâ*, et le sel qui en résultera conservera plus ou moins la propriété de l'un ou de l'autre de ses éléments. De là les expressions de *sel neutre*, de *sel acide*, de *sel alcalin* ou *basique*. De tout cela il résulte que les propriétés électriques n'étant que relatives, les oxides et les acides ne font pas deux classes distinctes, mais plutôt une seule série, aux extrémités de laquelle sont les plus forts acides et les plus fortes bases.

Les acides s'unissent aux bases dans des proportions fixes. Un acide peut se combiner avec une base en plusieurs proportions. On donnait le nom de *sel neutre*, à celui dans lequel l'acide et l'oxide s'étaient neutralisés réciproquement, et l'on jugeait de cette neutralisation plus ou moins parfaite par l'action du sel sur les cou-

leurs végétales; mais rien n'assurait qu'en présence des substances végétales, le sel n'abandonnât pas une partie de son acide ou de sa base pour agir énergiquement sur les couleurs, quand bien même le sel eût été neutre. Aujourd'hui que la composition des sels est bien connue, on part d'un sel dont la neutralité est bien constatée, et l'on appelle sels neutres tous les sels dont la composition est analogue, quelles que soient d'ailleurs les actions qu'ils peuvent exercer sur les couleurs végétales.

Tous les sels formés par le même acide, et au même état de saturation, sont composés de telle matière qu'il existe un rapport constant entre la quantité d'oxigène de l'oxide et la quantité d'oxigène de l'acide. Voici ces différents rapports, pour les différents *genres* de sels:

	Oxigène de l'oxide, l'acide.		Oxigène de l'oxide, l'acide.
Borates	1 : 2	Chlorates	1 : 5
Carbonates	1 : 2	Hyper-chlorates	1 : 7
Phosphates	2 : 5	Iodates	1 : 5
Hypo-phosphites	2 : 3	Arséniates	2 : 5
Nitrates	1 : 5	Arsénites	2 : 3
Nitrites	1 : 4	Malybdates	1 : 3
Sulfates	1 : 3	Chrômates	1 : 3
Hypo-sulfates	2 : 5	Tungstates	1 : 3
Sulfites	1 : 2	Antimoniates	1 : 5
Hypo-sulfites	1 : 1	Antimonites	1 : 4
Séléniates	1 : 2		

De là il suit qu'avec la composition des oxides et celle d'une *espèce* de sel d'un genre quelconque, on peut connaître la composition de toutes les espèces de ce genre, et que quand on a les quantités d'oxide et d'acide qui constituent un sel, on détermine aisément la quantité d'oxigène que cet oxide renferme, quand bien même il serait irréductible.

Généralement, les *sels acides* contiennent deux fois plus d'acide que les sels neutres, et les *sous-sels* deux fois plus d'oxide que les sels neutres.

Les sels sont plus ou moins solubles dans l'eau. La solubilité va ordinairement en augmentant avec la température; quelquefois elle marche en sens contraire; d'autres fois elle augmente jusqu'à un maximum avec la température, et diminue par une plus grande chaleur. Enfin, il y a des sels qui ne sont pas plus solubles à chaud qu'à froid. La solubilité d'un sel n'est pas toujours en raison de son affinité pour l'eau; elle dépend encore de la cohésion du sel, et l'affinité peut se mesurer en saturant l'eau par le sel et observant la tension de la vapeur à une température fixe.

Les sels peuvent se combiner avec l'eau et la solidifier : c'est ce qu'on appelle *eau de cristallisation;* elle est soumise aux lois des proportions définies, et il existe un rapport simple entre l'oxigène de l'eau et celui de la base du sel. Il est des sels qui sont *efflorescents,* c'est-à-dire qui abandonnent à l'air leur eau de cristallisation ; d'autres, au contraire, absorbent l'humidité de l'air et sont ce qu'on appelle déliquescents. Plusieurs contiennent un peu d'eau simplement interposée entre leurs particules, et *décrépitent* au feu par la tension de la vapeur qui alors se forme.

Plusieurs sels sont infusibles au feu de nos fourneaux ordinaires. Ceux qui contiennent de l'eau se fondent d'abord dans cette eau : c'est la *fusion aqueuse*; puis ils se fondent par l'action seule de la chaleur : c'est la *fusion ignée.* Une température plus ou moins élevée décompose plusieurs sels, et même les éléments de ces sels.

Il y a plusieurs moyens de faire cristalliser les sels : par le refroidissement dans l'eau, par l'évaporation de ce liquide, par la fusion, et par la volatilisation. On a remarqué que plusieurs dissolutions salines ne pouvaient cristalliser par refroidissement dans le vide ; mais la plus petite bulle d'air détermine cette cristallisation. On arrête encore la cristallisation en répandant une couche d'huile sur la dissolution.

Le potassium et le sodium décomposent tous les sels, excepté les borates et les fluates. Beaucoup de sels solubles peuvent être décomposés par la présence d'un nouveau métal. Ainsi, les sels d'argent, de palladium, de rhodium, de platine, d'or, d'osmium, et d'iridium, sont réduits par le fer, le zinc, le manganèse, le cobalt, le mercure, l'étain, l'arsenic, l'antimoine, le bismuth, le plomb, le cuivre, le tellure. Les nitrates de mercure sont réduits par les sept derniers métaux ci-dessus. Enfin, les sels d'étain, d'arsenic, d'antimoine, de bismuth, de plomb, de cuivre, de tellure, ne sont réduits que par le fer et le zinc. La cristallisation que l'on produit avec une lame de zinc et une dissolution d'acétate de plomb, est la plus remarquable : on l'appelait l'*arbre de Saturne.* Celle qui provient de la décomposition du nitrate d'argent par le mercure porte le nom d'*arbre de Diane.*

Il y a deux manières de procéder à la décomposition des sels par les oxides et les acides : 1° par la voie sèche, en calcinant le sel avec un acide plus fixe que l'acide du sel, celui-ci sera chassé et remplacé par l'autre acide. La même chose arrive pour une base plus fixe que celle qui existe dans le sel ; celle-ci est chassée, et l'autre prend sa place ; 2° par la voie humide ; si ce sel contient un acide peu soluble, un autre acide plus soluble le déplacera ; de même pour la base. Mais lorsque, dans une dissolution saline, on verse un oxide ou un acide, capable de former avec l'acide ou avec l'oxide du sel un autre sel insoluble, celui-ci se forme en

effet, et se précipite. Lorsqu'un acide, au lieu de se combiner avec tout l'oxide d'un sel, ne se combinera qu'avec une portion de cet oxide, il en naîtra deux sels dont la saturation sera variable : si le premier sel était avec excès de base, il deviendra neutre ou acide. De même, si l'oxide qu'on met en présence d'un sel ne se combine qu'avec une portion de l'acide de ce sel, il en naîtra deux nouveaux sels, et le premier passera à l'état de sel neutre, ou de sous-sel, s'il était précédemment sel acide. Enfin, il se forme quelquefois des sels doubles, c'est-à-dire des sels dont l'acide est commun à deux bases différentes.

Il est indispensable de se rappeler que la potasse, la soude, la lithine, la baryte, la strontiane et la chaux, mises en contact avec tous les sels, les décomposent en se substituant aux oxides de ces sels, qui se précipitent d'abord, puis se dissolvent quand les substances qu'on vient de nommer sont en excès. On doit aussi savoir qu'à la température ordinaire, ou à une faible chaleur, l'acide sulfurique décompose tous les sels, excepté quelques phosphates, qu'il fait passer à l'état de phosphates acides.

Enfin, les hydracides agissent sur les sels pour les décomposer, et pour décomposer en même temps la base du sel, en donnant lieu à de l'eau et à un sulfure, un iodure, un chlorure, etc.

Lorsqu'on mêle deux sels en dissolution dans l'eau, et que, par leur réaction, il peut se former un sel soluble et un sel insoluble, ou deux sels insolubles, il y a toujours décomposition réciproque des deux sels, la base du premier s'unissant à l'acide du second, et l'acide du premier à la base du second. Si les deux sels restent en dissolution, rien n'annonce qu'ils se décomposent; mais, par l'évaporation de l'eau, des quatre sels qui peuvent se former entre les deux bases et les deux acides, celui qui est le moins soluble commence par se précipiter, et ensuite l'autre sel, et quelquefois un mélange de ces deux sels.

Les sels insolubles ont aussi la propriété d'échanger, dans certains cas, leurs principes avec certains sels solubles, lorsque de cet échange il peut résulter un autre sel insoluble. Les bicarbonates neutres et les carbonates neutres de potasse et de soude décomposent tous les sels insolubles sans exception; mais la décomposition de ces carbonates n'est jamais entière. Le résultat est un carbonate insoluble, et un sel à base de potasse ou de soude, qui reste dissous dans l'excès de carbonate de potasse ou de soude. Sans cet excès, le carbonate insoluble réagirait sur le sel à base de potasse ou de soude, pour le décomposer en partie jusqu'à ce qu'il y eût assez de carbonate en dissolution.

Dans les sels doubles, chaque sel est composé comme s'il était seul; et de plus, un atome de l'un des sels simples se trouve joint à un ou plusieurs atomes de l'autre sel. Ce sont les sels à base de potasse, de soude et surtout d'ammoniaque, qui ont le plus de

tendance à se combiner avec d'autres et à former des sels doubles. Le plus remarquable de ces sels doubles, est le sulfate de potasse et d'alumine, connu sous le nom d'*alun ;* il existe un autre alun composé de sulfate de potasse et d'ammoniaque. Depuis peu le nombre des sels doubles s'est considérablement accru, et l'on est arrivé à ce point de considérer comme sels doubles ou multiples, les substances minérales où l'analyse signale la présence simultanée d'un acide et de plusieurs bases.

23° Caractères génériques des carbonates ; carbonate de chaux ; carbonate de potasse ; potasse du commerce ; carbonate de soude ; soude du commerce ; carbonate d'ammoniaque.

Le caractère essentiel des carbonates est de faire effervescence dans l'acide nitrique. Ils sont décomposables par le feu, excepté ceux de baryte, de potasse et de soude ; mais ceux-ci se décomposent par un courant de vapeur d'eau, en produisant un hydrate et dégageant l'acide carbonique. Tous les carbonates sont insolubles dans l'eau, ceux de potasse et de soude exceptés ; plusieurs s'y dissolvent à la faveur d'un excès d'acide. A la température rouge, le carbone décompose tous les carbonates. On peut même obtenir de cette manière le potassium et le sodium, en donnant lieu à un dégagement d'oxide de carbone ; pour cela il faut une très haute température ; et quand elle vient à baisser, l'oxide de carbone réagit sur le potassiun et le sodium pour produire de la potasse et de la soude. En plongeant subitement un corps froid dans la vapeur du potassium, on en condense une portion. Le phosphore décompose les carbonates, avec précipitation de charbon et production de phosphore.

Le *carbonate de chaux* est très répandu dans la nature, où il s'offre sous mille formes différentes. Dans les laboratoires, on l'obtient en précipitant une dissolution de chaux par du carbonate de potasse.

Carbonate de potasse. Il s'obtient, comme nous l'avons dit à l'article de la potasse, en lessivant les cendres de bois ; mais alors il renferme du muriate et du sulfate de potasse, avec d'autres sels solubles. Pour l'obtenir pur, on mélange deux parties de tartrate acide de potasse, avec une partie de nitrate de potasse, projetant le mélange dans un bassin d'argent fortement chauffé, lessivant, puis évaporant.

Carbonate de soude. Il existe dans quelques plantes marines, dont on retire les cendres. On trouve encore ce sel dans plusieurs lacs de la basse Égypte et de la Hongrie, où il est produit par l'action du sel marin sur le carbonate de soude ; chose extraordinaire, puisque dans nos laboratoires le carbonate de soude est décomposé lui-même par le sel marin. On obtient le carbonate pur en faisant cristalliser

plusieurs fois celui du commerce. Pour l'extraction de la soude, voyez à l'article de la soude (page 293).

Carbonates d'ammoniaque. Il existe un carbonate neutre, qui contient 2 volumes d'ammoniaque et 1 volume d'acide carbonique, un bicarbonate, formé de volumes égaux de base et d'acide; et un troisième carbonate, qui est une combinaison des deux premiers à parties égales, renfermant ainsi 3 volumes de base et 2 volumes d'acide. Le carbonate neutre s'obtient en mêlant les deux gaz; le bicarbonate, en faisant passer du gaz acide carbonique dans une dissolution d'ammoniaque; le troisième, en chauffant le muriate d'ammoniaque avec le carbonate de chaux : c'est celui du commerce. Le bicarbonate ne peut exister sans eau. Le carbonate du commerce, exposé à un air humide, abandonne un volume d'ammoniaque et absorbe un volume de vapeur d'eau; il revient donc ainsi à l'état de bicarbonate.

24° et 25° Caractères génériques des phosphates; phosphate de chaux; phosphate d'ammoniaque : s'en servir pour rendre incombustibles les tissus les plus inflammables.— Caractères génériques des sulfates; sulfates de chaux, de soude, de magnésie; alun; sulfates de fer, de cuivre.

Les phosphates sont difficiles à reconnaître, à cause de la fixité de l'acide. Si le sel est soluble, il faut le transformer en phosphate de chaux insoluble et traiter celui-ci par l'acide sulfurique pour avoir un sulfate de chaux et un phosphate acide de chaux; on calcine ce dernier, et on obtient du phosphore dans le col de la cornue. Si le sel est insoluble, on le transforme à chaud en un sel soluble au moyen du carbonate de potasse; après quoi, on le traite comme il vient d'être dit. Tous les phosphates neutres, excepté ceux de potasse, de soude et d'ammoniaque, sont insolubles. Les phosphates alcalins sont indécomposables par la chaleur; avec le charbon, on obtient bien un peu de phosphore, mais il reste toujours un sel avec excès de base, qui ne peut plus être attaqué. Presque tous les acides transforment les phosphates neutres en phosphates acides, qui deviennent alors solubles.

Le phosphate de chaux existe dans les os, avec une petite quantité de carbonate de chaux. En calcinant les os, on les débarrasse de leur matière animale, et il ne reste qu'une matière blanche qui est le phosphate de chaux, mélangé de carbonate; c'est de là qu'on retire le phosphore.

Le phosphate d'alumine s'obtient directement. En plongeant les tissus dans une dissolution de ce sel, on les rend incombustibles; car le sel forme un enduit sur la fibre du tissu, et la préserve du contact de l'air et de la flamme.

Le caractère essentiel des sulfates est le suivant : si le sulfate est soluble, on le décompose par un sel de baryte insoluble; le sul-

fate de baryte qui en résultera est le seul des sels de baryte insolubles, qui ne se dissolve pas dans l'acide nitrique. Si le sulfate était insoluble, on commencerait par le transformer en un sel soluble, par le moyen du carbonate de potasse ou de soude. Le charbon décompose l'acide de tous les sulfates, et en même temps les oxides des quatre dernières sections, en donnant lieu à un sulfure métallique; il faut en excepter les sulfates de chaux et de strontiane, qui donnent un mélange d'oxide et de sulfure. Le potassium produit le même effet; le fer aussi, quand il est en excès. Les sulfates insolubles sont ceux de baryte, d'étain, d'antimoine, de bismuth, de plomb et de mercure; tous les autres sont plus ou moins solubles. On prépare les sulfates, soit en versant l'alcide sulfurique sur les oxides ou les carbonates, soit par la double décomposition des sels, soit en traitant à chaud le métal par l'acide sulfurique, soit enfin en grillant les sulfures dans un air humide.

Le *sulfate de chaux* se rencontre abondamment dans la nature. Une chaleur très intense le fond en un émail blanc. L'eau en dissout un peu, environ la 460e partie de son poids. C'est ce sulfate qui rend quelquefois les eaux de puits impotables, et qui décompose le savon. Mêlé à un dixième de carbonate de chaux, il constitue le plâtre de Paris.

Le *sulfate de soude* se trouve dans les eaux salées. On l'obtient en versant de l'acide sulfurique dans une dissolution de sel marin. Il se dissout dans l'eau, et ce liquide en prend le plus à 30 degrés de température. Il retient beaucoup d'eau de cristallisation.

Le *sulfate de magnésie* s'obtient par l'évaporation des eaux qui en renferment. Il sert à produire tous les sels de magnésie.

L'*alun* est un sel double de sulfate d'alumine et de sulfate de potasse. Il est soluble, incolore, et il rougit le tournesol. Le terrain volcanique de la Solfatare produit de l'alun en efflorescence; on le lessive et on le fait cristalliser. On trouve à la Tolfa, près de Rome, une roche composée d'alumine, de potasse, d'acide sulfurique et d'eau; on la calcine, puis on y verse de l'eau pour la réduire en pâte; on lessive, on fait évaporer, et l'on obtient de l'alun très pur. Une troisième manière d'extraire l'alun est de convertir, par le moyen de l'air humide, le fer sulfuré blanc en sulfate de fer et en sulfate d'alumine, ce dernier provenant de l'argile mêlée au sulfure. On dissout ces deux sulfates dans l'eau, le sulfate de fer cristallise le premier; puis on décante le sulfate d'alumine, et on le précipite par le sulfate de potasse en alun qui cristallise. On débarrasse cet alun des traces de fer qu'il contient et qui sont très nuisibles dans les arts, en le faisant cristalliser plusieurs fois. L'alun renferme 37 parties de sulfate d'alumine sur 18 parties de sulfate de potasse et 45 parties d'eau.

Le *sulfate de fer* s'obtient dans le commerce en exposant à l'air

humide du fer sulfuré blanc; mais comme ce sulfure contient deux fois plus de soufre qu'il est nécessaire pour la formation du sulfate, il se produit en outre du sulfate d'alumine, quand il se rencontre des argiles. On traite aussi le fer directement par l'acide sulfurique, pour avoir le sulfate de fer, dont les cristaux sont d'un vert clair. Le sulfate de fer en dissolution dans l'eau peut absorber une grande quantité de deutoxide d'azote, et de vert qu'il était devenir brun. Exposé à l'air, la dissolution de sulfate de protoxide de fer dont il est ici question passe bientôt à l'état de sulfate de peroxide de fer par l'absorption de l'oxigène; il se forme alors un précipité de peroxide de fer, parce que l'acide n'est plus en assez grande quantité pour neutraliser tout le peroxide de fer.

Le *sulfate de cuivre* est bleu. Pour l'obtenir, on grille le sulfure de cuivre, on lessive la masse, et le sulfate qui s'est formé se dissout; on répète la même opération jusqu'à ce que tout le sulfure soit transformé en sulfate. Bleu d'azur à l'état d'hydrate, il devient gris par la calcination. Celui du commerce contient du sulfate de fer, qu'on précipite par l'addition d'une petite quantité d'oxide de cuivre hydraté.

26° Caractères génériques des azotates; azotate de potasse, poudre. — Caractères génériques des chlorates; chlorate de potasse; poudres fulminantes.

Les azotates ou nitrates ont pour caractères essentiels de produire une vive déflagration sur les charbons ardents, et de dégager des vapeurs blanches sans effervescence dans l'acide sulfurique. Tous les nitrates se décomposent par le feu. Les plus fixes se transforment d'abord en nitrites, pour passer enfin à l'état d'oxide. Les bases qui ont peu d'affinité pour l'acide nitrique l'abandonnent tout de suite sans qu'il se décompose. Le phosphore et le soufre agissent avec violence sur les nitrates; et forment des phosphates et des sulfates. Tous les métaux, excepté ceux de la dernière section, sont attaqués par les nitrates; ils s'oxident ou s'acidifient en s'unissant à la base du sel, ou en passant au maximum d'oxidation, et il y a dégagement d'azote ou de deutoxide d'azote. Tous les nitrates sont solubles dans l'eau. Par l'action de la chaleur rouge sur les nitrates de baryte et de strontiane, on obtient ces oxides purs; on ne peut obtenir ainsi la potasse, parce qu'elle attaque tous les vases.

Le *nitrate de potasse*, ou *nitre*, ou *salpêtre*, se trouve dans les Indes à la surface du sol, et en Europe dans les lieux habités. Les circonstances favorables à la formation du nitre sont des pierres poreuses de carbonate de chaux, de l'air très humide, une température d'environ 15 degrés; les matières végétales et animales y concourent aussi, mais leur présence n'est pas indispensable comme on l'avait cru. La matière salpêtrée doit être lessivée pour en ex-

traire le salpêtre, qui se trouve avec des nitrates de chaux et de magnésie, et des muriates de potasse, de chaux, de magnésie et de soude. On transforme les nitrates de chaux et de magnésie en carbonates, en y versant du carbonate de potasse. On forme ainsi une nouvelle quantité de nitre, qui n'est plus mélangé qu'avec les muriates. On évapore, on fait cristalliser, et on a le nitre ou salpêtre brut. Pour le raffiner, on le dissout dans l'eau chaude, que l'on refroidit subitement, ce qui opère la cristallisation du nitre; alors tous les chlorures, ou à peu près, restent dans l'eau que l'on décante. On clarifie la dissolution avec un peu de colle.

La poudre à canon est un mélange de nitre, de soufre et de charbon. Les proportions, pour la poudre de guerre, sont : 75 de nitre, 12 1/2 de soufre et autant de charbon; pour la poudre de chasse, 78 de nitre, 12 de charbon et 10 de soufre; pour la poudre de mine, 65 de nitre, 15 de charbon et 20 de soufre. Le charbon que l'on emploie dans la fabrication de la poudre, doit être extrait de bois légers, et doit contenir le plus possible d'hydrogène; on obtient ce charbon en vases clos et sans pousser trop loin la carbonisation. Quant au salpêtre et au soufre, ils doivent être parfaitement purs. Ces trois éléments de la poudre sont réduits séparément en poussière impalpable dans des tonneaux contenant des gobilles de cuivre, et tournant sur des axes avec rapidité. Le mélange s'opère ensuite d'une manière intime, en faisant rouler avec de la grenaille de plomb dans un tambour, les poudres de salpêtre, de soufre et de charbon, prises en quantités déterminées. Puis on ajoute 14 pour cent d'eau à une portion du mélange, que l'on passe à travers un tamis, et que l'on fait rouler ensuite dans un tambour, pour obtenir de petits grains ronds; ceux-ci deviennent les noyaux de grains, que l'on obtient en ajoutant le reste du mélange et le faisant tourner dans les tambours. La poudre ainsi grenée est passée sur trois tamis; les grains les plus gros forment la poudre à canon, les moyens donnent la poudre à fusil, et les plus petits servent de noyaux pour une opération subséquente.

Les *chlorates* fusent sur les charbons ardents avec un effet plus marqué que pour le nitre. Cela est dû au dégagement subit de l'oxigène de l'acide chlorique, qui rend la combustion du charbon plus rapide. En versant de l'acide sulfurique sur un chlorate, il se dégage du deutoxide de chlore, et il se forme un sulfate et un hyperchlorate. Tous les chlorates sont solubles; de là la difficulté de séparer le chlorate du chlorure, lorsque ces deux produits se forment par l'action du chlore sur les oxides. On réussit mieux en combinant directement l'acide chlorique avec les bases. Les chlorates servent à brûler beaucoup de substances.

Le *chlorate de potasse* est le seul employé; il est vingt fois plus soluble à chaud qu'à froid. On en extrait l'oxigène pur, à l'aide de la chaleur. Il ne renferme pas d'eau de cristallisation. Un mé-

lange de chlorate de potasse et de soufre détonne par la percussion. L'acide sulfurique concentré, versé sur un mélange de chlorate de potasse et de benjoin, y détermine l'inflammation. On fait des allumettes avec le chlorate de potasse ; on avait proposé de le substituer au nitre dans la confection de la poudre de guerre ; on en fait de la poudre d'amorce, qui s'enflamme par la percussion.

27° et 28° Caractères génériques des chlorures; chlorures de sodium, de barium; bichlorure d'étain, protochlorure d'antimoine; chlorures de mercure, d'or, de platine; chlorure de cobalt; encres sympathiques.

La combinaison d'un hydracide avec une base est telle que l'hydrogène de l'acide est à l'oxigène de la base dans le rapport des éléments de l'eau. En plaçant le métal en contact direct avec le chlore gazeux, il se forme un chlorure, avec dégagement de chaleur et quelquefois de lumière ; mettant ensuite ce chlorure dans l'eau, on obtient un composé qui a toutes les propriétés de celui qu'on forme en combinant l'acide hydrochlorique avec l'oxide du métal. Il résulte de là et de plusieurs autres faits analogues, qu'il est assez difficile de décider si un chlorure, dissous dans l'eau, se transforme en hydrochlorate, ou, au contraire, si un hydrochlorate n'est pas un chlorure simplement hydraté. Nous admettrons comme plus simple, cette dernière opinion.

Le caractère distinctif des chlorures consiste en ce que, si l'on y verse un sel d'argent, il se précipite un chlorure d'argent, insoluble dans les acides et soluble dans l'ammoniaque. Si le chlorure était insoluble, on commencerait par le transformer en un sel soluble, par le contact du zinc, qui donne naissance à un chlorure de zinc soluble. Les chlorures alcalins sont fusibles, indécomposables par la chaleur et par les composés qui ne contiennent pas d'hydrogène ; ils sont tous solubles.

Le *chlorure de sodium* ou *sel marin* se trouve dans les eaux de mer, d'où on le retire par évaporation ; à l'état de roche, ou de *sel gemme*, dans les couches de la terre ; enfin il y a des sources d'eau salée, qui viennent probablement du sel gemme dissous par les eaux de pluie. On en retire aujourd'hui la soude, en le calcinant avec de la craie et du charbon.

Le *chlorure de barium* s'obtient en calcinant un mélange de sulfate de baryte avec du sel marin, dissolvant et filtrant. Il colore la flamme d'alcool en jaune, tandis que le chlorure de strontiane la colore en rouge.

Le *bichlorure d'étain* se fait en mélangeant du bichlorure de mercure avec un amalgame d'étain susceptible d'être pulvérisé ; on chauffe légèrement, et il se produit des vapeurs épaisses, qui se condensent en un liquide jadis nommé liqueur fumante de Libavius ; c'est le bichlorure d'étain. Mise dans l'eau, elle s'échauffe, devient moins volatile et finit par cristalliser.



Le *protochlorure d'antimoine* est volatile. On l'obtient en chauffant du bichlorure de mercure avec de l'antimoine en poudre, puis condensant la vapeur : c'est le *beurre d'antimoine*. En y versant de l'eau, il se précipite un oxichlorure d'antimoine. Pour avoir le protochlorure d'antimoine, on pourrait dissoudre le sulfure d'antimoine dans l'acide hydrochlorique, évaporant, puis sublimant. Il sert à brûler les morsures des animaux enragés. Quant au bichlorure d'antimoine, on l'obtient en dissolvant l'antimoine dans l'eau régale.

Le *protochlorure de mercure*, ou *sublimé doux*, se forme en chauffant ensemble du protosulfate de mercure et du sel marin ; le chlorure se sublime. Le *bichlorure de mercure*, ou *sublimé corrosif*, s'obtient en chauffant un mélange de sulfate de mercure et de sel marin. On place la fiole qui le contient dans un bain de sable ; le chlorure se sublime et s'attache au col de la fiole sous forme de petites aiguilles. Il est peu soluble, très vénéneux. Il cristallise par refroidissement et ne retient point d'eau.

Le *chlorure d'or* se prépare en faisant agir l'eau régale sur l'or métallique. En y versant du sulfate de fer, l'or est précipité, et sert ensuite à la dorure sur porcelaine ; ajoutant du protochlorure d'étain au chlorure d'or, il se précipite une poudre, variable dans sa composition, et qu'on appelle *pourpre de Cassius*, laquelle sert à faire les rouges et les violets sur la porcelaine.

Le *chlorure de platine* se forme par l'action de l'eau régale sur la mine de platine, qui renferme quatre autres métaux ; on a d'abord un liquide d'un rouge foncé. On sépare trois de ces métaux étrangers en versant dans la dissolution du muriate d'ammoniaque, qui précipite des chlorures de platine et d'iridium seulement. On dissout ces derniers, et comme l'eau attaque plus vite celui d'iridium, on a celui de platine aussi pur qu'on le veut.

Le *chlorure de cobalt* s'obtient directement en versant de l'acide muriatique sur l'oxide de cobalt : c'est l'encre de sympathie ; concentrée, elle est bleue ; étendue d'eau, elle est rose pâle. Le chlorure de fer étant jaune, si on le mélange avec du chlorure de cobalt, il en résultera une encre sympathique verte.

29. Chlorohydrate d'ammoniaque ; silicates, verres, poteries, mortiers et mastics ; pierres précieuses.

Le *chlorohydrate d'ammoniaque*, ou muriate d'ammoniaque, s'obtient en chauffant un mélange de sulfate d'ammoniaque et de sel marin. En Égypte, on le tire des excréments des chameaux ; il suffit de les brûler et de sublimer la suie qui en résulte. On l'emploie dans la soudure et l'étamage, pour dissoudre les oxides qui se forment au feu, et conserver les métaux purs.

Les *silicates*, quoique très nombreux, n'ont été bien étudiés que depuis une vingtaine d'années. La silice joue le rôle d'acide à l'é-

gard des bases, et dans les sels qui en résultent, il y a un rapport constant entre l'oxigène de l'acide et l'oxigène de la base ; bien plus, les bases peuvent se remplacer mutuellement dans les silicates multiples, sans altérer la forme des cristaux. De cette manière, on fait la somme des quantités d'oxigène de toutes les bases du silicate, et c'est cette somme que l'on compare à la quantité d'oxigène de la silice, pour savoir si le sel composé est un silicate, un bisilicate, etc. Tous les silicates sont indécomposables par la chaleur ; les uns sont fusibles plus ou moins aisément, et les autres sont infusibles; il n'y a de solubles dans l'eau que les silicates basiques de potasse et de soude ; ils sont tous attaquables par l'acide fluorique. La plupart peuvent se préparer par les doubles décompositions, ou en chauffant dans un creuset de platine la silice et les oxides que l'on veut unir.

Le *verre* est un silicate de potasse ou de soude, mêlé de silicates de chaux, d'alumine, de fer. Il se fabrique en opérant la fusion dans des creusets d'argile, du sable purifié, des carbonates de soude, de potasse, de chaux. On y ajoute du peroxide de plomb ou minium, pour obtenir le cristal artificiel. Les verres se colorent en rouge par le pourpre de Cassius et le protoxide de cuivre ; en bleu, par l'oxide de cobalt ; en vert, par l'oxide de chrôme, le deutoxide de cuivre, ou par un mélange d'oxide de cobalt, d'acide antimonieux et d'oxide de plomb ; en jaune, par l'oxide d'urane, le chrômate de plomb, ou par des composés d'oxide de plomb et d'acide antimonieux; en violet, par l'oxide de manganèse et le pourpre de Cassius; en noir, par un mélange d'oxides de fer, de manganèse et de cobalt.

Les *poteries* ont toutes pour base l'argile plus ou moins pure, qui est un mélange intime ou une combinaison de silice et d'alumine en proportions diverses. Le kaolin est une argile blanche qui provient de la décomposition d'une roche appelée feldspath ; il est la base de la porcelaine.

Le *mortier* se fait ordinairement avec de la chaux vive et du sable ; mais on trouve dans la nature des mélanges intimes d'argile et de carbonate de chaux, qui, calcinés comme la pierre à chaux, donnent une chaux très forte, capable de durcir sous l'eau, et connue sous le nom de chaux hydraulique ; on en fait aussi d'artificielle. Au lieu de sable, on peut joindre à la chaux de la brique pilée. On augmente la force de la chaux hydraulique, en éteignant celle-ci avec de l'eau bouillante, faisant aussitôt le mélange avec la brique pilée, et employant immédiatement ce mortier encore fumant.

Le *mastic* dont on recouvre les terrasses est formé de 9 parties de briques pilées, 1 de litharge, avec une certaine quantité d'huile de lin, pour donner au mélange la consistance du plâtre gâché. On l'étend à la manière du plâtre, après avoir humecté d'eau les corps sur lesquels on veut le mettre.

Parmi les *pierres précieuses artificielles*, on distingue le *strass*, qui est un verre blanc imitant le diamant, composé de silice, de potasse, d'acide borique, d'oxide de plomb, et quelquefois d'acide arsénieux. On obtient le beau strass en combinant ensemble 6 onces de cristal de roche, 9 onces de minium, 3 onces 3 gros de potasse, 3 gros d'acide borique, et 6 grains d'acide arsénieux.

C'est en colorant le strass qu'on imite les autres pierres précieuses. Ainsi la *topaze* artificielle résulte de 1 once 6 gros de strass, 43 grains de verre d'antimoine, et 1 grain de pourpre de Cassius; le *rubis*, de 1 partie de topaze artificille opaque avec 8 parties de strass, traitées au chalumeau; ou bien de 5 onces de strass et 1 gros d'oxide de manganèse; l'*émeraude*, de 8 onces de strass, 42 grains d'oxide de cuivre, et 2 grains d'oxide de chrôme; le *saphir*, de 8 onces de strass très blanc et 68 grains d'oxide de cobalt très pur; l'*améthyste*, de 1 livre de strass, 15 à 24 grains d'oxide de manganèse, et 1 grain d'oxide de cobalt; le *grenat*, de 7 gros 8 grains de strass, 3 gros 40 grains de verre d'antimoine, 2 grains de pourpre de Cassius et autant d'oxide de manganèse. Il faut bien pulvériser ces mélanges, les tamiser, les mettre au creuset et les chauffer durant 24 à 30 heures, en laissant s'éteindre le feu graduellement.

30 et 31. Généralités sur les matières végétales et animales.

Les fonctions des êtres vivants se composent d'actions en partie mécaniques et en partie chimiques, mais cette distinction n'est fondée que sur l'imperfection de nos organes et de nos moyens d'observation. Dans la nature inorganique, les phénomènes ne dépendent que des affinités chimiques et de l'arrangement des molécules. Dans la nature organique on donne le nom de forces vitales à celles qui produisent les phénomènes qu'on ne peut expliquer par l'affinité ou la structure, forces tout-à-fait inconnues et qui ne font que masquer notre ignorance. On distingue dans les êtres vivants des parties organisées et des parties simplement organiques, celles-ci étant produites par les organes, et devant servir au développement de ces organes ou être rejetées à l'extérieur. Les parties organisées sont nécessairement solides, et les parties organiques sont fluides.

Les corps organiques sont composés d'oxigène, d'hydrogène, de carbone et d'azote, pris deux à deux, trois à trois, ou tous ensemble, et combinés avec plus ou moins de silice, d'alumine, de sel marin, de soufre, de phosphore, de phosphate de chaux, de carbonate de chaux, et de quelques oxides métalliques.

Les substances qui existent dans les corps organisés à un état de combinaison définie, prennent le nom de *matières immédiates*. La séparation de ces substances est le point le plus difficile; pour y parvenir on emploie quelques dissolvants tels que l'eau, l'alcool,

et quelquefois des alcalis et des acides étendus pour qu'ils n'altèrent pas les combinaisons qu'il s'agit d'examiner. Car une fois les matières organiques décomposées, il est impossible de les recomposer; parce qu'à l'exception du carbone, les éléments de la nature organique sont gazeux, et que pour opérer l'union de ces gaz avec le charbon, il faudrait les prendre à l'état naissant, ce qui, dans l'état actuel de la science, exigerait l'emploi d'agents trop puissants, d'agents dont la présence suffirait pour détruire la combinaison elle-même. C'est dans l'acte de la végétation et de la nutrition que la nature crée tous ces produits organiques, qui ne diffèrent que par les proportions des parties constituantes, et que la chimie parviendra peut-être un jour à imiter, tandis qu'il est absurde de supposer qu'elle réussisse jamais à former des corps organisés.

Les combinaisons des trois ou quatre éléments organiques principaux donnent naissance à un si grand nombre de substances organisées différentes, que certains chimistes ont pensé qu'elles n'obéissaient pas aux lois des proportions définies, ou plutôt qu'il n'y avait pas de rapport simple entre les éléments constituants. Il est difficile de résoudre cette question. Cependant, quelques-unes de ces substances, analysées avec soin, ont donné des rapports simples en composition. Quant aux autres substances qui ne présentent pas la même simplicité dans le rapport de leurs éléments, on pourrait les regarder comme résultant de la combinaison de plusieurs matières bien définies.

Toutes les fois qu'une matière organique renferme plus de deux éléments, il est rare qu'elle ne se transforme pas en substances binaires, plus simples ou plus stables, par l'action de la chaleur, comme cela se voit déjà pour les composés inorganiques. Ainsi, par un feu modéré, toute substance végétale peut se réduire en eau, en acide carbonique et autres gaz. Pour que toute la matière soit décomposée, il faut que la cornue qui la contient communique par son col à un tube de porcelaine plus échauffé : alors on obtient de l'eau, de l'acide carbonique, de l'oxide de carbone, de l'hydrogène plus ou moins carboné ; le charbon et les matières minérales restent au fond de la cornue. Ce charbon a l'aspect métallique. Pour savoir la quantité qu'il y en a, on le brûle au contact de l'air, et les cendres qui restent sont formées des matières minérales. Si la substance organique n'était pas subitement portée à une haute température, il se formerait des huiles qu'on a nommées *huiles empyreumatiques*. Les substances azotées présenteraient des résultats plus compliqués, car elles fourniraient en outre de l'ammoniaque, du carbonate d'ammoniaque, de l'acide hydrocyanique, de l'hydrocyanate d'ammoniaque et de l'acide acétique. Quand on veut faire l'analyse d'une pareille substance, il faut éviter avec soin la formation de tous ces produits, et obtenir l'azote libre,

C'est pourquoi il serait utile de savoir d'avance combien il faut ajouter d'oxigène à une substance organique pour former de l'eau et de l'acide carbonique seulement, l'azote devant rester libre.

Voici quel procédé on suit généralement pour faire l'analyse des corps organiques. On prend 20 parties de deutoxide de cuivre pour une partie de la substance organique préalablement desséchée ; on mêle bien le tout ensemble, et l'on introduit ce mélange dans un tube de verre fermé par un bout, et soudé par l'autre bout à un tube étroit, recourbé, et plongeant sous une éprouvette pleine de mercure. On chauffe jusqu au rouge. On mesure l'acide carbonique qui se produit, et l'on pèse, si l'on veut, l'eau qu'on fait absorber par du chlorure de calcium. La diminution de poids qu'a subi l'oxide de cuivre, représente le poids de l'oxigène employé à brûler la substance organique. Si celle-ci contenait de l'azote, il faudrait prévenir la formation du deutoxide d'azote, en mettant en avant du mélange une certaine quantité de cuivre métallique, qui enlève au deutoxide d'azote son oxigène, et remet l'azote en liberté.

ZOOLOGIE.

QUESTIONS GÉNÉRALES.

1. Définition générale des corps organisés animaux, par comparaison avec les corps organisés végétaux et avec les corps inorganisés, en ayant successivement égard : 1° A la composition chimique ou moléculaire ; 2° A la structure anatomique ou textulaire ; 3° A la forme considérée d'une manière générale, et aux limites dont elle est susceptible ; 4° A l'origine, à la formation ou naissance ; 5° Au mode d'accroissement, par suite de la nutrition ; 6° Au mode de destruction, de décomposition, par suite de la mort.

Il existe dans la nature trois grandes classes de corps : les corps organisés animaux, les corps organisés végétaux, et les corps inorganisés ou masses minérales. Les principales différences qui les distinguent se manifestent clairement à l'esprit, lorsqu'on les compare successivement sous les rapports de la composition chimique, de la structure, de la forme considérée d'une manière générale, de l'origine, du mode d'accroissement et du mode de destruction.

1° De la composition chimique.

La composition chimique ou atomique des minéraux est très variée, et quelquefois très complexe : ce sont pour la plupart des combinaisons de plusieurs des cinquante-quatre espèces d'atomes ou d'éléments dont les chimistes ont reconnu l'existence, et ces combinaisons sont généralement remarquables par leur fixité, ou leur résistance à la décomposition. Les corps organisés au contraire sont composés d'un très-petit nombre de ces éléments, les autres restant complètement étrangers à cette classe de corps ; ceux qu'on y rencontre le plus ordinairement sont l'oxigène, l'hydrogène, le carbone et l'azote. Ces quatre éléments principaux se réunissent en proportions très diverses, et les combinaisons qui en résultent ont peu de stabilité. La composition chimique des animaux et des végétaux est donc à peu près la même : cependant, on peut dire qu'en général, l'azote prédomine dans les premiers, tandis que le carbone abonde dans les seconds, ou, d'ailleurs, l'azote manque le plus souvent.

2° De la structure textulaire ou moléculaire.

Les corps organisés ont une structure textulaire que l'anatomie

nous révèle : ils sont formés d'un ou de plusieurs tissus séparables, dont les modifications ou combinaisons diverses constituent les différents organes que l'on remarque en eux ; de l'ensemble plus ou moins compliqué de ces organes résulte ce que l'on nomme *l'organisation* dans cette classe de corps. L'organisation des animaux diffère surtout de celle des végétaux, en ce que les premiers ont de plus que les seconds deux espèces importantes de tissus élémentaires, savoir ceux qui forment les nerfs et les muscles. Les minéraux sont dépourvus d'organisation et par conséquent de structure. textulaire : ils n'ont donc qu'une structure moléculaire, c'est-à-dire que leur masse est le résultat d'une simple juxtaposition de molécules le plus souvent semblables; car tandis que les corps organisés sont essentiellement hétérogènes, la structure des minéraux peut être, et est ordinairement la même dans toute la masse, dont les plus petites parties, prises séparément, possèdent les propriétés du tout.

3° De la forme en général.

Les corps organisés, quand ils ont atteint tout leur développement, ont une forme déterminée, à surfaces le plus souvent arrondies, et cette constance de forme tient à ce que chaque espèce de corps résulte d'une même combinaison d'organes. Le corps inorganisé n'a point de forme fixe; sa forme peut varier à l'infini, par suite de la manière dont sa masse s'accroît, et de l'indépendance des parties qui la constituent.

4° De l'origine.

Un corps organisé quel qu'il soit, provient toujours d'un autre corps organisé qui l'a précédé, et qui lui ressemblait en tout point : cette origine prend le nom de naissance. Le corps inorganisé ne naît point, il se forme quand une circonstance quelconque met en présence des molécules de même nature, que leur attraction mutuelle détermine à se réunir.

5° Du mode d'accroissement.

Le corps organisé s'accroît à l'intérieur par intussusception ou nutrition, c'est-à-dire par le transport et le dépôt de nouvelles molécules dans toutes les parties de sa masse; de telle sorte que toutes ces parties se développent à la fois, et que leur composition atomique varie et se renouvelle sans cesse. Le corps inorganisé s'accroît par juxtaposition à l'extérieur de molécules nouvelles, qui ne font qu'envelopper de couches successives la masse déjà formée, sans que celle-ci éprouve de changement.

6° Du mode de destruction.

Le corps organisé ne peut s'accroître et se maintenir sous une

forme déterminée que pendant un certain temps, après lequel arrive sa mort, ou la cessation de la vie, principalement caractérisée par le mouvement interne de la nutrition. Les corps organisés ont donc une durée limitée, et chez eux la mort est une suite nécessaire de la vie. Il n'y a point au contraire de limite nécessaire à l'accroissement et à la durée des corps inorganisés; une fois formés, ils continuent d'exister, tant qu'une force étrangère à leur constitution ne vient pas les décomposer ou désunir leurs molécules; ils ne renferment par conséquent en eux-mêmes aucune cause réelle de destruction.

2. Définition de ce que l'on entend par *caractères* en général et par caractères *naturels*, *artificiels*, *positifs*, *négatifs*, et par *subordination de caractères*, pour parvenir à la conception et à l'établissement d'une disposition méthodique des animaux.

On nomme en général *caractères* toutes les qualités ou propriétés par lesquelles un corps diffère et peut être distingué des autres, soit d'une manière absolue, soit d'une manière relative. Un caractère est *positif*, quand il indique une qualité dont le corps est réellement pourvu ; il est *négatif*, quand il énonce une particularité qui manque au contraire à ce corps et se trouve dans ceux auxquels on le compare. Tous les caractères n'ont point la même valeur respective; il en est qui sont plus constants, plus importants que les autres, et dénotent par conséquent des différences plus profondes. Pour apprécier avec justesse le degré de ressemblance ou de différence de deux corps, il ne suffit pas de tenir compte du nombre des caractères qui leur sont communs, mais chacun d'eux doit entrer dans le calcul suivant sa valeur relative, de manière qu'un seul caractère très important soit équivalent ou même supérieur à plusieurs caractères de moindre valeur. En zoologie, les caractères de première valeur sont ceux qui se tirent des parties qui jouent le principal rôle dans l'organisation, et qui ne peuvent subir de modifications, sans que toutes les autres parties n'en éprouvent de plus ou moins considérables. En comparant ainsi les caractères sous le rapport de l'influence plus ou moins grande qu'ils exercent sur l'ensemble de l'organisation, on détermine l'ordre de leur importance relative; cette subordination des caractères une fois reconnue, on parvient à concevoir la possibilité d'établir une disposition méthodique dans la série animale, en formant un échafaudage de divisions et de subdivisions successives, auxquelles présideront les différents caractères pris dans l'ordre de plus grande valeur. On a distingué aussi les caractères en absolus et relatifs; ces derniers sont ou naturels ou artificiels. Les caractères naturels sont ceux qui, étant tirés des organes les plus importants, servent à rapprocher les êtres qui ont entre eux le plus de ressemblance; un caractère artificiel est au contraire celui qui est emprunté indif-

féremment de telle ou telle partie, quelle que soit sa valeur, pourvu qu'elle soit apparente. Il est employé dans les classifications auxquelles on donne les noms de systèmes ou de méthodes systématiques.

3. Exposition des principes des différentes sortes de distributions méthodiques des animaux, connues sous le nom de *systèmes*, de *méthode systématique*, *dichotomique*, de *méthode naturelle*, et, par suite, de ce qu'on entend ou doit entendre par *individu, variété, genre, famille, ordre, classe, embranchement, type* et *règne*.

Les classifications en histoire naturelle sont des catalogues raisonnés, dans lesquels les êtres que l'on étudie et que l'on veut comparer et distinguer entre eux, sont groupés par divisions et subdivisions successives, d'après leurs différents degrés de ressemblance. La totalité des êtres, qui forme ordinairement ce que l'on nomme un *règne*, est d'abord partagée en un petit nombre de grandes divisions qu'on appelle *types* ou *embranchements*, et dont chacune comprend les êtres qui se ressemblent par quelque propriété d'une haute importance; chaque embranchement, à son tour, se partage en divisions moins grandes, qu'on nomme *classes*, dans lesquelles les corps offrent d'autres points de ressemblance; chaque classe se subdivise en groupes moins étendus, appelés *ordres* ou *familles*; chaque famille se subdivise de même en *genres*; chaque genre en *espèces*; chaque espèce en *variétés*, dont chacune est la réunion d'un grand nombre d'*individus* pareils. Ces classifications sont des espèces de dictionnaires, où les objets que l'on cherche sont rangés d'après leurs propriétés, et où les caractères placés en tête des divisions jouent le rôle des lettres de l'alphabet dans un dictionnaire ordinaire.

On donne le nom d'*individu* à chaque animal pris isolément, et qui forme comme un tout qui ne peut être divisé sans cesser d'être lui-même. La réunion de tous les individus qui se reproduisent entre eux avec les mêmes caractères essentiels, forme un être collectif que l'on appelle *espèce*. L'espèce se compose donc de tous les êtres organiques qui sont nés les uns des autres ou de parents communs, et de tous ceux qui leur ressemblent autant qu'ils se ressemblent entre eux. Parmi les individus d'une espèce, il en est qui, tout en offrant les mêmes caractères essentiels, diffèrent néanmoins entre eux par quelque modification peu importante et due à des causes accidentelles; on donne le nom de *variété* à tous ceux qui présentent une semblable modification. En comparant les espèces entre elles, on en trouve qui se ressemblent beaucoup par l'ensemble de leur organisation, sans jamais cependant pouvoir se changer l'une dans l'autre : on réunit les espèces voisines dans de petits groupes appelés *genres*. Les genres qui ont entre eux le plus d'analogie composent, à leur tour, des tribus nouvelles appelées *familles*, et qui ne sont rien autre chose que des genres

d'un ordre plus élevé, et ainsi de suite, jusqu'aux divisions supérieures du règne.

On distingue plusieurs sortes de classifications, parmi lesquelles les principales sont celles que l'on nomme *méthodes analytiques* ou *dichotomiques*, *méthodes artificielles* et *méthodes naturelles*. Les méthodes dichotomiques n'ont pas d'autre but que de faire arriver par une route sûre et facile au nom d'un animal ou d'un végétal, d'après les caractères les plus frappants qu'il porte toujours avec lui. S'il s'agit, par exemple, du règne végétal auquel cette sorte de méthode a été heureusement appliquée par Lamarck, dans sa *Flore française*, le règne est d'abord partagé en deux grandes divisions, tellement tranchées que l'on peut apercevoir tout de suite dans laquelle des deux se trouve la plante que l'on cherche, ce qui réduit à moitié la difficulté du choix; chacune de ces divisions est de même partagée en deux parties, puis chacune de ces parties en deux autres, jusqu'à ce que, par une suite de pareilles bissections, on arrive à n'avoir plus de choix à faire qu'entre deux plantes, dont l'une soit la plante dont on cherche le nom. En tête de chacune de ces bifurcations sont placés deux caractères contradictoires qui, présentés en regard et sous forme de questions, ne laissent de choix qu'entre deux propositions opposées. On choisit celle qui convient à la plante que l'on a sous les yeux, et l'on est conduit par un numéro de renvoi à d'autres questions, et ainsi successivement, jusqu'à ce que l'on parvienne à celle qui doit faire connaître le nom cherché.

Les *méthodes artificielles*, que l'on appelle communément *systèmes*, ont, comme les précédentes, pour but principal de faire trouver avec plus ou moins de facilité le nom des êtres qui s'y trouvent inscrits; en même temps, ils nous les font connaître comparativement sous certains rapports, qui ne sont pas les plus importants ou les vrais rapports naturels. Ce qui les distingue, c'est que les caractères des principales divisions sont tirés des modifications que présente un seul organe choisi arbitrairement et suivi dans toute la série des êtres.

Les *méthodes naturelles* ont pour principal but de faire connaître les vrais rapports naturels des êtres que l'on veut étudier; leurs divisions ne sont point fondées sur les modifications d'un seul organe, mais sur l'ensemble de l'organisation; les caractères offerts par toutes les parties essentielles concourant à les former, chacun dans l'ordre de sa valeur relative. Dans ces méthodes, dont le perfectionnement est l'objet des travaux de tous les naturalistes de notre âge, les êtres dont un groupe se compose ont entre eux d'autant plus de ressemblance que ce groupe est moins élevé dans la hiérarchie des divisions; et, par la place que chacun d'eux occupe dans la méthode, on peut se faire une idée exacte de sa nature et de ses rapports avec tous les autres.

4. Donner la définition et les principes de *la nomenclature*, appliquée à la dénomination et à la classification méthodique des animaux.

Les principes de nomenclature universellement admis aujourd'hui dans les règnes organiques sont ceux que Linnée a établis le premier, et qui consistent à composer le nom d'un animal ou d'un végétal de deux mots, l'un substantif, l'autre adjectif. S'il avait fallu avoir un nom distinctif pour chaque espèce, le nombre en zoologie en eût été véritablement prodigieux. Linnée eût l'heureuse idée de ne désigner par des noms substantifs que les genres, beaucoup moins nombreux que les espèces : ces noms, communs à toutes les espèces d'un genre et analogues en quelque sorte à nos noms de famille, sont appelés *noms génériques*; tels sont ceux de lièvre, de lézard, que l'on applique à un grand nombre d'espèces différentes. Pour avoir maintenant une dénomination qui soit propre à chacune des espèces du genre, on ajoute au nom générique une épithète qui indique quelque particularité de l'espèce. (Ex. : lièvre commun; lièvre variable; lézard gris; lézard ocellé.) Ces adjectifs qui varient d'une espèce à l'autre dans le même genre, et qui correspondent à nos noms de baptême, sont les *noms spécifiques*.

Mais la nomenclature de la science ne se borne pas à ces deux classes de noms : elle comprend encore tous les noms systématiques par lesquels on désigne dans la méthode tous les êtres collectifs ou tous les groupes d'êtres, plus ou moins étendus, qui en constituent les divisions successives. Le règne animal, par exemple, se partage, selon Cuvier, en quatre embranchements qui sont : les *vertébrés*, les *mollusques*, les *articulés* et les *rayonnés*. Selon M. de Blainville, il se partage en cinq types, qui sont ceux des *ostéozoaires*, des *entomozoaires*, des *malacozoaires*, des *actinozoaires*, des *amorphozoaires* (ou animaux sans forme déterminée).

Chaque embranchement ou type se subdivise en un certain nombre de classes. Celui des vertébrés ou ostéozoaires, par exemple, en quatre classes selon Cuvier (mammifères, oiseaux, reptiles et poissons); en cinq, selon M. de Blainville, qui ajoute, entre les reptiles et les poissons la classe des amphibiens. Chaque classe se divise en ordres, dont chacun a sa dénomination propre; celle des mammifères, par exemple, en *bimanes*, *quadrumanes*, *carnassiers*, *édentés*, *rongeurs*, *etc.*

5. Donner une idée générale de ce que l'on entend par distribution *géographique des animaux* à la surface de la terre, ou de la *géographie zoologique*.

Les animaux, comme les végétaux sont soumis, dans leur distribution à la surface du globe, à un certain nombre de lois

dont la recherche est l'objet de la *géographie zoologique*, une des branches les plus importantes de la zoologie générale. Chaque forme animale ou végétale est appelée par son organisation même à se développer dans de certaines conditions que la nature lui destine; elle ne peut vivre et se propager que dans les milieux et les localités où l'influence des circonstances extérieures favorise l'action de la vie, au lieu de lutter contre elle avec avantage; elle a donc en quelque sorte une patrie naturelle, ou un système de stations qui lui est propre. Ainsi, il doit y avoir un rapport nécessaire entre les stations des animaux, c'est-à-dire les conditions spéciales des lieux où ils vivent, et l'espèce de séjour qui leur est destiné et imposé par la nature de leur organisation. On voit en effet beaucoup de genres confinés dans de certaines régions dont ils ne sortent jamais; ils paraissent appartenir exclusivement à certaines zones ou à une réunion particulière de conditions climatériques. Dans plusieurs familles, le nombre des espèces semble partir d'un lieu central et diminuer à mesure que l'on s'en éloigne, en sorte qu'il est possible d'assigner les limites qui circonscrivent leurs habitations. La plupart des races sont demeurées dans les environs de leur berceau, à l'exception de celles que l'homme a réduites en domesticité; ce n'est que parmi les animaux qui possèdent des moyens de déplacement favorables, comme les oiseaux et les poissons, que l'on trouve quelques espèces auxquelles on peut donner le nom de cosmopolites. Si les espèces cosmopolites sont rares, il y a un grand nombre de genres au contraire qui ont des représentants sous toutes les zones, surtout parmi les mollusques, les poissons et les oiseaux. Chez les reptiles et les mammifères, la patrie des espèces a généralement des limites assez resserrées, et il en est souvent de même de celle de familles entières. Ainsi, notre crapaud commun ne se retrouve plus hors de l'Europe occidentale; les civettes, les roussettes, les singes à callosités sont exclusivement propres à l'ancien continent; les quadrumanes à queue prenante, les coatis, les sarigues, les oiseaux-mouches appartiennent au contraire à l'Amérique, les monotrèmes à l'Australie, etc. Buffon a remarqué le premier que les animaux du midi de l'ancien monde et ceux de l'Amérique du sud, diffèrent toujours spécifiquement, et que ce n'est que dans le nord que les espèces sont communes à l'un et à l'autre continent. L'étude des stations, des habitations des animaux, de la prépondérance ou de l'existence exclusive de certains genres ou de certaines familles dans telle ou telle région, constitue la géographie zoologique. Cette science, en nous faisant connaître les lois de la répartition des animaux à la surface de la terre, nous donne les moyens de prévoir avec certitude quelles sont, dans les contrées lointaines, les espèces étrangères à notre sol que l'on pourrait y acclimater utilement.

QUESTIONS SPÉCIALES.

6. Quelles sont les différences principales que présentent les animaux, considérés sous le rapport de la forme générale et du volume?

Les animaux présentent de grandes différences, lorsqu'on les considère sous le rapport de la forme générale et du volume. Et d'abord, quant au volume, il varie beaucoup comme tout le monde le sait, dans la même classe, et ces variations paraissent être en rapport avec la nature du milieu qu'occupe l'animal, l'étendue des régions où son habitation est circonscrite, et la nature de la proie dont il fait sa nourriture. C'est parmi les animaux aquatiques (cétacés et poissons) que se rencontrent les animaux les plus volumineux ; c'est dans les grands espaces continentaux, et particulièrement dans les contrées chaudes des tropiques, qu'habitent les mammifères et les reptiles les plus gigantesques, les éléphants, les girafes, les hippopotames, les boas ; les oiseaux de haute stature, tels que les autruches et les casoars. A mesure que l'on se rapproche des pôles, les espèces, en même temps qu'elles deviennent moins nombreuses, diminuent de taille d'une manière très sensible.

Mais des différences bien plus importantes se remarquent chez les animaux, lorsqu'on vient à les étudier sous le rapport de la forme générale. On conçoit l'utilité d'une pareille étude, en observant que la forme est le résultat de l'arrangement des systèmes d'organes à l'intérieur, et qu'elle traduit toujours à l'extérieur la disposition du système nerveux, qui est le système dominateur, et par suite, l'ensemble de l'organisation interne. D'après la forme générale, les animaux peuvent être rangés sous trois grandes divisions : les uns ont une forme déterminée, dans laquelle les parties affectent une disposition bilatérale ou symétrique de part et d'autre d'un plan ; ce sont les animaux pairs (ou *zygomorphes*). D'autres ont une forme déterminée, mais rayonnante, dans laquelle les parties sont disposées symétriquement en rayonnant autour d'un centre ; ce sont les animaux rayonnés (ou *actinomorphes*). D'autres enfin, sont tout-à-fait irréguliers et sans forme déterminée; ce sont les animaux *amorphes*. Le type des animaux pairs a été subdivisé en plusieurs types secondaires, d'après des caractères tirés de la disposition des appendices et des téguments de la peau.

7. Quels sont les éléments anatomiques qui entrent dans la composition des animaux, et qu'entend-on par *solides*, *liquides*, *produits*? Qu'est-ce qu'une *fibre*, un *tissu*? Combien distingue-t-on de tissus dans les animaux, et dans quel ordre doivent-ils être classés? Qu'est-ce qu'un *parenchyme*? Qu'est-ce qu'un *organe*? Qu'est-ce qu'un *appareil*?

Les éléments qui entrent dans la composition des animaux,

et que nous pouvons en séparer mécaniquement ou par les procédés anatomiques, sont liquides, ou semi-fluides, ou solides. Il faut d'abord bien distinguer les véritables éléments constituants, des produits de l'organisation. Les éléments constituants sont ceux qui font partie essentielle de l'animal lui-même, qui composent son tissu, ou se trouvent dans l'intérieur de celui-ci, tels que la fibrine, le sang, le chyle, etc. Les produits des organes sont tout ce qui se trouve à la surface de l'animal, tant extérieure qu'intestinale, et qui est émané de l'organisation, comme la salive, l'urine, etc. Les éléments anatomiques liquides forment la plus grande partie du poids des animaux. Indépendamment de l'eau qui se retrouve dans toute l'économie organique, ils se composent de fluides en circulation dans des systèmes de vaisseaux (le sang, le chyle, la lymphe), et de fluides non circulants (le sérum, la synovie). Le plus important de tous, le sang, est un liquide composé d'un fluide séreux et d'une quantité plus ou moins grande de petits globules, d'une belle couleur rouge chez tous les animaux vertébrés, et qui nagent dans le fluide dont nous venons de parler. Chacun de ces globules se compose d'une enveloppe extérieure formée par la matière colorante, et d'un noyau central non coloré. Dans l'état de mouvement et de vie, le sang est toujours fluide et paraît uniforme; mais, lorsqu'on l'a extrait des vaisseaux, et qu'il est en repos, il se coagule en une masse gélatineuse, qui bientôt se sépare d'elle-même en deux parties, le sérum et le caillot ou *cruor*. Les éléments semi-fluides sont la graisse, la matière cérébrale, etc.

Les éléments solides de l'organisme sont assez nombreux, mais ils dérivent tous d'un seul élément générateur, dont ils ne sont que des modifications plus ou moins profondes. Cet élément générateur est l'élément cellulaire, qui est la base de toutes les parties solides des animaux, comme aussi des végétaux. C'est une agglomération de cellules ou de vésicules, constituant une sorte de masse spongieuse, qui remplit le volume entier de l'animal, forme pour ainsi dire le canevas de tous les organes, et qui, à l'état libre, constitue le tissu lâche qui entoure ces organes, et sert à les unir les uns aux autres. L'élément générateur forme d'abord par des modifications très profondes et d'une nature inconnue deux autres éléments secondaires, qui se disposent comme lui en tissus, l'élément musculaire ou contractile et l'élément nerveux ou incitant. Chacun de ces trois principaux éléments, par des modifications moins considérables, donne naissance à un système particulier de tissus, d'où vient la distinction des systèmes cellulaire, musculaire et nerveux. Le premier système comprend les tissus nerveux, fibreux, élastiques, cartilagineux et osseux. Le second se divise en tissu musculaire profond (celui du cœur), et tissu musculaire superficiel. Le troisième se partage en tissu pulpeux ou ganglionnaire, et en tissu filamenteux ou des nerfs proprement dits.

Le tissu cellulaire est susceptible de contraction, c'est-à-dire qu'il a la propriété de se raccourcir ou de se resserrer sur lui-même, sous l'action d'un stimulant extérieur; cette contractilité est comme le premier rudiment de celle qui se manifeste d'une manière si prompte et si énergique dans les muscles soumis à la volonté. Il est partout caractérisé par la faculté d'absorber et de retenir en plus ou moins grande quantité les liquides; il est formé en grande partie par un principe immédiat, que les chimistes nomment *gélatine*, et qui a la propriété de se dissoudre dans l'eau bouillante, et de se prendre en gelée par le refroidissement. C'est en recevant dans ses mailles une certaine quantité de matière muqueuse ou calcaire, que le tissu cellulaire se transforme en cartilages et en os; en se disposant en filaments ou en petites lames serrées, il produit les *fibres* ordinaires, rigides ou élastiques, les ligaments, les tendons, les aponévroses et toutes les membranes; celles-ci, en se contournant sur elles-mêmes, forment les tubes qu'on nomme *vaisseaux*, et qui servent à la circulation des fluides.

Le tissu musculaire se compose de fibres d'une nature particulière *(fibres charnues)*, dont la propriété distinctive, dans l'état de vie, est d'être éminemment contractile sous l'action d'un irritant extérieur, ou sous celle de la volonté, par l'intermédiaire des nerfs. La contractilité de la fibre charnue consiste dans la faculté de rapprocher subitement et avec force ses deux extrémités, en conservant sa direction, et de déplacer en même temps les deux organes auxquels elle se termine. Cette fibre est donc l'agent immédiat du mouvement volontaire; elle est en rapport avec l'une des principales fonctions de la vie animale. Les muscles, qui dans les animaux forment ce qu'on appelle communément la chair, ne sont que des faisceaux de fibres charnues, réunies au moyen du tissu cellulaire dans lequel elles sont plongées. La fibre charnue a pour base un second principe chimique appelé *fibrine*, qui est insoluble dans l'eau bouillante, et dont la nature semble être de prendre de lui-même la forme filamenteuse.

Le tissu nerveux, qui se présente tantôt à l'état d'une pulpe molle, blanche ou grisâtre, tantôt sous la forme de cordons blanchâtres, est l'organe immédiat de la sensibilité, l'une des deux propriétés distinctives de l'animalité. Il est le siége ou le conducteur de la sensation et de l'excitation motrice; il sert à transmettre les impressions des objets, des sens jusqu'au cerveau, et l'action de la volonté, du cerveau jusqu'aux muscles. Dans le tissu nerveux, et particulièrement dans les masses cérébrales, se trouve en assez grande quantité un principe immédiat, qui abonde pareillement dans le sang; c'est *l'albumine*, dont le caractère est de se coaguler dans l'eau bouillante.

La combinaison en proportions variables des tissus que nous venons d'énumérer, constitue ce que l'on nomme des *parenchymes*;

ces parenchymes, en revêtant une forme particulière pour un but déterminé, produisent les divers *organes*, dont chacun a dans l'état de vie une fonction spéciale à remplir. Les organes, qui concourent à une même fonction générale, se groupent pour former un *appareil* (appareil de la digestion, appareil de la circulation, de la respiration, etc.) Enfin, un ensemble d'appareils, en corrélation entre eux, et affectant une forme déterminée, constitue un organisme particulier, un être d'un certain degré d'organisation, où le jeu combiné de tous les organes engendre ce qu'on nomme la *vie animale*.

8. Quels sont les principaux appareils qui constituent la machine animale, et quelles sont les fonctions qu'ils exécutent ?

Les principaux appareils qui constituent la machine animale, sont ceux de la nutrition, de la reproduction, de la locomotion et de la sensibilité. Les animaux ont, comme les plantes, la double faculté de se nourrir et de se reproduire. Par la nutrition, ils accroissent et renouvellent sans cesse les éléments dont leur corps se compose, en absorbant par leur surface des molécules qu'ils empruntent aux milieux environnants, et en exhalant de leur corps des portions de leur propre substance qu'ils restituent au monde extérieur. Par la reproduction, ils donnent naissance à un être semblable à eux, qui, après avoir fait partie de leur corps, s'en sépare et continue de vivre d'une manière indépendante. Les animaux ont de plus que les plantes deux autres facultés qui les caractérisent, savoir : la *sensibilité*, par laquelle les animaux s'aperçoivent de ce qui se passe en eux et autour d'eux ; et la *locomotion*, par laquelle ils peuvent mouvoir leur corps à volonté en tout ou en partie. L'appareil de la sensibilité comprend le système sensorial ou système des organes des sens, et le système nerveux proprement dit, dont la fonction est d'exciter, de centraliser et d'harmoniser toutes les actions des autres parties de l'organisme. L'appareil de la locomotion comprend le système musculaire et le système osseux. Les appareils de la reproduction et de la nutrition, se subdivisent de même en un nombre plus ou moins grand de systèmes d'organes ; celui de la nutrition, par exemple, se compose des systèmes de l'absorption et de l'exhalation, des sécrétions, de la digestion, de la circulation et de la respiration.

9. Qu'entend-on par fonctions et appareils de la *vie animale* et de la *vie organique*? Donner un exemple en définissant comparativement ce que c'est que l'*absorption*, l'*exhalation*, la *sécrétion*, la *sensation*, la *locomotion*.

Les fonctions de nutrition et de reproduction étant communes aux plantes et aux animaux, on leur a donné le nom collectif de fonctions de la *vie organique* ou de la vie végétative ; les fonctions

de la locomotion et de la sensibilité étant propres aux animaux, ont été nommées fonctions de la *vie animale*.

Le corps d'un animal s'approprie continuellement de nouvelles molécules qu'il puise dans le monde extérieur, et rejette sans cesse au dehors des particules qui se séparent de ses organes; toutes les matières, absorbées et exhalées, sont charriées dans toutes les parties de l'économie par un véhicule commun qui est le sang. Ce sang étant en circulation dans des vaisseaux clos, il faut que les molécules nouvelles puissent pénétrer du dehors dans les vaisseaux pour s'y mêler au sang, et que les particules qui doivent s'en détacher puissent sortir des mêmes vaisseaux pour aller se répandre au dehors. Ces deux phénomènes inverses constituent les fonctions de l'*absorption* et de l'*exhalation*, dont le siége principal est à la surface du corps, c'est-à-dire dans la peau de l'animal, et sur la membrane muqueuse interne. C'est par les extrémités des vaisseaux veineux, lymphatiques et chylifères, que s'opère l'absorption; ces vaisseaux prennent leur origine de tous les points du tissu interne des organes, de la peau et du canal intestinal, et vont aboutir à un canal commun qui se rend dans une grosse veine de la poitrine. L'exhalation est un phénomène dans lequel une portion de la partie aqueuse du sang sort des vaisseaux à travers leurs parois plus ou moins perméables aux liquides, en entraînant avec elle une certaine quantité des matières solubles qui peuvent exister dans le fluide nourricier. On distingue des exhalations externes, qui ont lieu à la surface générale du corps, et des exhalations internes, qui s'opèrent dans des cavités intérieures, sans libre communication avec le dehors. Les sécrétions diffèrent des exhalations, en ce que le produit qui se sépare du sang a des propriétés chimiques toutes particulières, et renferme souvent en abondance des principes qui n'existent qu'en très petite quantité dans le sang lui-même. Elles n'ont pas lieu indifféremment dans toutes les parties du corps, comme les exhalations, mais elles ont toujours leur siége dans des organes spéciaux qu'on appelle des *glandes* (glandes simples ou cryptes; glandes conglomérées à conduit extérieur commun). Les humeurs produites par les sécrétions sont acides ou alcalines. Les humeurs alcalines les plus importantes sont: la bile, qui est sécrétée par le foie; la salive, qui l'est par les glandes salivaires, les larmes, que produisent les glandes lacrymales. Les principales humeurs acides sont l'urine, sécrétée par les reins; le mucus, qui provient des cryptes des membranes muqueuses; le lait, qui est sécrété par les glandes mammaires.

La sensation des objets extérieurs a lieu dans le cerveau d'un animal, au moyen des organes des sens externes, et par l'intermédiaire des nerfs. Les organes des sens sont destinés à recevoir l'impression de certaines qualités des corps, et à la transmettre par les nerfs au cerveau. Ils ont pour caractère d'offrir toujours une combi-

naison de parties, déterminée d'après l'espèce d'impression quils doivent recevoir, un développement sensible dans le tissu nerveux qui se rend à ces organes pour y être le siége de la sensation, et une liaison non interrompue, établie par des nerfs plus ou moins spéciaux, entre l'organe sensitif externe et le centre commun de la sensibilité. La faculté d'apercevoir ou de sentir les objets qui les entourent suppose nécessairement dans les animaux la faculté de changer leurs rapports avec ces objets, c'est-à-dire de les rechercher ou de les fuir en se déplaçant ou se mouvant à leur gré. Cette faculté de locomotion réside essentiellement dans les fibres contractiles, qui se disposent par faisceaux appelés *muscles;* et secondairement, chez tous les animaux à mouvements rapides, dans des parties dures auxquelles les muscles s'attachent, et qu'on nomme écailles chez les insectes, cartilages et os chez les vertébrés. L'appareil de la locomotion comprend ainsi, chez les animaux d'un ordre élevé, deux parties subordonnées l'une à l'autre, une partie active (muscles, ou système musculaire), et une partie passive (squelette, ou système osseux).

10. Donner l'analyse de quelques-uns des appareils et de leurs fonctions, comme de celui de la *vision* et de l'*audition* dans le système sensorial; de *la production de la voix*, de la *marche*, du *vol*, de la *natation*, dans le système locomoteur; de la *digestion*, de la *respiration*, de la *circulation* dans le grand appareil de la *nutrition*.

Les principaux systèmes d'organes, dans l'appareil sensorial, sont ceux de la vision et de l'audition. L'*œil* est l'organe fondamental de l'appareil de la vision. La sensation de la vue est produite en nous par les rayons de lumière qui, partant des différents points d'un objet, vont frapper le fond de notre œil, en y dessinant exactement la forme de cet objet. L'œil de l'homme est un globe formé par des membranes épaisses et opaques, percé en avant d'un trou nommé *pupille*, derrière lequel est un corps transparent de forme lenticulaire, nommé *cristallin*, et dont le fond est tapissé par une membrane nerveuse (la *rétine*), sur laquelle les rayons qui ont traversé la pupille et le cristallin vont peindre des images renversées des objets extérieurs. Le globe de l'œil est formé de trois membranes. L'extérieure, qui est fibreuse et opaque, se nomme *sclérotique;* à sa partie antérieure se trouve une ouverture circulaire, dans laquelle est enchâssée une membrane mince appelée *cornée transparente*. La seconde membrane de l'œil porte le nom de *choroïde*: elle est collée sur la face interne de la sclérotique qu'elle tapisse en noir. En avant, elle se continue avec un voile mobile, placé derrière la cornée transparente sans y adhérer, et percé d'une ouverture circulaire qui est susceptible d'agrandissement ou de diminution : ce voile est ce qu'on nomme l'*iris*, et le trou dont il est percé est la pupille. La troisième membrane est la rétine, qui est une expansion formée par le nerf optique,

après son passage à travers la sclérotique et la choroïde. Elle est blanchâtre, molle et demi-transparente ; elle est collée exactement sur la face interne de la choroïde, dans la partie postérieure de l'œil.

La cavité intérieure du globe oculaire est remplie de différentes humeurs transparentes, qui sont : l'humeur vitrée, le cristallin, et l'humeur aqueuse. L'humeur vitrée est une masse gélatineuse, qui occupe toute la partie postérieure du globe de l'œil jusqu'au cristallin. Le cristallin est une petite lentille de forme circulaire, placée en avant de l'humeur vitrée. L'humeur aqueuse est un liquide limpide, placé entre le cristallin et la cornée transparente.

Outre les membranes et les humeurs de l'œil, qui en sont les parties essentielles, il y a dans l'organe de la vision des parties purement accessoires, mais qui contribuent à le perfectionner. Tels sont l'orbite, ou la cavité osseuse dans laquelle il est abrité ; la conjonctive, ou la peau considérablement amincie qui le recouvre en avant ; les muscles, à l'aide desquels il se dirige vers les objets ; les paupières, les sourcils et enfin l'appareil lacrymal. La peau, qui environne l'organe, avant de s'amincir et de s'étendre au devant de l'œil, forme un repli supérieur et un repli inférieur, et constitue ainsi ces espèces de voiles mobiles qu'on nomme *paupières*. Dans leur épaisseur sont des fibres musculaires, et leur bord est soutenu intérieurement par une lame cartilagineuse. A l'extérieur, ce bord est garni de poils connus sous le nom de cils, et enduits d'une matière onctueuse, qui arrête entre les poils les petits corps étrangers, dont l'œil pourraît être blessé. Enfin, pour arrêter aussi la sueur qui découle du front, l'orbite est garni dans le haut d'un arc de poils raides appelés *sourcils*, dont la résistance à se laisser mouiller est sans cesse entretenue par la matière graisseuse qui suinte de leur racine. Les larmes que sécrète la glande lacrymale, située au côté externe dans le haut de l'orbite, sont destinées à nettoyer la surface de l'œil, sur lequel elles sont étendues par le mouvement alternatif des paupières ; ce fluide est ensuite chassé par les paupières elles-mêmes, lorsqu'elles se ferment, dans un petit canal formé par leurs bords et dirigé vers l'angle interne, d'où il s'écoule dans le nez par les trous qu'on nomme lacrymaux. Les dernières parties accessoires de l'œil sont les muscles, à l'aide desquels nous pouvons le mouvoir et le diriger à notre gré. Ces muscles sont au nombre de six, savoir : quatre droits, dont les fibres sont dirigées d'arrière en avant, un supérieur, un inférieur et deux latéraux (interne et externe) ; et deux obliques, dont les fibres ont une direction perpendiculaire à celle des muscles droits.

L'oreille est l'organe de l'audition. C'est un appareil assez compliqué chez l'homme, par lequel il perçoit les corps extérieurs lorsqu'ils sont mis en vibration, et que ce mouvement se communique à l'air ou à tout autre corps aboutissant à l'organe. L'effet

de ces vibrations sur l'oreille se nomme *son*. Le siége de la sensation réside dans une pulpe gélatineuse, formée par les filets nerveux du nerf acoustique; cette pulpe tremblante reçoit les vibrations des corps sonores et les communique aux filaments nerveux.

On distingue dans l'appareil de l'ouïe une partie essentielle, le *vestibule*, qui contient la pulpe auditive, et diverses parties accessoires propres à renforcer ou à modifier la sensation. Ces parties accessoires sont : 1° le limaçon et les canaux semi-circulaires, qui composent avec le vestibule un tout que l'on nomme *labyrinthe*, ou oreille interne; 2° la *caisse du tympan*, ou l'oreille moyenne, cavité située entre l'oreille interne et l'air extérieur, et qui contient une chaîne de petits osselets; 3° l'oreille externe, composée du pavillon, sorte de conque destinée à recueillir les vibrations de l'air, et du canal auditif qui les mène au tympan. Le tympan est une membrane mince, tendue sur une espèce de cadre osseux, au devant de la cavité nommée caisse du tympan. Cette membrane reçoit immédiatement les vibrations de l'air et en transmet l'effet à une autre membrane qui recouvre l'entrée du vestibule; elle est plus ou moins tendue, selon que les sons qui lui parviennent sont graves ou aigus. L'intérieur de la caisse renferme de l'air atmosphérique qui lui arrive de la bouche par un conduit guttural appelé la *trompe d'Eustache*.

Au grand appareil locomoteur se rapportent les systèmes d'organes qui produisent la voix, et les différentes espèces de mouvement progressif, telles que la marche, le vol, la natation. L'organe de la voix chez les mammifères est le *larynx*, portion du canal aérien pulmonaire, situé entre le pharynx et la trachée artère. Il est composé de différents cartilages mobiles les uns sur les autres, à l'aide des muscles qui leur sont propres, et dont l'ensemble peut aussi se mouvoir par rapport aux parties environnantes. Ces cartilages forment une ouverture oblongue nommée *glotte*, qui peut se rétrécir ou s'élargir; et lorsque l'air est poussé au dehors avec vitesse par la contraction de la poitrine, elle le fait vibrer et donne naissance par là à des sons qui sont plus ou moins aigus, selon que le larynx est plus ou moins tiré en avant. Une pièce cartilagineuse nommée épiglotte se couche sur la glotte pour la couvrir pendant l'acte de la déglutition. Chez les oiseaux, on trouve à la partie inférieure de la trachée artère, au point de sa bifurcation, un appareil formé de cartilages et de muscles, auquel on a donné le nom de larynx inférieur, parce qu'il est véritablement l'organe de la voix chez un grand nombre d'oiseaux, et qu'il remplit aussi à leur égard les mêmes fonctions que le véritable larynx chez les mammifères.

Les mouvements progressifs s'exécutent, dans tous les animaux vertébrés, au moyen des appendices complexes que l'on nomme *membres articulés*, et qui sont au plus au nombre de quatre, deux an-



térieurs (membres thoraciques), et deux postérieurs (membres abdominaux). Chez l'homme et tous les animaux qui se rapprochent de lui, ces membres sont composés de quatre parties : l'épaule, le bras, l'avant-bras et la main, pour l'antérieur ; la hanche, la cuisse, la jambe et le pied, pour le postérieur. L'épaule se compose de deux os (omoplate et clavicule,) qui se réunissent en angle, et sont mobiles au point de leur jonction. Le bras n'a qu'un seul os (l'humérus.) L'avant-bras est formé de deux os, placés l'un à côté de l'autre (le cubitus et le radius). La main comprend le carpe, le métacarpe, et les doigts. Le carpe ou poignet est composé de huit petits os sur deux rangées ; le métacarpe, de cinq os longs qui portent chacun un doigt ; chaque doigt, de trois ou de deux osselets articulés, qu'on nomme *phalanges*. Les membres inférieurs sont formés d'une manière analogue. La cuisse, qui répond au bras, est formée d'un seul os qu'on appelle *fémur*; la jambe est composée de deux os placés l'un à côté de l'autre (le tibia et le péroné), etc. Les articulations des membres sont pourvues de muscles dont les uns produisent la flexion d'un des deux os sur l'autre (muscles fléchisseurs), et les autres produisent le mouvement contraire (muscles extenseurs). La marche sur un sol résistant a lieu par la flexion et le déploiement alternatifs des articulations des jambes, et par conséquent par le concours des muscles fléchisseurs et extenseurs de ces articulations, l'action des uns succédant à celle des autres. Le corps est mu alternativement par une partie des membres, et soutenu par l'autre, sans que le corps abandonne complètement le sol. Cette dernière circonstance est ce qui distingue la marche du saut et de la course, dans lesquels tout le corps quitte momentanément le sol, et s'élance en l'air. Le vol et la natation sont des mouvements analogues à ceux du saut, mais qui s'éxécutent dans des fluides dont la résistance remplace jusqu'à un certain point celle du sol dans les phénomènes précédents ! Chez les animaux supérieurs, le vol a lieu au moyen des membres supérieurs modifiés d'une manière convenable et transformés en aîles ; chez les chauves-souris par l'allongement considérable des doigts et l'existence d'une membrane étendue entre ces appendices ; chez les oiseaux, par les plumes qui recouvrent toute la longueur du membre devenu alors long et étroit. Les membres thoraciques et abdominaux peuvent également servir à la natation, comme on le voit chez les poissons, où ces membres se transforment en nageoires par le raccourcissement considérable du bras et de l'avant-bras, et l'élargissement énorme de la partie terminale qui représente la main.

Dans le grand appareil de la nutrition, on distingue plusieurs systèmes d'organes dont les principaux sont le système digestif, le système de la respiration et celui de la circulation. La digestion a pour

objet la transformation des aliments en un liquide particulier qu'on nomme *chyle*, et qui doit servir à réparer les pertes continuelles que le sang éprouve. Elle se compose d'un grand nombre de fonctions secondaires, qui sont : la préhension des aliments à l'aide des mains et des lèvres; la mastication par les dents et l'action des mâchoires l'une sur l'autre; l'insalivation, au moyen de certains liquides contenus dans la bouche et notamment de la salive que fournissent les glandes salivaires; la déglutition du bol alimentaire ou son transport dans l'estomac par le canal de l'œsophage au moyen des mouvements de la langue et de l'arrière-bouche ou pharynx; la chymification dans l'estomac, par le sucgastrique; la chilification dans le duodénum au moyen de la bile et du suc pancréatique, et enfin l'absorption du chyle par les vaisseaux chylifères le long des parois des intestins. L'estomac est une sorte de poche membraneuse placée en travers au-dessous du diaphragme dans la cavité abdominale; il communique par le cardia avec l'œsophage, par le pylore avec les intestins. De petites glandes situées dans ses parois sécrètent le suc gastrique, qui dissout les aliments et les réduit en une sorte de bouillie homogène et grisâtre qu'on nomme chyme. Le duodénum est la première partie des intestins proprement dits; dans cette cavité, sont versés pour la séparation du chyle et des matières excrémentitielles, la bile et le suc pancréatique. La bile est produite par le foie, grosse glande de couleur brune qui occupe le haut de l'abdomen vers la droite; le pancréas est une sorte de glande salivaire abdominale, placée transversalement dans un repli du duodénum au devant de la colonne vertébrale. Les intestins qui viennent après le duodénum et remplissent presque tout le reste de la cavité abdominale en y faisant de nombreuses circonvolutions, se divisent en deux parties, l'une très longue et très étroite (l'intestin grêle), l'autre plus courte et plus grosse (le gros intestin). C'est surtout sur les parois de l'intestin grêle, que s'opère l'absorption du chyle par les vaisseaux chylifères qui naissent de tous les points de la membrane intestinale comme les racines d'un arbre et après s'être réunis en un gros tronc, vont déboucher dans les veines.

La respiration est la fonction par laquelle le sang veineux mêlé au chyle est mis en contact avec l'air, qui le transforme par son action en sang rouge, propre à nourrir les organes. Elle s'opère dans des espèces de poches nommées *poumons*, où l'air pénètre par un canal unique, qui s'ouvre dans le gosier à la racine de la langue. Ce canal, à son commencement, forme le larynx, et se continue par la trachée artère, tube membraneux soutenu de distance en distance par des anneaux solides non fermés. Il descend le long du cou au devant de l'œsophage, et, pénétrant dans la poitrine, se divise en deux branches qu'on nomme *bronches* et qui se rendent aux deux poumons en se ramifiant de plus en plus. Les

poumons sont des organes spongieux, contenus, dans la cavité thoracique, et formés par la réunion d'un grand nombre de cellules qui communiquent toutes les unes avec les autres. C'est dans ces cellules que pénètre l'air extérieur; il y arrive et il en sort alternativement par les mouvements contraires de l'inspiration et de l'expiration. Le sang de son côté arrive dans l'épaisseur des parois de ces cellules et en sort par des vaisseaux capillaires (artères et veines pulmonaires). Le sang qui arrive est du sang noir ou veineux mêlé de chyle, qui vient du cœur par les subdivisions de l'artère pulmonaire. Il se produit au contact de l'air une absorption et une exhalation, qui le changent instantanément en sang artériel ou rouge; ce sang rouge retourne au cœur par les troncs appelés veines pulmonaires. Dans l'acte de la respiration, le sang absorbe de l'oxigène et exhale avec de la vapeur d'eau du gaz carbonique. Ces produits exhalés viciant l'air des poumons, il faut que celui-ci soit renouvelé sans cesse, par les mouvements alternatifs de l'expiration et de l'inspiration. Dans l'inspiration, la cavité de la poitrine s'agrandit, et par suite les poumons se dilatent, parce que leur surface étant appliquée exactement contre les parois de la poitrine est forcée d'en suivre tous les mouvements. Alors l'air, pressé par le poids de l'atmosphère, s'introduit par la bouche ou les fosses nasales dans la trachée-artère et va gonfler les cellules pulmonaires. Cet agrandissement de la poitrine est produit par l'élévation des côtes et par la contraction du diaphragme. Ce muscle, qui sépare la poitrine de l'abdomen, a, dans l'état de repos, la forme d'une voûte; en se contractant il aplatit sa convexité, et refoulant en bas les viscères abdominaux, augmente la capacité de la poitrine aux dépens de celle du bas-ventre. L'expiration est produite en partie par l'élasticité des poumons, qui tendent à revenir sur eux-mêmes, dès que l'acte d'inspiration a cessé, en partie par la diminution de la cavité de la poitrine opérée par les muscles du bas-ventre, qui, par leurs contractions, refoulent vers le haut les viscères abdominaux avec le diaphragme.

La circulation est la fonction par laquelle le sang est porté successivement de toutes les parties du corps dans les poumons et retourne des poumons vers les parties. Ce mouvement circulaire s'opère dans les vaisseaux sanguins, et est entretenu par un agent d'impulsion qu'on nomme *cœur*. Le cœur et les vaisseaux sont donc les organes de la circulation. On distingue deux ordres de vaisseaux, les artères, qui conduisent le sang du cœur dans toutes les parties du corps, et les veines qui rapportent ce fluide des différents organes vers le cœur. Ces vaisseaux se partagent en plusieurs systèmes qui offrent chacun l'image d'un arbre, composé d'un tronc, de branches et de rameaux de plus en plus amincis, au point que les derniers rameaux échappent à l'œil par leur petitesse (les capillaires). Ces systèmes communiquent entre eux,

soit immédiatement par leurs ramifications extrêmes, soit par leurs troncs au moyen du cœur interposé entre eux. Les artères ont des parois élastiques et plus épaisses; elles vont en décroissant à mesure qu'elles s'éloignent du cœur. Les veines au contraire augmentent de diamètre en allant vers le cœur, ont des parois minces, et dans leur intérieur des replis ou valvules de distance en distance, qui empêchent le sang de revenir en arrière. Le cœur est un muscle creux, situé chez l'homme en avant entre les deux poumons, dans la cavité thoracique, à l'endroit où les gros troncs des systèmes veineux et artériels communiquent ensemble. Il est divisé par une cloison verticale en deux moitiés, composées chacune de deux cavités superposées, une oreillette en dessus et un ventricule dans la partie inférieure. Les deux côtés du cœur ne communiquent point entre eux directement, mais chaque oreillette s'ouvre dans le ventricule du même côté. Les cavités du côté gauche ne contiennent que du sang artériel, les cavités de droite contiennent du sang veineux. Chaque oreillette reçoit le sang d'un tronc veineux, le verse dans le ventricule, qui, par sa contraction, le chasse à son tour dans un tronc artériel. Lorsque le ventricule gauche se contracte, il pousse le sang rouge qu'il contient dans un gros tronc artériel qu'on nomme l'*aorte*, d'où il se distribue par un grand nombre de branches et de rameaux à toutes les parties du corps. Il en revient à l'état de sang noir par les veines, et finit par rentrer dans le cœur par les troncs appelés *veines-caves* qui débouchent dans l'oreillette droite. Ce sang veineux passe dans le ventricule droit, et de là dans l'artère pulmonaire, dont les ramifications le portent et le distribuent aux poumons. Il en revient à l'état de sang rouge par les veines pulmonaires qui aboutissent à l'oreillette gauche d'où il passe dans le ventricule correspondant. Il y a, aux deux orifices de communication de chaque ventricule avec son oreillette et son tronc artériel, des espèces de soupapes disposées de manière à empêcher le reflux du sang en arrière. Ainsi, le ventricule ne peut se contracter sans se vider dans les artères, qu'il gonfle en poussant en avant le sang qu'elles contiennent, et c'est le gonflement des artères qui suit chaque pulsation du cœur qu'on appelle le pouls.

11. Qu'entend-on par *série* ou *échelle animale?*

En examinant avec attention l'ensemble des animaux, on y remarque des organisations très simples, et d'autres bien plus compliquées, et l'on ne tarde pas à reconnaître que le passage se fait progressivement des unes aux autres par le développement ou le perfectionnement des différents systèmes d'organes, en sorte qu'on peut les distribuer dans un ordre tel que la place d'une espèce fasse connaître d'une manière exacte le degré plus ou moins élevé de son organisation. Cette distribution est ce qu'on nomme

la *série* ou l'*échelle animale*. Elle doit exprimer les rapports qui existent entre la forme extérieure d'un animal et son organisation.

12. Analyser les principaux systèmes de zoologie et les principes sur lesquels ils reposent.

Parmi les systèmes de zoologie, qui ont été proposés par les naturalistes, il en est deux principaux : celui de Cuvier, et celui de M. de Blainville. Voici les considérations sur lesquelles ils reposent. Ces deux auteurs établissent leurs premières coupes d'après les caractères qu'ils regardent comme les plus influents et qui se tirent des fonctions animales. Cuvier divise d'abord le règne animal en quatre embranchements d'après la distribution des masses nerveuses et l'arrangement des organes moteurs; mais il base la plupart de ses caractères sur les différences d'organisation interne que lui offre le système circulatoire, et qui, selon lui, correspondent exactement avec les différences de forme et de structure générales. Ces embranchements sont ceux des *vertébrés*, des *mollusques*, des *articulés* et des *rayonnés*. Cuvier subdivise ensuite chaque embranchement en classes ; celui des vertébrés par exemple en quatre classes (mammifères, oiseaux, reptiles et poissons, d'après la nature de la circulation et de la respiration ; on voit que, dans sa classification, les organes internes de l'appareil nutritif jouent le rôle le plus important.

M. de Blainville a établi une classification méthodique, qui diffère en beaucoup de points de celle de Cuvier. Ses divisions sont pareillement fondées sur les différences plus ou moins profondes d'organisation que l'on a reconnues parmi les animaux ; mais il n'emploie jamais comme caractères celles de ces différences anatomiques qui tiennent aux modifications des organes internes ; celles-ci, à cause du rapport qui existe entre les différentes parties d'un même appareil, peuvent toujours, selon lui, être traduites rigoureusement par les modifications correspondantes de l'enveloppe extérieure, c'est-à-dire par la forme générale et par la disposition des organes des sens et du mouvement. Ces caractères, purement extérieurs, choisis de manière à reproduire les divisions fondées sur l'ensemble de l'organisation, sont ce qu'il regarde comme les vrais *caractères zoologiques*. Ainsi, dans sa méthode, on peut déterminer la place qu'occupe un animal dans la série, sans avoir besoin de recourir au scalpel, pour s'assurer de la forme du cœur, du nombre de ses cavités, et de la couleur rouge ou blanche du sang. Parmi les différences anatomiques, M. de Blainville place au premier rang celles que fournissent les appareils de la sensibilité et de la locomotion, parce qu'elles tiennent aux facultés les plus élevées et les plus caractéristiques de l'animalité. Celles que fournissent les organes de la reproduction, de la digestion, de la circulation et de la respiration, ne viennent qu'en seconde ligne. M. de Blainville divise le règne animal en trois sous-règnes:

les *animaux pairs* ou *zygomorphes;* les *animaux rayonnés* ou *actinomorphes;* les *animaux irréguliers* ou *amorphes*. Le premier sous-règne se subdivise en trois types principaux : les *ostéozoaires* (animaux vertébrés ou articulés intérieurement), les *entomozoaires* (animaux articulés extérieurement), et les *malacozoaires* (animaux mollusques). Le type des *ostéozoaires* se subdivise, d'après les modifications de l'enveloppe extérieure en cinq classes : les *animaux pilifères* (ou mammifères), les *pennifères* (ou oiseaux), les *squammifères* (ou reptiles), les *nudipellifères* (ou amphibies), les *branchifères* (ou poissons). Le type des *entomozoaires* se partage en classes d'après les appendices ambulatoires (hexapodes, octopodes, décapodes, etc.). Les classes se subdivisent en ordres, d'après les variations des systèmes locomoteur, dentaire et digestif. Les genres, dans lesquels se partagent les ordres, sont établis d'après des différences d'organisation, toujours traduites extérieurement, et qui sont en rapport avec des différences dans les mœurs et les habitudes des espèces.

13. **Faire connaître les principales différences extérieures et intérieures qui distinguent les grandes divisions du règne animal, *mammifères, oiseaux, reptiles, amphibiens, poissons, insectes, mollusques* et *zoophytes*, et les principes de distribution systématique des espèces qu'elles renferment.**

Les principales différences, extérieures et intérieures, qui distinguent les grandes divisions ou classes du règne animal sont les suivantes :

Les *mammifères* ont des poils, des mammelles, et font des petits vivants. Ils ont le sang rouge et chaud, un cœur à deux ventricules, des poumons, un diaphragme; deux paires de membres sans nageoire caudale ou une seule paire de membres avec nageoire horizontale à l'extrémité de la queue. — Les *oiseaux* sont des animaux ovipares, pourvus d'ailes et de plumes, à sang chaud, ayant un cœur à deux ventricules, et des poumons sans diaphragme. — Les *reptiles* sont des animaux ovipares à peau couverte d'écailles, à sang rouge et froid, et respirant par des poumons. — Les *amphibiens* sont des reptiles à peau nue et à métamorphoses, qui ont dans le jeune âge des branchies le plus souvent extérieures, et dans l'âge adulte des pieds à doigts distincts et sans ongles. — Les *poissons* sont des animaux ovipares, à peau nue ou écailleuse, à sang rouge et froid, pourvus de nageoires et respirant par des branchies; ils ont un cœur à un seul ventricule, les deux mâchoires mobiles, et la queue terminée par une nageoire verticale. — Les *insectes* ou plus généralement les articulés ont la peau durcie par des parties cornées en forme d'anneaux, des membres (quand ils existent) toujours au nombre de plus de quatre, des mâchoires toujours latérales; leur système nerveux consiste en un double cordon noueux, placé



sous le canal intestinal. Ils ont un appareil de circulation en général fort incomplet, et des organes de respiration très variables. — Les *mollusques* n'ont point de squelette ni de membres articulés, ont le corps mou, quelquefois nu, et le plus souvent recouvert par une coquille; ils ont le sang blanc, et sont pourvus d'un cœur musculeux, d'artères et de veines. Ils ont une respiration aquatique ou aérienne, des organes, des sens généralement imparfaits, et un système nerveux composé de nerfs et de ganglions, dont un occupe la place du cerveau chez les vertébrés et les autres sont épars sur les côtés du corps. — Les *zoophytes* sont dépourvus de tête, d'yeux et de membres articulés; leur forme présente toujours, soit dans le corps lui-même, soit dans ses appendices, une disposition étoilée, ce qui les a fait comparer aux plantes dont les parties ont cette même disposition. Leur système nerveux est rarement distinct; à peine trouve-t-on dans quelques-uns de ces animaux des indices de circulation et de respiration.

14. Donner enfin quelques exemples de l'emploi de la méthode naturelle appliquée à la distribution géographique des animaux, et à l'économie domestique.

La méthode naturelle, qui est fondée sur un emploi judicieux de tous les caractères, ne sert pas seulement à distinguer et à nommer facilement les espèces; elle nous apprend à les connaître sous tous les rapports qui peuvent nous intéresser. Par cela même qu'elle rapproche et réunit toujours entre elles celles qui se ressemblent le plus dans l'ensemble de l'organisation, elle nous désigne en même temps celles qui ont le plus d'analogie par les mœurs et les habitudes, par leurs besoins physiques et les conditions de lieux et de climats qu'elles réclament, par l'influence bonne ou nuisible qu'elles peuvent exercer sur notre civilisation. Elle se rattache ainsi aux questions relatives à la distribution géographique des animaux, et offre de nombreuses applications à l'économie domestique, en nous signalant les espèces qui peuvent s'acclimater ensemble à cause de l'analogie de leur organisation; et celles dont nous pouvons attendre quelque utilité ou craindre quelque dommage. On sait par exemple que, parmi les mammifères, l'ordre des ruminants, et, parmi les oiseaux, celui des gallinacés, renferment les espèces les plus utiles à l'homme; d'autres au contraire (ceux des carnassiers, des rongeurs) ne lui offrent guère que des espèces nuisibles, contre les atteintes desquelles il est obligé de se tenir en garde.

BOTANIQUE.

1. Qu'est-ce que le végétal? Qu'a-t-il de commun avec l'animal et le minéral? En quoi diffère-t-il de l'un et de l'autre?

Le *végétal* est un être matériel, doué de vie, mais dépourvu de sensibilité et de mouvement volontaire; l'*animal* est un être matériel vivant, qui sent et se meut à son gré; le *minéral* est un être matériel inerte, privé tout à la fois de vie et de sensibilité. (*Voyez* page 310 le développement de cette comparaison). Les caractères communs aux végétaux et aux animaux consistent en ce que les uns et les autres naissent, se nourrissent, se reproduisent et meurent; leurs principaux caractères distinctifs consistent en ce que les animaux sont des êtres sensibles, qui se meuvent pour aller à la recherche de leur nourriture, et qui sont pourvus d'un estomac ou canal intestinal pour la digérer et l'absorber; tandis que les végétaux sont des êtres dépourvus de sensibilité et de mouvement volontaire, qui n'offrent point de cavité intestinale, et trouvent toute préparée dans les milieux qui les entourent, la nourriture qu'ils absorbent par leur surface extérieure.

2. Nommer, définir, décrire, selon l'ordre de leur apparition, les organes simples ou composés de la végétation et de la reproduction.

Les végétaux sont formés d'un tissu, dont les éléments, quelque variés qu'ils soient au premier abord, ont tous pour origine un petit organe simple appelé *utricule* ou *cellule*, qui leur donne naissance par ses développements successifs et ses transformations. Les diverses modifications de ce tissu, en se combinant entre elles de différentes manières, constituent tous les organes simples ou composés des végétaux. Le premier organe qui apparaît dans les végétaux, que produit la germination des graines, est la *racine*, cette partie inférieure qui s'allonge en descendant pour s'enfoncer dans la terre; elle sert à fixer le végétal et à tirer du sol une partie de sa nourriture. On distingue dans une racine le collet, qui la sépare de la tige, le corps, et le chevelu composé de radicelles ou

fibrilles par l'extrémité desquelles se fait l'absorption des sucs nutritifs. La *tige* est le second organe qui se développe dans la jeune plante; elle croît en sens contraire de la racine, cherchant l'air et la lumière; elle est l'axe de la plante, et doit servir de support aux feuilles, aux fleurs et aux fruits. Elle est ou ligneuse ou herbacée. Parmi les tiges ligneuses, on distingue le *tronc* et le *stipe*. Le tronc est la tige des arbres dicotylédons : il est de forme conique, nu inférieurement et ramifié dans sa partie supérieure. Il est formé intérieurement de fibres disposées par couches concentriques et superposées. Ces couches se partagent en deux systèmes (l'écorce et le bois), qui croissent en épaisseur par de nouvelles fibres, lesquelles se développent toujours sur celles des surfaces de chacun de ces systèmes qui est en contact avec l'autre système. L'écorce, qui forme le système extérieur, offre en dehors une partie plus dure et plus ancienne, composée de couches qu'on nomme corticales, et une partie plus tendre et plus nouvelle, qui est le *liber*. Le tronc est formé pareillement de deux parties, l'une interne, plus ancienne et plus dure, qui est le bois proprement dit, l'autre externe, qui est plus tendre et plus nouvelle, c'est l'*aubier*. Au centre du bois est la moelle, qui est contenue dans une sorte d'étui, qu'on nomme *étui médullaire*. Le *stipe* est une tige propre aux arbres monocotylédons, qui est droite, cylindrique, et couronnée à son sommet par un bouquet de feuilles entremêlées de fleurs. Les fibres qui la composent ne forment point de couches, comme celles du tronc, mais des faisceaux épars au milieu d'une masse de tissu utriculaire. Cette tige se ramifie très rarement, et n'a point d'écorce proprement dite. Son accroissement se fait au moyen de nouveaux faisceaux de fibres, qui s'interposent entre les anciens, surtout vers la partie centrale. Lorsque le tissu extérieur est une fois endurci, la tige n'augmente plus en diamètre.

La tige porte des *feuilles*, qui sont des lames vertes destinées à remplir dans l'atmosphère les mêmes fonctions que les racines dans la terre : ce sont en quelque sorte des organes de respiration pour le végétal, qu'elles contribuent par conséquent à nourrir. A l'aisselle de ces feuilles se développent des bourgeons, qui en s'allongeant doivent se transformer en rameaux chargés de nouvelles feuilles, et quelquefois de fleurs. On distingue dans une feuille le pétiole, le limbe, les nervures et le parenchyme qui en remplit les intervalles. Il y a des feuilles simples, et des feuilles composées de plusieurs folioles. Leur disposition sur la tige est alterne, ou verticillée. On appelle feuilles séminales ou cotylédons les premières feuilles de la plante, qui étaient déjà formées et visibles dans la graine. La racine, la tige et les feuilles, prises ensemble constituent les organes de la végétation, ou de la nutrition. Indépendamment de cette classe d'organes, il en est une autre qui se compose des or-

ganes reproducteurs : elle comprend tout ce qui se rapporte aux fleurs, aux fruits et aux graines.

Les *fleurs*, qui n'ont qu'une existence passagère, et qui ne se montrent le plus souvent qu'après le développement des feuilles, sont des parties complexes, qui contiennent les rudiments des graines à l'état de germes inertes, et les organes nécessaires pour les féconder. Dans son état de plus grande complication, la fleur est formée à l'extérieur de deux rangées circulaires de pièces foliacées, qu'on nomme les enveloppes florales, et à l'intérieur de deux autres sortes d'organes, qui sont les parties essentielles de la fleur ou les organes de la fructification. La première enveloppe, qu'on nomme *calice*, est formée de folioles appelées *sépales*. La seconde enveloppe, ou la *corolle*, est composée de pièces appelées *pétales*, qui sont libres ou soudées (corolle monopétale, ou polypétale). La troisième sorte d'organe est ce qu'on nomme les *étamines*, composées chacune du filet, et de l'anthère qui contient la poussière fécondante ou le pollen. La quatrième sorte d'organes se compose des carpelles, dont l'ensemble forme le *pistil*. Les carpelles sont libres ou plus ou moins soudés entre eux : chacun d'eux se compose d'un ovaire, d'un style et d'un stigmate. C'est dans l'ovaire que sont renfermés les ovules ou rudiments des graines. Les fleurs peuvent être apétales, hermaphrodites ou unisexuelles. Les plantes à fleurs unisexuelles sont monoïques, dioïques ou polygames. L'ovaire peut être libre ou adhérent au calice. Les étamines peuvent être libres de toute adhérence avec l'ovaire et le calice (hypogynes), elles peuvent adhérer aux parois du calice (périgynes), ou bien être insérées sur le sommet de l'ovaire (épigynes).

Après la fécondation, toutes les parties de la fleur se flétrissent, à l'exception de celle qui contient la graine. Celle-ci continue de croître et prend alors le nom de *fruit*. On distingue dans un fruit le péricarpe, le placenta, le funicule et les graines. Le péricarpe, qui est l'enveloppe du fruit, est composé de membranes plus ou moins distinctes; il est sec ou charnu, déhiscent ou indéhiscent. Le placenta est une sorte de bourrelet saillant à l'intérieur du péricarpe, et auquel les graines sont attachées. Le funicule est le filet au moyen duquel les graines adhèrent au péricarpe. La *graine* est cette portion du fruit qui renferme sous des téguments l'embryon ou le rudiment d'une plante nouvelle : c'est l'ovule fécondé et parvenu à sa maturité. On distingue sous les téguments le périsperme et l'embryon. La première partie manque quelquefois; la seconde seule est essentielle. L'embryon est composé d'une radicule, d'une plumule, et de cotylédons. Les plantes dicotylédones sont celles dont les graines sont munies de deux cotylédons; les monocotylédones sont celles qui n'ont qu'un seul cotylédon.

3. Ce qu'on entend par ces mots : *tissu végétal*. Faire connaître la forme primitive de ce tissu et les principales modifications que souvent il éprouve en vieillissant.

L'élément primitif, le point de départ de toute l'organisation végétale est le petit organe simple appelé *utricule* ou *cellule*. En remontant à leur origine, on trouve que beaucoup de végétaux n'ont été d'abord formés que d'une seule ntricule, qui, mise dans des circonstances favorables, en a produit à sa surface d'antres qui se sont propagées de même. De nouvelles utricules ont pris naissance entre les anciennes, écartant celle-ci sans rompre la continuité de la masse. C'est ainsi que se forme le tissu végétal, qu'on nomme *tissu cellulaire*; et qui, en vieillissant, éprouve diverses modifications. Originairement, les cellules sont toutes membraneuses, closes et sphériques. Mais leur position et les circonstances où elles se trouvent influent sur leur développement et produisent en elles des changements de forme ou de nature. Tantôt, elles restent très courtes, mais se façonnent en polyèdres, comme par l'effet d'une compression mutuelle, ou bien leurs parois s'épaississent et elles se transforment en granules opaques. Tantôt, elles s'allongent en fuseau, et se groupant en faisceau constituent de véritables fibres ; tantôt enfin, elles s'allongent en longs tubes ou prismes, auxquels on donne le nom de vaisseaux. Dans ce cas, la membrane qui constitue leur paroi se garnit de points, de raies ou d'anneaux (tubes poreux, fausses trachées, tubes annulaires), ou bien se découpe en hélice pour produire les trachées véritables. Tous ces tubes ne sont donc que des cellules ou utricules, plus grandes que celles du tissu cellulaire proprement dit. Quelquefois enfin les utricules subissent sans s'allonger les mêmes modifications, de sorte qu'on en trouve qui présentant la forme arrondie sont percées de trous comme les tubes poreux, fendues comme les fausses trachées, partagées en anneaux ou découpées en spirales comme les tubes annulaires ou les trachées.

4. Comment, dans la généralité des espèces, il existe un certain accord plus ou moins sensible, entre la répartition des diverses modifications du tissu, et les trois grandes divisions admises par tous les phytologistes, des végétaux acotylédonés, monocotylédonés et dicotylédonés, de sorte que, pour l'ordinaire, on peut reconnaître à laquelle des trois divisions appartient une espèce, par la seule inspection de sa structure interne.

Lorsque l'on considère l'ensemble des espèces, on remarque un accord plus ou moins sensible entre la répartition des diverses modifications du tissu, et les trois grandes divisions admises par les botanistes, de végétaux acotylédonés, monocotylédonés et dicotylédonés, de sorte que, pour l'ordinaire, il est possible de reconnaître à laquelle des trois divisions appartient une espèce, par la seule inspection de sa structure interne. Les plantes acotylédonées sont entièrement formées de cellules, et dépourvues de tubes ou de

vaisseaux proprement dits; les monocotylédonées et les dicotylédonées offrent toujours, dans la composition de leur tissu, des vaisseaux ; ce qui les a fait nommer *plantes vasculaires :* mais l'arrangement des vaisseaux et des cellules est soumis à des lois différentes dans ces deux grandes classes. Dans les végétaux monocotylédonés, les vaisseaux forment de petits faisceaux isolés et épars au milieu de la masse de tissu cellulaire qui remplit tout le végétal. Dans les dicotylédonés, les vaisseaux et les fibres se réunissent pour former des couches superposées les unes aux autres, et qui ne sont séparées que par des lames minces de tissu utriculaire.

5. Dire ce qu'on sait touchant les principaux phénomènes de la vie végétale, tels que l'absorption, la transpiration, la respiration, le mouvement et l'élaboration des fluides, la nutrition, l'accroissement de parties anciennes, l'apparition de parties nouvelles, la formation des ovules avec ou sans le concours de la fécondation, la gestation durant laquelle l'ovule fécondé passe à l'état de graine, la germination, la tendance des racines vers le centre de la terre et des tiges vers le ciel, les maladies, la mort, etc.

Dès qu'une jeune plante s'est développée par suite de la germination, elle puise dans le sol et dans l'air les matériaux nécessaires à son accroissement et les assimile à sa propre substance. C'est par les espèces de spongioles qui terminent les fibres les plus déliées que les racines absorbent dans la terre les sucs nutritifs à l'état de dissolution dans l'eau ; les feuilles plongées dans un atmosphère humide absorbent aussi l'eau, surtout par leur face inférieure; toutes les parties vertes des plantes jouissent de la même faculté. L'eau absorbée par les racines constitue la sève, qui s'élève dans la tige à travers l'aubier. Cette sève ascendante ne change pas de nature, jusqu'à ce qu'elle soit arrivée dans les feuilles, où elle se distribue par les veines de la face supérieure. Ce mouvement est activé par le développement des bourgeons, qui attirent à eux la sève. Celle-ci, distribuée dans les feuilles, éprouve par l'action de l'air et de la lumière des changements remarquables, et devient alors le *cambium* ou suc nourricier, qui tend à redescendre vers les racines par les veines de la face inférieure des feuilles et le long de l'écorce. Le premier effet que la sève éprouve dans les feuilles, c'est de perdre une grande partie de son eau (transpiration). Le second effet, c'est de changer de nature par une sorte de respiration. Pendant le jour, et sous l'action de la lumière, les feuilles absorbent de l'acide carbonique et exhalent de l'oxigène. Le suc descendant se charge ainsi de carbone, qui est susceptible d'être fixé dans les diverses parties du végétal. C'est à cette sève descendante que sont dus l'accroissement des parties anciennes et l'apparition des parties nouvelles. Elle se porte principalement vers le point de la tige où s'opèrent les nouvelles couches, c'est-à-dire le long de l'écorce et de l'aubier. Elle recouvre la surface in-

terne de l'une et la surface externe de l'autre, d'une couche de substance mucilagineuse appelée *cambium*, et qui n'est que le tissu végétal à l'état naissant. Bientôt les linéaments de l'organisation apparaissent dans ce fluide, et il se forme de nouvelles fibres qui prennent de la consistance. C'est ainsi que croissent en diamètre les tiges des arbres dicotylédons.

La reproduction, qui est la fonction par laquelle un végétal perpétue son espèce, a lieu par des germes, auxquels on donne les noms d'ovules, de séminules ou de sporules, et dont la formation s'opère avec ou sans le concours de la fécondation. Tous ces germes ne sont primitivement que de simples utricules; mais ceux qu'on nomme sporules sont féconds par eux-mêmes, c'est-à-dire qu'ils ont en eux tout ce qu'il faut pour reproduire, lorsqu'ils sont isolés et placés à la surface du sol, de nouveaux individus semblables à ceux dont ils sont émanés. De plus, au moment de leur séparation d'avec la plante mère, ils n'offrent aucune trace des organes qu'une vie indépendante va bientôt développer en eux sous l'influence des circonstances extérieures. Les germes des plantes phanérogames, ou les ovules proprement dits, diffèrent des précédents, en ce qu'ils doivent commencer la série de leurs développements, étant encore fixés sur la plante mère, et qu'ils ne peuvent les continuer d'une manière indépendante, qu'après avoir produit, sous l'influence de la fécondation, les rudiments de la racine, de la tige et des premières feuilles. La fécondation est une opération qui exige le concours d'utricules fournies par les deux sortes d'organes qu'on appelle organes sexuels ou fécondateurs. Sa période de durée est ce qu'on nomme la gestation. Son résultat est le passage de l'ovule fécondé à l'état de graine mûre. L'ovaire d'une fleur est fécondé, quand le pollen des étamines de cette fleur ou de toute autre de la même espèce est mis en contact avec le stigmate. Les grains de pollen sont de petites vésicules formées de deux enveloppes, l'une externe, l'autre interne; celle-ci contient dans sa cavité une multitude de petits granules, qui sont les véritables granules fécondants. Le grain de pollen en contact avec le stigmate se gonfle; sa membrane extérieure se rompt, et les granules enveloppés de la membrane intérieure sortent sous la forme d'un long boyau; ils pénètrent à travers un tissu cellulaire particulier, qui unit le stigmate aux ovules.

L'ovule n'est dans l'origine qu'une petite masse pulpeuse, cellulaire, dépourvue d'enveloppes et d'ouvertures. Postérieurement à son apparition, et avant comme après la fécondation il éprouve une série de développements jusqu'au moment où il parvient à l'état de graine mûre. D'abord il se présente sous l'aspect d'un noyau celluleux (le nucelle) enveloppé de deux membranes perforées à leur sommet (la primine et la secondine). Au commencement, ces deux membranes n'adhèrent entre elles et avec le nu-

celle qu'à la base de l'ovule, qu'on nomme chalaze; mais pendant l'accroissement de l'ovule il arrive souvent des changements dans la position relative de ses parties. Postérieurement à ces premiers changements, de nouvelles parties se développent dans l'intérieur du nucelle. Cet intérieur se creuse d'abord, et il se forme une troisième membrane sans ouverture (la tercine). Puis, dans beaucoup d'ovules, tous les points de la paroi de cette espèce de sac donnent naissance à une quatrième membrane (la quartine). Enfin, le sommet et la base de la cavité concourent à la formation d'une cinquième membrane (la quintine), qui se montre d'abord sous la forme d'un boyau grêle, attaché d'une part au sommet du nucelle et de l'autre à la chalaze. Mais ce boyau se détache bientôt de la chalaze et se renfle dans sa partie supérieure, où l'on voit paraître, sous la forme d'un globule suspendu à un fil très-délié, la première ébauche de l'embryon. Durant cette série de développements, il arrive souvent des changements dans la position relative des parties de l'ovule.

Une graine fécondée et mûre, lorsqu'elle est placée dans des circonstances convenables, *germe*, c'est-à-dire commence à se développer pour reproduire une plante semblable à celle dont elle est provenue. Il lui faut pour cela le contact de l'eau et de l'air, et un certain degré de chaleur. La graine absorbe de l'humidité et se gonfle; ses enveloppes se ramollissent et se déchirent; la radicule de l'embryon s'allonge la première et se dirige vers le centre de la terre, tandis que la plumule se redresse, et s'allonge aussi, mais pour se porter vers le ciel. Les cotylédons s'étalent et tantôt s'élèvent au-dessus du sol, tantôt restent cachés sous terre. Après avoir fourni des aliments à la petite plante, ils se flétrissent, tombent ou se détruisent.

Les racines et les tiges ont une tendance naturelle à se diriger, les premières vers le centre de la terre, les secondes vers le ciel. Cette loi ne souffre d'exception que pour quelques plantes parasites, telles que le gui, qui germent en tous sens. On a donné beaucoup d'explications de ce phénomène, mais sa véritable cause est encore ignorée.

Les végétaux sont sujets à un grand nombre de maladies, générales ou locales, causées tantôt par la nature du sol, tantôt par l'excès de l'humidité ou des sucs nutritifs. Aussi est-ce de maladies plutôt que de vieillesse que meurent la plupart des plantes. Il en est donc sous ce rapport du règne végétal comme du règne animal.

5. Décrire les mouvements particuliers qui se manifestent à l'extérieur dans plusieurs organes, et discuter les hypothèses par lesquelles on a essayé de les expliquer.

Il se manifeste à l'extérieur, dans plusieurs organes et particu-

lièrement dans les feuilles, des mouvements particuliers qui dépendent de l'irritabilité dont toutes les parties des plantes sont douées. Si l'on abaisse une branche vers la terre, de manière que la face inférieure des feuilles regarde le ciel, on voit les feuilles se retourner peu à peu et reprendre leur position naturelle. Ce sont surtout les feuilles composées avec articulation, qui présentent les mouvements les plus marqués. Pendant la nuit, les folioles de l'acacia et d'un grand nombre de légumineuses ont une position différente de celle qu'elles occupent pendant le jour. On donne le nom de sommeil des plantes à ce phénomène singulier, qui paraît dépendre de l'influence de la lumière. Mais les feuilles de certains végétaux (de la sensitive par exemple) ont des mouvements d'irritabilité auxquels la lumière n'a aucune part. Des causes extérieures très diverses, et souvent les plus légères en apparence, suffisent pour faire éprouver à ces folioles les mouvements les plus remarquables. On a cru que ces mouvements étaient dus à un gaz qui se dégageait au moment où les folioles exécutaient leurs mouvements : mais c'est une hypothèse qu'aucun fait ne vient appuyer. On les a fait dépendre de l'irritabilité des trachées, ou d'une force contractile inhérente au tissu cellulaire. Enfin, des expériences plus récentes ont conduit à penser que le siége des mouvements des folioles pouvait être le renflement du bourrelet celluleux qui se trouve toujours à la base du pétiole dans les feuilles articulées. Les deux côtés inférieur et supérieur du bourrelet seraient comme deux ressorts antagonistes, qui tendraient à se recourber en sens inverse, l'un pour redresser le pétiole, l'autre pour le fléchir. Une solution complètement satisfaisante de la question est encore à désirer.

7. Montrer la parfaite convenance de certaines dispositions organiques pour l'accomplissement des phénomènes de l'absorption, de la transpiration, de la respiration, etc., et indiquer, autant que le permettent les progrès de la science, l'influence qu'exercent sur ces phénomènes, les agents extérieurs pondérables ou impondérables.

Il existe dans les végétaux diverses dispositions organiques, qui sont dans un rapport frappant avec les phénomènes à l'accomplissement desquels la nature les a destinées. Telles sont, par exemple, les spongioles qui terminent les radicelles, et qui sont remarquables par la force d'absorption et de succion dont elles sont douées; la disposition des couches de tissu utriculaire et de tissu fibreux qui composent la tige de nos arbres, avec les irradiations utriculaires, qui font communiquer ensemble les parties internes et externes du végétal; la multiplication presque infinie de la surface respiratrice des plantes sous la forme de feuilles minces, et la diversité de structure des deux faces d'une même feuille, destinées le plus souvent à remplir des fonctions différentes; l'existence d'un épiderme étendu sur toutes les parties vertes des végétaux, comme

pour s'opposer à une évaporation trop rapide de leur sève, mais en même temps pourvu de poils et de stomates ou de petites bouches, afin de faciliter l'exhalation et la respiration; l'abondance d'un tissu cellulaire particulier, rempli de fécule, dans le voisinage de certains organes rudimentaires pour assurer leur premier développement, comme dans le périsperme et les cotylédons, qui fournissent à l'embryon une nourriture semblable à celle que le fœtus du poulet tire du jaune de l'œuf; etc. La plupart des phénomènes auxquels se rapportent ces dispositions organiques, tels que la succion des racines, la marche des fluides, la transpiration des feuilles, etc., paraissent dépendre principalement de l'irritabilité organique ou des forces vitales : mais diverses causes extérieures exercent une influence plus ou moins sensible sur ces phénomènes; telles sont les actions de la chaleur et de la lumière, la capillarité, et cette propriété particulière des membranes organiques à laquelle on a donné le nom d'*endosmose*. Ces membranes, de même que tous les corps spongieux ou poreux, se laissent traverser par les liquides, mais pas avec la même facilité par ceux de nature différente. Et lorsqu'une membrane sépare deux liquides différents, il y a tendance au mouvement de l'un de ces liquides vers l'autre à travers la membrane.

8. Que doit-on entendre par ces mots : *Caractères botaniques?* D'après quelles données est-on convenu de mesurer l'importance relative de ces caractères, et, par conséquent, de les subordonner les uns aux autres? Appréciation des résultats plus ou moins satisfaisants obtenus par ce procédé.

Les végétaux observés comparativement dans toutes leurs parties organiques, présentent des différences plus ou moins grandes, plus ou moins importantes, d'où dérivent les *caractères botaniques*, dont l'étude fait la base de la science qui établit les rapports des plantes en raison de ces caractères semblables ou différents. La difficulté d'établir une méthode qui exprime ces rapports de la manière la plus exacte et la plus complète, tient à l'appréciation de la valeur relative des différents caractères, comparés entre eux. Les différences qui distinguent les êtres organisés ne sont pas toutes d'égale valeur, et lorsqu'il s'agit de déterminer le degré d'affinité de deux de ces êtres, il ne faut pas compter pour une unité chacune de ces différences, mais la faire entrer dans le calcul selon sa valeur relative. De là résulte ce que l'on appelle la subordination des caractères. Pour pouvoir juger convenablement de la valeur d'un caractère, il faut bien connaître la nature de l'organe d'où on la tire, l'importance de cet organe comparativement aux autres, et celle du point de vue sous lequel on l'envisage. En général, un organe est d'autant plus important, qu'il se montre plus constant dans la série végétale et qu'on juge plus essentiel à la vie de l'indi-



vidu le rôle qu'il remplit; il en est de même des modifications de chaque organe, comparées entre elles. Par exemple, les organes reproducteurs rangés dans l'ordre de plus grande valeur, donnent la série suivante : l'embryon; les organes fécondateurs (pistils et étamines); les téguments propres à l'embryon (graines et fruits); les enveloppes des organes fécondateurs (corolle et calice); les organes accessoires (nectaires, bractées, etc.) Les différents points de vue sous lesquels chaque organe peut être considéré n'ayant pas la même valeur, on peut les ranger dans l'ordre suivant, eu égard à l'importance plus ou moins grande des caractères qu'ils fournissent: l'existence ou la non existence des organes; la position absolue ou relative de ces organes; leur nombre relatif; leur grandeur relative; leur forme; leur nombre absolu; leur grandeur absolue; leur consistance et leurs autres qualités sensibles, telles que la couleur, l'odeur, la saveur, etc.

9. Définir, d'après les auteurs les plus accrédités, l'individu, l'espèce, la variété, le genre, la famille, et mettre en lumière, à l'aide de quelques exemples bien choisis, ce qu'il y a de positif ou d'hypothétique dans les définitions.

En comparant les végétaux les uns aux autres, on a remarqué qu'un certain nombre avaient des caractères presque entièrement semblables, et jouissaient de la propriété de se reproduire avec ces mêmes caractères. Chacun de ces végétaux est ce qu'on nomme un *individu*, et la réunion de tous les individus semblables est considérée comme un être collectif qu'on appelle *espèce*. Il n'existe réellement dans la nature que des individus. Pour former l'espèce, on est obligé de faire abstraction de certaines différences que présentent toujours les êtres les plus semblables en apparence. Aussi, les espèces comportent-elles souvent des modifications de grandeur, de couleur, de consistance, qui sont dues à l'influence des circonstances extérieures ou au croisement des races. Ces modifications accidentelles constituent ce que l'on nomme des *variétés* dans l'espèce. Ces variétés diffèrent des espèces proprement dites, en ce que, dans l'état de nature, elles ne se reproduisent point avec tous leurs caractères par le moyen des graines. En comparant les espèces entre elles, on a vu que beaucoup se ressemblaient par l'ensemble de leur organisation, ou du moins par les parties les plus essentielles, sans jamais cependant pouvoir se changer l'une dans l'autre par la reproduction. On a fait de la collection de ces espèces semblables un nouvel être abstrait, qui a été désigné sous le nom de *genre*. Le genre est donc une réunion d'espèces qui ont entre elles une ressemblance frappante dans l'ensemble de leurs organes, et particulièrement dans ceux de la fructification. De même qu'en groupant ensemble les espèces qui ont entre elles une analogie marquée, on en a fait des genres, de même en réunissant les genres

qui se ressemblent beaucoup et qui sont liés par des caractères communs, on en compose des tribus nouvelles appelées *familles*, et qui ne sont rien autre chose que des genres plus élevés. Les ordres, groupés à leur tour d'après un caractère commun et plus général, forment les *classes*, qui sont les divisions les plus élevées du règne végétal. Toutes ces réunions d'êtres plus ou moins semblables sont autant de créations de notre esprit, et il y a toujours dans leur formation quelque chose d'arbitraire, parce que l'appréciation des différents caractères ne peut jamais être d'une exactitude rigoureuse.

10. Qu'est-ce que les classifications botaniques, dites *méthodes* ou *systèmes*, considérées sous le point de vue le plus général?

La plupart des classifications botaniques s'accordent assez bien entre elles dans l'établissement des genres et des espèces, mais elles diffèrent beaucoup par les principes que leurs fondateurs ont suivis dans la formation des groupes supérieurs. Dans les uns en effet les divisions sont faites d'après les caractères tirés d'un seul organe ou d'un petit nombre d'organes; dans les autres au contraire elles le sont d'après les caractères fournis par l'ensemble de l'organisation étudiée dans tous ses détails. Les premières se nomment des *méthodes artificielles* ou des *systèmes;* les secondes, des *méthodes naturelles*. *Voyez* plus haut (page 313) la comparaison que nous avons déjà établie entre ces deux classes de méthodes, que l'on retrouve aussi dans le règne animal. En botanique, les méthodes de Tournefort et de Linnée sont des méthodes artificielles; la méthode de Jussieu est une méthode naturelle.

11. Dans l'état actuel de la phytologie, peut-on, comme on le fait souvent en zoologie, démontrer la nécessité de la coexistence des principaux caractères employés comme base des Méthodes?

Les organes d'importance diverse, d'après lesquels s'établissent les rapports entre les végétaux, de même qu'entre les animaux, sont en corrélation les uns avec les autres, de manière que l'on peut souvent conclure l'existence d'un caractère caché, que l'on ne pourrait reconnaître que par le secours de l'anatomie, de celle d'un caractère extérieur, qui se manifeste de lui-même. Ces relations entre les parties internes et externes d'un être organisé constituent ce que l'on appelle les lois de coexistence des caractères. C'est l'observation seule qui nous découvre ces lois; leur raison, et par conséquent aussi leur nécessité, échappe le plus souvent à notre intelligence. Mais la connaissance de ces lois est très utile, puisqu'elle nous permet de juger de l'ensemble d'un être par quelques-unes de ses parties, et rend ainsi beaucoup plus simple le problème de sa détermination complète.

12. Donner l'analyse des Méthodes de Tournefort, de Linnée, de Jussieu, et en montrer l'utilité pratique.

Les trois classifications qui ont eu le plus de vogue en botanique, sont celles de Tournefort, de Linnée et de Jussieu. La méthode de Tournefort est basée principalement sur la considération des différentes formes de la corolle, et sur la distinction peu importante des végétaux en herbes et en arbres. Les herbes se subdivisent en dix-sept classes, et les arbres en cinq classes (en tout 22), d'après des caractères tirés de la présence ou de l'absence de la corolle, de l'isolement des fleurs, ou de leur réunion dans un calice commun, de l'intégrité ou de la division de la corolle, de sa régularité ou de son irrégularité. La première division (celle des herbes) comprend les classes suivantes : les *campaniformes*, les *infundibuliformes*, les *personnées*, les *labiées*, les *cruciformes*, les *rosacées*, les *ombellifères*, les *caryophyllées*, les *liliacées*, les *papilionacées*, les *anomales*, les *flosculeuses*, les *semi-flosculeuses*, les *radiées*, les *apétales*, les *apétales sans fleurs*, les *apétales sans fleurs ni fruits apparents*. La seconde division comprend les classes suivantes : les arbres *apétales*, les *amentacés*, les arbres à corolles *monopétales*, les *polypétales régulières*, les *polypétales irrégulières*.

Le système de Linnée repose entièrement sur les caractères que l'on peut tirer des organes reproducteurs, c'est-à-dire des étamines et des pistils. Les classes sont établies d'après les étamines; les ordres ou subdivisions des classes le sont en général d'après les pistils. Linnée divise d'abord tous les végétaux connus en deux grandes sections : ceux qui ont des organes de reproduction visibles, et par conséquent des fleurs apparentes (les phanérogames), et ceux dans lesquels les fleurs ne sont pas distinctes à l'œil nu ou n'existent pas du tout (les cryptogames). Le nombre des végétaux de la première section étant beaucoup plus considérable que celui des végétaux de la seconde, les phanérogames ont été partagés en vingt-trois classes; les cryptogames au contraire ne forment qu'une seule classe, qui est la dernière du système. Parmi les plantes phanérogames, les unes ont des fleurs hermaphrodites, les autres des fleurs unisexuelles; les premières étant les plus nombreuses, forment vingt classes, les secondes n'en composent que trois.

Les dix premières classes renferment toutes les plantes à fleurs hermaphrodites, dont les étamines sont en nombre déterminé, et en même temps libres et égales entre elles. Ce sont : 1re classe, la *monandrie* (ou les plantes à une seule étamine); 2e classe, la *diandrie* (à deux étamines); 3e classe, la *triandrie;* 4e classe, la *tétrandrie;* 5e classe, la *pentandrie;* 6e classe, l'*hexandrie;* 7e classe, l'*heptandrie;* 8e classe, l'*octandrie;* 9e classe, l'*ennéandrie;* 10e classe, la *décandrie.* — Les trois classes suivantes sont encore fondées sur le nombre des étamines, mais il n'est plus rigoureusement déterminé, et l'on y

joint quelquefois un caractère tiré de l'insertion : 11e classe, la *dodécandrie* (de 12 à 19 étamines); 12e classe, *icosandrie* (20 étamines au plus insérées sur le calice); 13 classe, la *polyandrie* (20 à 100 étamines insérées sous l'ovaire). — Les deux classes suivantes sont fondées sur le nombre et la proportion inégale des étamines : 14e classe, la *didynamie* (à 4 étamines dont deux plus grandes); 15e classe, la *tétradynamie* (à 6 étamines dont quatre plus grandes). — Les cinq classes suivantes sont fondées sur les différents modes de soudure des étamines, soit entre elles, soit avec le pistil : 16e classe, la *monadelphie* (à étamines réunies en un seul corps par les filets); 17e classe, la *diadelphie* (deux faisceaux distincts d'étamines); 18e classe, la *polyadelphie* (trois ou un plus grand mombre de faisceaux d'étamines); 19e classe, la *syngénésie* (étamines soudées par les anthères); 20e classe, la *gynandrie* (étamines soudées avec le pistil). — Les trois classes suivantes sont fondées sur la séparation des organes reproducteurs : 21e classe, la *monœcie* (à fleurs mâles et femelles sur le même pied); 22e classe, la *diœcie* (fleurs mâles et fleurs femelles sur deux pieds différents); 23e classe, la *polygamie* (flenrs mâles, femelles, et hermaphrodites portées sur un, deux ou trois individus différents). La dernière classe (la 24e) comprend toutes les plantes à fleurs invisibles ou nulles : la *cryptogamie*.

Les systèmes de Tournefort et de Linnée ont cet avantage, qu'ils donnent un moyen prompt et sûr d'arriver à connaître le nom d'une plante que l'on voit pour la première fois; mais ils ne font pas connaître toutes les analogies des espèces, comme la méthode de Jussieu. Dans celle-ci, les divisions ne sont plus établies sur la considération d'un seul organe, mais sont formées concurremment par les caractères tirés de toutes les parties des végétaux, mais pris dans l'ordre de leur plus grande valeur relative. Les plantes sont rangées, dans cette méthode, de manière que celles qui se conviennent par les rapports les plus importants et les plus nombreux se trouvent rapprochées nécessairement et comme associées entre elles. De tout temps on a remarqué qu'il existe parmi les plantes, comme parmi les animaux, des groupes dont tous les individus se ressemblent par tant de points communs, qu'ils paraissent être les membres d'une même famille; c'est à ces groupes principaux que l'on a donné le nom de *familles naturelles*. C'est ainsi que l'on a reconnu les groupes des graminées, des labiées, des crucifères, des synanthérées, des ombellifères, des légumineuses, etc. La méthode de Jussieu nous offre le règne végétal partagé en trois grandes divisions, qui se subdivisent en quinze classes. Chaque classe se compose d'un nombre plus ou moins considérable de familles, formées chacune par la réunion d'un nombre plus ou moins grand de genres. Les grandes divisions primordiales reposent sur un caractère de première valeur, la structure de l'embryon. L'embryon

n'a point de cotylédons, ou il en a un, ou bien il en a deux; de là les trois grandes divisions des plantes *acotylédones*, *monocotylédones*, *dicotylédones*. Les acotylédones forment la première classe de la méthode. Les monocotylédones et les dicotylédones sont subdivisées en classes, d'après des caractères de seconde et de troisième valeur, savoir : l'insertion ou la position relative des étamines, la présence ou l'absence de la corolle, et sa forme monopétale ou polypétale. Les monocotylédones n'ayant point de corolle proprement dite, ont été subdivisées seulement en trois classes, d'après les trois modes d'insertion des étamines, qui peuvent être hypogynes (sous l'ovaire), épigynes (sur l'ovaire), et périgynes (sur le calice). Ce sont les classes des *monocotylédones à étamines hypogynes* (ex. : les graminées), des *monocotylédones à étamines périgynes* (les liliacées), des *monocotylédones à étamines épigynes* (les orchidées).

Les dicotylédones ont d'abord été divisées en *apétales* ou sans corolle, en *monopétales* et en *polypétales*, suivant qu'elles ont une corolle d'une seule pièce ou de plusieurs pièces; puis chacune de ces sections a été partagée en classes, d'après l'insertion des étamines ou de la corolle elle-même, lorsqu'elle est monopétale, parce que, dans ce cas, elle porte les étamines. Les apétales donnent les trois classes suivantes : *apétales à étamines épigynes* (ex. : les aristoloches), *apétales à étamines périgynes* (les polygonées), *apétales à étamines hypogynes* (les plantaginées). Les monopétales constituent pareillement trois classes, suivant que leur corolle staminifère est hypogyne, périgyne ou épigyne; mais la dernière classe a été encore subdivisée, suivant que les anthères sont libres ou réunies; ce qui porte à quatre le nombre des classes dans les corolles monopétales, savoir : les *monopétales à étamines hypogynes* (les labiées, les solanées, les borraginées), les *monopétales à étamines périgynes* (les campanulacées), les *monopétales à étamines épigynes et à anthères réunies* (les synanthérées), les *monopétales à étamines épigynes et à anthères libres* (les dipsacées, les rubiacées). Les polypétales ont également été divisées, d'après leur mode d'insertion, en trois classes : les *polypétales à étamines épigynes* (les ombellifères), les *polypétales à étamines hypogynes* (les renonculacées, les papavéracées), et les *polypétales à étamines périgynes* (les rosacées, les légumineuses). Enfin, dans une dernière classe sont rangées, sous le nom de *diclines* toutes les plantes dicotylédones à fleurs unisexuelles.

Les familles naturelles dans lesquelles se subdivisent les classes sont fondées sur une similitude presque parfaite de structure ou du moins de symétrie dans les organes les plus importants, surtout dans ceux qui sont relatifs à la fructification. Donnons quelques exemples de ces familles, en les choisissant parmi celles qui sont les plus naturelles.

Les *graminées* sont des monocotylédones hypogynes, dont la

tige est un chaume fistuleux, entrecoupée de nœuds solides, de chacun desquels part une feuille engaînante, à gaîne fendue, qui se prolonge en une languette plane plus ou moins longue. Les fleurs portées sur un axe commun sont disposées en épis ou en panicules; elles n'ont pour enveloppe que des écailles, formant des spathes appelées *glumes;* elles ont trois étamines à anthères posées par le milieu sur le filet, et un ovaire libre, surmonté de deux stigmates poilus. Le fruit est une cariopse composée d'un périsperme farineux, creusé à sa base d'une petite fossette, dans laquelle est un petit embryon monocotylédoné. La base de l'ovaire est entourée de deux petites paillettes qui constituent la glumellule; la fleur est immédiatement enveloppée de deux autres écailles ou valves, formant la *balle* ou *glumelle*, et plusieurs fleurs sont souvent rassemblées en un petit groupe, appelé *épillet*, dans une dernière enveloppe qu'on nomme *glume*, et qui est aussi généralement formée de deux écailles.

Les *liliacées* sont des monocotylédones périgynes, à tiges herbacées, à racines bulbifères ou fibreuses, et à feuilles alternes, sessiles ou engaînantes, souvent radicales. Leurs fleurs, enveloppées quelquefois dans une spathe avant leur épanouissement, ont un calice pétaloïde, à six divisions, un ovaire libre à trois loges, renfermant chacune plusieurs ovules attachés à leur angle interne; un style simple, quelquefois nul; un stigmate ordinairement à trois lobes. Le fruit est une capsule polysperme, à trois loges et à trois valves, s'ouvrant par le milieu des loges.

Les *labiées* sont des dicotylédones monocopétales hypogynes, herbacées, ou sous-ligneuses, à tige carrée, à feuilles simples et opposées, à fleurs irrégulières et odoriférantes, situées à l'aisselle des feuilles supérieures; le calice est monosépale, tubuleux, à cinq dents égales ou formant deux lèvres opposées; la corolle est monopétale, tubuleuse, à limbe ordinairement divisé en deux lèvres, l'une supérieure à deux lobes, l'autre inférieure à trois. Les étamines sont ordinairement au nombre de quatre et didynames; elles sont insérées au tube de la corolle sous la lèvre supérieure. L'ovaire est libre, porté sur une sorte de disque jaunâtre, profondément partagé en quatre lobes, et déprimé à son centre, où naît un style terminé par un stigmate à deux divisions. Le fruit se compose de quatre akènes, cachés au fond du calice persistant.

Les *synanthérées* sont des dicotylédones monopétales épigynes, à anthères réunies. Leurs feuilles sont le plus souvent alternes; leurs fleurs sont très petites, réunies en tête et serrées étroitement sur un réceptacle commun, qu'entoure un involucre à plusieurs folioles; chacune d'elles en particulier offre un calice adhérent à l'ovaire, dont le limbe, rarement nul, se présente sous la forme de dent ou d'une aigrette qui couronne la graine; une corolle monopétale, insérée au sommet de l'ovaire, tantôt régulière, tubu-



leuse et à cinq dents (*fleuron*), tantôt irrégulière et en languette (*demi-fleuron*); cinq étamines alternes avec les lobes de la corolle et dont les anthères sont réunies en un tube qui donne passage au pistil; un ovaire monosperme, surmonté d'un style à deux stigmates. Le fruit est un akène nu ou couronné d'une aigrette; la graine est sans périsperme.

Les *ombellifères* sont des dicotylédones polypétales épigynes, à feuilles alternes engaînantes, ordinairement découpées ou décomposées en folioles, à fleurs disposées en ombelles simples ou composées. A la base de ces assemblages de fleurs se trouvent souvent plusieurs petites folioles, formant une collerette que l'on nomme involucre ou involucelle, selon qu'elles entourent la base des ombelles ou celle des ombellules. Chaque fleur se compose d'un calice adhérent à l'ovaire, dont le limbe est entier ou à cinq dents, d'une corolle de cinq pétales insérés sur l'ovaire, de cinq étamines épigynes alternes avec les pétales; d'un ovaire à deux loges renfermant chacune un seul ovule pendant, et de deux styles persistants et divergents. Cet ovaire est surmonté d'un disque formant deux mamelons qui se confondent avec la base des deux styles. Le fruit est composé de deux akènes qui se séparent de bas en haut à la maturité.

Les *crucifères* sont des dicotylédones polypétales hypogynes, à tige herbacée, ayant un calice de quatre sépales caducs, une corolle de quatre pétales onguiculés, opposés en croix, six étamines tétradynames, un ovaire simple et libre, se changeant en une silique, c'est-à-dire en une capsule à deux loges et à placentas pariétaux, séparés par une cloison. A la base des étamines et sur le réceptacle sont quatre glandes dont une entre chaque paire de grandes étamines, et une plus grande sous chaque petite étamine.

Les *caryophyllées* sont des dicotylédones polypétales hypogynes, à tige herbacée, noueuse et articulée, à feuilles simples et opposées, dont les fleurs ont un calice à cinq dents ou à cinq folioles distinctes, une corolle de cinq pétales à longs onglets et à limbe ordinairement étalé, des étamines communément au nombre de dix, dont cinq unies aux pétales et cinq libres, un ovaire libre, à une ou plusieurs loges, surmonté de deux à cinq styles ou stigmates filiformes. Le fruit est une capsule à une ou plusieurs loges polyspermes, s'ouvrant au sommet, et dans laquelle les graines sont attachées à un placenta central.

Les *rosacées* sont dicotylédones polypétales périgynes, à tiges ligneuses ou herbacées, à feuilles alternes et stipulées à la base, dont les fleurs ont un calice monosépale à cinq divisions, tubuleux ou étalé, une corolle de cinq pétales égaux à onglets courts, étalés en rose, insérés sur le calice à l'origine de son tube, et alternes avec les divisions de son limbe; des étamines ordinairement nombreuses (20 environ), placées pareillement sur le calice; un pistil

formé d'un ou plusieurs carpelles, libres ou adhérents, surmontés chacun d'un style latéral et d'un stigmate simple. Le fruit varie beaucoup de forme et de consistance; les graines sont sans périsperme.

Les *légumineuses* sont des dicotylédones polypétales périgynes, à tige ligneuse ou herbacée, à feuilles alternes, stipulées et ordinairement composés, dont les fleurs ont une corolle tantôt irrégulière et papilionacée, tantôt plus ou moins régulière ou même nulle; 10 étamines diadelphes ou monadelphes dans les corolles papilionacées, soudées seulement par leur base ou distinctes dans les corolles régulières; et dont le fruit est toujours une gousse ou un légume, c'est-à dire un fruit sec, bivalve, à une seule loge.

13. Indiquer sommairement la distribution des races végétales à la surface du globe, et les principales causes qui président à cet arrangement.

Les diverses familles et races de végétaux ne sont pas distribuées également à la surface du globe; elles sont plus ou moins abondantes sous les différentes latitudes, et pour une même latitude, elles varient selon la diversité des climats. Les labiées, les amentacées, les ombellifères, les crucifères, semblent appartenir aux zones tempérées; les deux dernières familles disparaissent entièrement dans la zone torride. Les genres des synanthérées vont au contraire en augmentant de nombre, lorsqu'on s'avance des pôles vers les régions équinoxiales, où dominent aussi les légumineuses, les fougères, etc. A mesure qu'on s'éloigne de l'équateur, le nombre des plantes acotylédones va en augmentant, tandis que celui des dicotylédones diminue. On exprime par le mot de *station* la nature spéciale de la localité dans lequelle chaque espèce a coutume de croître, et par celui d'*habitation* l'indication générale du pays où elle croît naturellement et en plus grande abondance. Le premier terme se rapporte au climat et à la nature du sol, ou plus généralement du milieu où séjourne la plante; le second est relatif aux circonstances purement géographiques. Ainsi la station de la renoncule aquatique est dans les eaux douces et stagnantes; son habitation est en Europe. Il y a des plantes qui vivent *éparses* et disséminées; il en est d'autres qui vivent rapprochées et pour ainsi dire en société: ce sont les *plantes sociales*. L'étude des habitations conduit à reconnaître un certain nombre d'espaces ou de régions, que caractérise la présence d'un certain nombre de plantes qui leur sont propres, c'est ce qu'on nomme des *régions botaniques*. La France par exemple peut se partager en trois régions principales: celle de l'olivier ou la région méditerranéenne, celle de la vigne qui s'étend jusqu'au 50e degré de latitude, et celle du pommier, qui est située vers le nord et dépasse de ce côté les limites de notre pays. La végétation, en s'élevant au-dessus du niveau de la mer sur les pentes des

montagnes, subit, mais beaucoup plus rapidement, des modifications analogues à celles qu'elle éprouve en se portant de l'équateur vers les pôles.

14. Enfin, donner des notions générales sur l'emploi des végétaux pour les besoins et les jouissances de l'espèce humaine.

Sous le rapport de l'emploi que nous faisons des végétaux pour satisfaire nos besoins et nos jouissances, on peut les diviser en plantes céréales, plantes à fourrages, plantes potagères, plantes à fruits, plantes médicinales, plantes économiques ou propres aux arts, et plantes d'ornement. Les familles des graminées, des légumineuses et des crucifères fournissent la plupart des plantes appartenant aux trois premiers groupes; celle des rosacées nous donne un grand nombre de fruits à noyaux ou à pépins; beaucoup de plantes de familles très diverses nous fournissent des médicaments utiles, et ce sont tantôt leurs racines (rhubarbe, ipécacuanha, guimauve, réglisse, etc.), tantôt les écorces (quinquina, canelle, etc.), tantôt les feuilles (bourrache, menthe, etc.), tantôt les fruits ou les graines (pavot, ricin, etc.). Parmi les plantes employées dans les arts, on distingue les plantes textiles (chanvre, lin, etc.), les plantes tinctoriales (curcuma, garance, gaude, carthame), les arbres en général pour le bois qu'ils fournissent. Les plantes d'ornement sont si nombreuses, que nous ne pourrions les énumérer ici: nous rappellerons seulement les familles riches en espèces de ce genre, les liliaceés, les narcissées, les iridées, les jasminées, les labiées, les synanthérées, les renonculacées, les caryophyllées et les rosacées.

MINÉRALOGIE.

1. Quelles sont les différences générales qu'on observe entre les corps bruts et les corps organisés ?

Les corps bruts différent principalement des corps organisés, en ce que étant formés par l'aggrégation des particules semblables, on peut toujours les diviser, sans qu'il changent de nature; en fragments de plus en plus petits, qui représentent exactements toutes les propriétés de la masse à laquelle ils ont appartenu. Étant dépourvus d'organisation et par conséquent de vie, ils ne peuvent ni se nourrir, ni se reproduire; ils ne naissent point de corps semblables à eux qui les ont précédés, mais se forment de toutes pièces, toutes les fois que des atomes chimiques de nature différente sont mis en contact et agissent par attraction les uns sur les autres; leur volume peut s'accroître, par juxtaposition de nouvelles molécules, et cet accroissement pourrait avoir lieu indéfiniment; comme aussi la durée de ces corps pourrait être éternelle, si nulle action du dehors ne tendait à les décomposer, car ils ne renferment point en eux-mêmes de cause de destruction, comme les êtres vivants. *Voyez* ci-dessus page (311), la comparaison déjà établie entre les corps organiques et les corps inorganiques.

2. Quelles sont les formes essentielles des corps bruts?

Les corps bruts ou minéraux, considérés en général, n'ont pas de forme propre et constante, comme les corps organiques, et cela parce que ce ne sont que des masses de molécules, dont la structure et la configuration résultent le plus souvent de diverses circonstances locales, dont l'influence a déterminé la réunion des molécules. Mais ces dernières ont dans chaque espèce une forme invariable, dont l'empreinte se retrouve dans les masses qui ont pu *cristalliser*. Ces masses en effet ont alors une structure régulière, et si leur accroissement a pu se faire librement et uniformément dans tout le pourtour, on observe aussi en elles des formes régulières,

polyédriques, auxquelles on donne généralement le nom de *formes cristallines*. Ce sont là les formes les plus importantes que nous offrent les minéraux. Mais, ce qui est digne de remarque, et ce qui distingue encore les minéraux des êtres organiques, c'est que la forme cristalline qui par sa régularité semblerait devoir être déterminée dans chaque espèce, comme celle de l'animal ou du végétal, ne reste pas invariable dans tous les cristaux d'une même substance; ces cristaux offrent un grand nombre de formes, toutes également régulières, qui diffèrent par le nombre et la figure de leurs faces, mais qui ont un même caractère général de symétrie, d'après lequel on peut les rattacher toutes les unes aux autres, ou les faire dériver toutes de l'une d'entre elles. Ainsi les formes diverses d'une même espèce minérale, composent un ensemble, que chacune de ces formes représente à elle seule, et c'est ce groupe ou cette famille de formes qu'on appelle le *système cristallin* du minéral. On connaît six groupes principaux ou six systèmes de formes cristallines.

3. Quelles sont les différences principales des six groupes auxquels on peut rapporter toutes les formes cristallines?

L'une quelconque des formes d'un système cristallin peut-être transformée successivement dans toutes les autres : ce passage a lieu par des troncatures que l'on opère symétriquement sur les arêtes ou sur les angles solides de la forme fondamentale ou génératrice, et dont l'effet est de remplacer ces arêtes ou ces angles par de nouvelles facettes qu'on appelle des *modifications*. En tronquant successivement cette forme, de toutes les manières possibles, conformément à ce qu'exige sa symétrie particulière, on parvient à obtenir toutes les formes de genres différents, dont se compose le système, et qui sont toujours en nombre limité. Les six groupes de formes dont nous avons parlé peuvent être distingués et dénommés par le moyen de la forme, que l'on adopte comme fondamentale dans chacun d'eux, et à l'égard de laquelle les autres jouent le rôle de formes dérivées. On a de cette manière les six groupes suivants : le système cubique; le système rhomboédrique ; le système du prisme droit à base carrée ; le système du prisme droit à base rectangle ; le système du prisme oblique à base rectangle; et le système du prisme oblique à base parallélogramme.

— Le système cubique comprend, outre le cube, l'octaèdre régulier, le dodécaèdre à faces rhombes, trois solides différents à 24 faces, et un solide à 48 facettes. Avec ces sept formes, on observe encore, mais seulement dans un très petit nombre d'espèces, le tétraèdre régulier, ou bien un dodécaèdre à faces pentagonales, et en outre quelques autres formes qui sont des dérivés immédiats de celles-ci.

— Le système rhomboédrique comprend le rhomboèdre (ou pa-

rallélépipide formé de six rhombes égaux), le dodécaèdre à triangles scalènes, le dodécaèdre à triangles isocèles (cas particulier du précédent), et le prisme hexaèdre régulier. Dans quelques espèces on n'observe que ces deux dernières formes, avec d'autres qui en dérivent immédiatement, mais jamais celles qui portent l'empreinte et qui offrent la symétrie du rhomboèdre.

— Le système du prisme droit à base carrée renferme comme formes secondaires l'octaèdre à base carrée ; un prisme à huit pans symétrique, mais non régulier ; et une double pyramide droite, de même base que ce prisme octogonal.

— Le système du prisme droit à base rectangle se compose essentiellement de prismes et d'octaèdres droits à base rectangle ou rhombe.

— Le système du prisme oblique à base rectangle se compose, comme le précédent, de prismes et d'octaèdres à base rhombe ou rectangle, mais cette base est constamment oblique, au lieu d'être perpendiculaire aux arêtes des prismes ou aux axes des octaèdres.

— Enfin, le système du prisme oblique à base parallélogramme se compose essentiellement de prismes et d'octaèdres obliques, à bases parallélogrammes.

' 4. Qu'entend-on par clivage ou structure régulière?

On entend par *clivage* ou structure régulière des corps cristallisés, une disposition régulière des molécules, qui permet de diviser les corps mécaniquement, suivant des plans parfaitement lisses, et aussi brillants que les faces naturelles. Telle est en effet la structure intérieure d'un cristal, qu'on peut le considérer comme étant composé dans certaines directions de tranches ou couches planes de molécules, superposées entre elles, chacune de ces couches étant formée à son tour de rangées droites de molécules, juxtaposées parallèlement. Ces files et ces couches de molécules ne se touchent point, mais sont séparées par des fissures régulières. Or, à l'aide d'une lame d'acier, introduite avec précaution dans la direction d'une de ces fissures, et sur laquelle on appuie ou l'on frappe légèrement, on parvient souvent à vaincre l'adhérence de deux couches contiguës, et à mettre à découvert les plans par lesquels elles se regardaient. C'est ainsi qu'on divise facilement les substances appelées gypse, mica, talc, calcaire, etc. Quand un cristal a été ainsi clivé une première fois dans un certain sens, on peut continuer le clivage sur les fragments obtenus, parallèlement aux nouvelles faces, de manière que ce cristal peut être partagé en lames de plus en plus minces, au moyen de divisions successives repétées toujours dans le même sens.

Il y a des substances qui ne peuvent être clivées nettement que

dans un seul sens (les micas). Il en est d'autres qui sont susceptibles de clivage dans plusieurs sens à la fois, en sorte que les fragments qu'on en détache par la percussion sont des polyèdres, c'est-à-dire des solides terminés de toutes parts par des plans. Ces plans de clivage sont toujours inclinés entre eux, sous les mêmes angles dans tous les cristaux et toutes les masses cristallisées de la même espèce. Ainsi, tous les cristaux de calcaire (carbonate de chaux ordinaire) se divisent toujours en fragments rhomboèdriques d'une figure constante; tous ceux de galène (sulfure de plomb) se divisent en fragments cubiques, etc. Lorsque les plans de clivage donnent par leur combinaison un solide polyédrique complet, on appelle ce polyèdre *solide de clivage*. On lui a donné aussi le nom de *noyau*, parce que tous les cristaux de la même espèce peuvent, quelle que soit leur forme extérieure, être divisés mécaniquement en deux parties, une partie centrale qui est la même pour tous, parce qu'elle représente le solide de clivage, et qui fait dans chacun d'eux l'office d'une espèce de noyau, et d'une partie enveloppante, composée de lames ou couches de molécules, appliquées successivement sur les différentes faces de ce noyau. On est parti de cette idée, pour rendre compte de la diversité des formes, sous lesquelles se présentent les divers cristaux d'une même espèce minérale.

5. En quoi consistent les structures irrégulières ?

Les cristaux seuls possèdent une structure parfaitement régulière. Les minéraux non cristallisés, ou mal cristallisés, ont une structure irrégulière, qui consiste dans une réunion plus ou moins confuse de molécules, ou même le plus souvent de parties distinctes à la vue. Telles sont les structures des masses qu'on appelle *compactes*, *vitreuses*, *terreuses*, et celles qui résultant de l'agrégation d'un grand nombre de lamelles, de grains, de fibres, de petits globules, de feuilles ou de veines superposées, ont reçu les noms de *structures lamellaires*, *grenues*, *fibreuses*, *oolitiques*, *schisteuses* et *stratiformes*. Le marbre statuaire a une structure lamellaire et comme saccharoïde; le grès des paveurs a une structure grenue; le minerai de fer en grains a une structure oolitique; l'ardoise a une structure schisteuse; l'albâtre veiné a une structure stratiforme.

6. Quelles sont les autres propriétés physiques que présentent les minéraux ?

Indépendamment de la forme et de la structure, les minéraux présentent encore d'autres propriétés physiques, qui peuvent fournir de bons caractères pour les reconnaître et les distinguer. Telles sont celles que l'on désigne par les noms de *pesanteur spécifique*, de *dureté*, de *cassure*, d'*éclat* et de *couleur*, de *réfraction*, et les pro-

priétés électriques et magnétiques. Les minéraux de nature diverse n'ont pas le même poids à volume égal. On donne le nom de *pesanteurs spécifiques* aux nombres qui expriment combien de fois les différentes substances naturelles pèsent autant que l'eau, en supposant celle-ci réduite au même volume qu'elles. Les minéraux, en vertu de la cohésion qui réunit leurs particules, résistent plus ou moins à l'effort qu'on fait pour les rayer avec une pointe vive d'acier, ou avec les parties aiguës d'un autre minéral : c'est cette résistance qu'on nomme *dureté* en minéralogie. C'est une propriété relative, que l'on ne peut exprimer qu'en prenant des termes de comparaison parmi les substances communes, et ainsi l'on distingue les minéraux qui raient le calcaire, ou le cristal de roche, de ceux qui ne le raient pas. On entend par le caractère de *cassure* l'aspect particulier que présente la surface nouvelle, que l'on a produite artificiellement dans un minéral, en le divisant par le choc du marteau. On considère la cassure sous trois rapports différents, sous celui de la structure qu'elle met à nu, sous le rapport de l'éclat, et sous le rapport de la forme de la surface. *L'éclat* d'un minéral varie beaucoup : il est métallique, ou vitreux, ou résineux, ou nacré, etc. La *couleur* est propre au minéral, ou bien elle est accidentelle. La couleur propre est celle qui est uniforme et constante dans un corps, étant due à ses propres molécules. La couleur accidentelle est celle qui dépend de la présence de particules colorées, étrangères à celles qui constituent l'espèce minérale. La *réfraction* est le changement de direction qu'éprouve la lumière, lorsque tombant obliquement sur la surface d'un minéral, elle pénètre dans son intérieur. Tous les cristaux transparents réfractent la lumière, mais les uns la dévient, sans la diviser, et l'on dit qu'ils ont la réfraction simple ; d'autres, en la déviant, la partagent en deux faisceaux qui suivent des routes différentes : ils manifestent une double réfraction. Quant aux propriétés électriques, on les développe dans les minéraux, soit par le frottement, soit par la pression, soit en rendant leur température croissante ou décroissante. Il est quelques substances, parmi les métalliques, qui possèdent la propriété magnétique, c'est-à-dire qu'ils peuvent agir sur une aiguille de boussole pour la faire mouvoir, en attirant et quelquefois en repoussant l'une de ses extrémités.

7. De combien de manières les corps bruts peuvent-ils différer les uns des autres sous le rapport de la composition ?

Les corps bruts ou les minéraux peuvent offrir de nombreuses différences, lorsqu'on les compare entre eux sous le rapport de la composition. Il est d'abord des masses minérales, qui sont évidemment hétérogènes, parce qu'elles résultent de l'agrégation de masses plus petites ou de particules discernables d'espèces différentes (ex. : le

granite). Celles qui sont uniformes dans leur composition, peuvent être partagées en deux séries : les unes ne sont homogènes qu'en apparence ; elles résultent de l'agrégation de molécules de diverses natures, ou même de particules assez grossières, mais cependant capables d'échapper à la vue par leur petitesse (ex. : les argiles) ; les autres sont réellement homogènes dans leur constitution moléculaire, c'est-à-dire qu'elles sont dans toute leur étendue formées de molécules semblables. C'est à ces dernières que s'applique de la manière la plus convenable la dénomination d'*espèces minérales*.

Les espèces minérales diffèrent entre elles par la composition chimique de leur molécules. Il en est qui, considérées sous ce dernier rapport, sont des substances simples, c'est-à-dire que leurs molécules n'ont pas pu être décomposées chimiquement, ou qu'on a pu en extraire plusieurs sortes de matières, douées chacune de propriétés distinctes. Mais le plus grand nombre sont composées, c'est-à-dire que leurs molécules sont des combinaisons chimiques, de divers atomes simples, réunis entre eux par cette force d'attraction qu'on appelle *affinité*. Parmi les composés minéraux, il en est qui ne sont formés que de deux atomes ; ce sont des composés binaires (ex. : les oxides, les sulfures, les chlorures, les alliages de deux métaux, etc.) Il en est qui résultent de la réunion de trois atomes, ou qui sont ternaires ; tels sont les hydrates d'oxides, les sels ou combinaisons de deux oxides, les doubles sulfures, etc. D'autres sont des composés quaternaires, ou même d'un degré plus élevé encore (les sels hydratés, les sels doubles, etc.) Les molécules des corps composés, sont des combinaisons définies d'atomes, dans lesquelles chaque sorte d'atome simple entre pour un nombre déterminé. De plus, dans la molécule de chaque espèce minérale, les atomes simples sont toujours groupés entre eux de la même manière, de sorte que cette molécule a une forme pareillement déterminée.

8. Comment s'établissent les différences entre des corps qui sont formés des mêmes éléments?

Lorsque des corps sont formés d'atomes, qui diffèrent en tout ou en partie par leur nature, la distinction entre ces corps s'établit aisément, par le moyen de l'analyse chimique, qui constate la diversité de leurs composants élémentaires. Mais lorsque deux corps sont formés des mêmes éléments, et que cependant ils sont d'espèces différentes, la différence d'espèces s'établit le plus souvent entre eux par celle des proportions relatives, suivant lesquelles ces atomes entrent dans les deux corps, c'est-à-dire dans les molécules des deux espèces. C'est encore l'analyse chimique qui constate cette diversité de composition relative. Elle l'exprime, en indiquant combien dans 100 parties en poids du composé il

entre de parties de chaque composant; ou combien, pour un atome d'une certaine sorte, il entre d'atomes de chaque autre sorte dans une molécule de l'espèce.

9. L'analyse seule suffit-elle toujours pour établir clairement la différence que les corps présentent ?

Quoique l'analyse puisse ainsi, dans le plus grand nombre de cas, établir clairement la différence d'espèce de deux corps comparés l'un avec l'autre, elle ne suffit cependant pas toujours pour atteindre ce but, car elle ne nous fait connaître que la composition relative des espèces; et il y a des minéraux qui, ayant même composition relative, c'est-à-dire étant formés des mêmes élements réunis entre eux dans les mêmes rapports, diffèrent par leur composition absolue, les nombres réels d'atomes qui donnent ces rapports n'étant pas les mêmes pour chacun de ces corps. Il en résulte que les groupes atomiques ou les molécules diffèrent, et que par conséquent les corps ne sont pas semblablement constitués.

10. Lorsqu'elle ne suffit pas, comment y supplée-t-on ?

Dans ce cas, on est obligé d'avoir recours à d'autres caractères, pour les combiner avec celui que fournit l'analyse; ces caractères auxiliaires sont pris dans les propriétés physiques, qui sont ordinairement très différentes, telles que la forme et la structure cristallines, la pesanteur spécifique, la dureté, etc. C'est ainsi qu'il existe deux pierres calcaires, qui donnent exactement le même résultat à l'analyse, et qui cependant diffèrent notablement entre elles par l'ensemble de leurs caractères physiques. L'une (le calcaire commun) cristallise et se clive avec la plus grande facilité en rhomboèdres, ne possède, quand elle est transparente, qu'un seul axe de réfraction double, est plus tendre, et spécifiquement plus légère, etc.; l'autre (l'arragonite) cristallise en prisme très différent du rhomboèdre, est d'un clivage très difficile, a deux axes de double réfraction, etc. Il en est de même des deux espèces de sulfure de fer (la pyrite commune et la sperkise). Ces cas toutefois sont rares parmi les substances naturelles; mais ils se présentent assez fréquemment dans les substances artificielles et constituent ce que les chimistes appellent des composés isomères.

11. Quels sont les degrés relatifs d'importance qu'on peut attribuer aux diverses propriétés des minéraux?

Les diverses propriétés des minéraux n'ont pas le même degré d'importance, relativement à la distinction et à la classification des espèces minérales. Il est d'abord évident que celles qui dépendent plus ou moins immédiatement de la nature de la molécule, sont beaucoup plus importantes que celles qui proviennent seulement des

structures accidentelles ou des arrangements irréguliers que ces molécules ont pu prendre; les premières seules peuvent fournir des caractères spécifiques; les secondes ne donnent que des caractères de variétés. Parmi les caractères spécifiques, on doit mettre en première ligne celui que l'on tire de l'analyse chimique. C'est en effet celui qui représente le mieux la composition moléculaire, et sa valeur est encore accrue par son degré de permanence dans l'espèce; il s'étend en effet à tous les individus, quelles que soient leurs formes et leurs structures. Le caractère tiré de la forme cristalline a aussi une grande valeur pour la spécification, car il est lié à la forme de la molécule elle-même, et par suite à la composition atomique considérée d'une manière absolue. Cependant, il ne peut venir qu'à la suite du précédent, car il ne s'étend pas à toutes les variétés de l'espèce, puisque le plus grand nombre ne sont point cristallisées. Et d'ailleurs, la même forme (le cube par exemple) peut convenir à une multitude d'espèces différentes. Il n'en a pas moins une très grande valeur, et s'il ne peut être employé seul à la détermination précise des espèces, il sert à rapprocher celles qui ont le plus d'analogie, et contribue ainsi à la formation de groupes assez naturels. Le caractère tiré de la réfraction peut être assimilé à celui de la forme cristalline, avec lequel il se montre parfaitement en rapport. Viennent ensuite, comme caractères de second ou de troisième ordre, ceux qui dérivent de la densité et de la dureté, de la couleur, etc.; on les emploie souvent comme auxiliaires des précédents, qui sont les vrais caractères spécifiques.

12. Quelles sont celles de ces propriétés qu'on peut plus particulièrement employer comme caractères?

Ce sont donc en général les caractères fournis par l'analyse chimique, par la forme cristalline, par les propriétés optiques, par la densité et la dureté des minéraux, qui sont le plus particulièrement employés dans la détermination des espèces. S'il s'agit d'une espèce nouvelle à déterminer, il faut en faire une analyse complète et rigoureuse; mais s'il n'est question que de reconnaître une espèce, qui a déjà été déterminée, et qui a sa place dans la méthode, le problème est beaucoup plus simple; et dans ce cas on substituera à l'analyse rigoureuse de simples essais chimiques, qui se font avec facilité et promptitude. Dans ce cas, une heureuse combinaison de caractères, choisis parmi les plus simples, et qui tirent leur principale force de leur réunion, conduit d'une manière sûre au but que l'on veut atteindre.

13. Définition de l'espèce minérale.

L'espèce minérale est la collection de tous les corps qui sont formés des mêmes molécules, ou qui sont identiques par leur composition

chimique, c'est-à-dire par la nature, le nombre et le mode de groupement de leurs atomes élémentaires. L'analyse faisant connaître la nature et la quantité relative des atomes, et la forme cristalline paraissant dépendre du nombre réel de ces atomes et de leur mode de groupement, on doit conclure de là que les minéraux de même espèce sont ceux qui s'accordent dans lenr analyse et dans leur forme cristalline.

14 Que doit-on entendre par genre en minéralogie ?

On appelle *genre* en minéralogie un groupe formé d'espèces, qui ont une grande analogie de composition chimique et de caractères extérieurs. Pour qu'il y ait analogie dans la composition, il faut que les espèces réunies aient au moins un principe commun, choisi parmi ceux que l'on appelle en chimie *bases* ou *acides*, ou plus généralement principes électro-positifs et principes électro-négatifs. Pour que les groupes soient le plus naturels qu'il est possible, on choisi de préférence les acides ou principes électro-négatifs, parce que les espèces qu'ils rapprochent se trouvent avoir le plus d'analogie dans l'ensemble de leurs caractères, et particulièrement sous le rapport de la composition chimique, de la forme cristalline, de la pesanteur spécifique et souvent même de l'aspect extérieur. C'est ainsi que l'on a établi les genres *oxides*, *sulfures*, *chlorures*, *etc.*; les genres *carbonates*, *sulfates*, *silicates*, *etc.*

15. Peut-on former quelques autres groupes naturels de minéraux ?

Après avoir ainsi gronpé toutes les espèces en genres, on peut grouper ensuite les genres en familles, en réunissant, par exemple, tous ceux dont les principes électro-négatifs ont pour type primitif un même élément. On placera, par exemple, dans une même famille (les sulfurides), les genres *sulfures*, *sulfites*, *sulfates* auxquels on pourra même joindre le soufre lui-même et ses oxides. On aura semblablement les familles des carbonides, des chlorides, des silicides, etc. Enfin, on peut encore chercher à grouper les familles en un petit nombre de classes, en partant, soit de quelque caractère chimique d'un haut degré de généralité, soit de quelques caractères purement extérieurs et par conséquent faciles à saisir, comme ceux qui avaient fait anciennement partager les minéraux en pierres, en métaux, et en combustibles.

16. Quels sont les principaux minéraux qui composent les formations cristallines du globe, et ceux qui se trouvent dans les formations sédimentaires ?

L'écorce minérale du globe terrestre est composée d'un grand nombre de masses ou roches de diverse nature, les unes régulières, en forme de bancs ou de couches, qui se recouvrent l'une l'autre dans un ordre fixe de superposition; les autres plus ou moins irrégulières, placées au-dessous des terrains à couches ou intercalées entre eux. Les premières sont des formations sédimentaires, dues

à l'action des eaux superficielles, c'est-à-dire que leurs matériaux, réduits à l'état de parties plus ou moins grossières, entraînés ou tenus en suspension par les eaux des rivières, des lacs et des mers, ont fini par se déposer sur leur fond, en se mélangeant avec les débris des coquillages et autres animaux que les eaux nourrissaient. La seconde classe de masses minérales comprend les formations ignées, le plus souvent cristallines, et dont la cristallisation paraît avoir été précédée d'un état de fusion par le feu. Tels sont les granites, les porphyres, les basaltes et les laves volcaniques. Au milieu des couches et des masses cristallines de formes irrégulières, s'observent d'autres masses minérales auxquelles on donne les noms d'*amas* et de *filons*. Les amas sont ordinairement des masses circonscrites, de forme ovale et lenticulaire qu'enveloppent de toutes parts des roches de nature différente. Les *filons* sont des masses en forme de grandes plaques ou de coins aplatis, qui coupent transversalement les couches qui les renferment, et dont la matière composante diffère plus ou moins de celle qui constitue la roche environnante. On peut les considérer comme provenant de fentes ou de grandes lézardes qui se sont produites à travers les assises de ces terrains, pendant ou après leur formation, à la suite de quelques commotions du sol, qui auraient dérangé leur assiette, lesquelles fentes auront été postérieurement remplies, en tout ou en partie, de matières pierreuses ou métalliques. Les substances minérales, qui font partie essentielle des grandes masses minérales dont nous avons parlé, sont en assez petit nombre. Toutes les autres espèces du règne minéral ne se montrent qu'accidentellement et presque toujours en faible quantité au milieu d'elles. Tantôt on les rencontre dans les roches sous forme de feuillets ou de veines qui sont en petit ce que les couches et les filons offrent en grand; tantôt on les trouve sous la forme de très petits amas, renfermés dans l'épaisseur des grandes masses, et qui reçoivent les dénominations particulières de nids, de rognons, de noyaux ou d'amandes. Enfin, le plus grand nombre des substances qui se présentent en parties isolées, sont *disséminées* en cristaux ou en grains dans l'intérieur des grandes masses, ou bien *implantées* sur les parois des filons et autres cavités souterraines.

Les principaux minéraux qui composent les formations cristallines du globe sont : le quarz, le feldspath, le mica, le talc, l'amphibole et le pyroxène. On y trouve, en outre, disséminés le corindon, le spinelle, la topaze, l'émeraude, la tourmaline, le grenat, la fluorine, etc. Les métaux usuels et leurs principaux minerais s'y montrent, soit en amas, soit dans l'intérieur des filons. Aux formations sédimentaires se rapportent plus particulièrement le calcaire, le gypse, le sel gemme, le diamant et la plupart des combustibles.

Le *quarz* est un des minéraux qui se trouvent le plus abondamment dans la nature; on le rencontre partout à la surface et

dans les profondeurs du globe. Il est formé de silice pure. Il est assez dur pour rayer le verre et l'acier, et donner des étincelles par le choc du briquet. Il est infusible au feu du chalumeau, lorsqu'on le chauffe seul, ce qui le distingue du feldspath avec lequel on pourrait quelquefois le confondre. On en distingue quatre variétés principales : le quarz-hyalin, l'agate, le jaspe et l'opale. Le quarz hyalin a l'aspect vitreux dans sa cassure. Il est souvent cristallisé sous la forme d'un prisme à six pans dont les bases sont recouvertes de pyramides droites. Quand il est transparent, on le nomme *cristal de roche*. L'agate est compacte, demi-transparente, à cassure écailleuse ou conchoïdale ; elle se présente presque toujours sous forme de rognons ou de stalactites. On la nomme *calcédoine* quand sa cassure est écailleuse, sa couleur vive et sa transparence nébuleuse ; *silex*, quand sa cassure est terne, conchoïdale ou plate. Le jaspe, est tout-à-fait opaque, a une pâte fine avec une cassure terne, et des couleurs plus ou moins foncées. L'opale renferme toujours une certaine quantité d'eau ; elle est résineuse, et ressemble à une matière gélatineuse qui se serait consolidée en se desséchant.

Le *feldspath* est un silicate d'alumine et d'une base alcaline qui est tantôt la potasse, tantôt la soude et quelquefois la chaux. Sa composition étant susceptible de varier, il en résulte que sous le nom de feldspath on comprend plusieurs espèces différentes : l'*orthose*, qui est à base de potasse, l'*albite*, qui est à base de soude, et le labrador, qui est à base de soude et de chaux. Toutes ces espèces ont une dureté presque comparable à celle du quarz, et la propriété de fondre au chalumeau en émail blanc. Quand elles sont cristallisées, elles offrent toujours des clivages d'une grande netteté, et dont les directions sont perpendiculaires (dans l'orthose) ou à peu près perpendiculaires entre elles (dans l'albite et le labrador). Le feldpath commun des granites appartient à la première espèce. Quand il devient compacte, on le nomme petrosilex, quelquefois il se décompose, et en perdant son alcali et une partie de sa silice, il se transforme en une sorte d'argile infusible qu'on nomme *kaolin*, et qui est la terre à porcelaine.

Le *mica* est de même que le feldspath un genre, plutôt qu'une simple espèce, de l'ordre des silicates alumineux. Il s'offre toujours en petites masses laminaires, en feuillets minces ou en paillettes, divisibles en lamelles d'une grande ténuité, brillantes, flexibles et élastiques. Ses teintes ordinaires sont le brun, le vert, le noirâtre, le blanc et le jaune avec éclat métalloïde. — Le *talc* est un silicate de magnésie et de fer, qui se rapproche beaucoup du mica par ses caractères extérieurs ; comme lui, il se présente sous la forme de feuillets minces et flexibles, mais ces feuillets sont mous et élastiques. Il est en outre beaucoup plus tendre, et sa poussière est onctueuse au toucher.

L'*amphibole* est un petit genre composé de quelques silicates,



semblables par leur composition chimique et par leur forme cristalline, et qui ont pour caractère commun de présenter deux clivages très éclatants et d'une égale netteté, faisant entre eux un angle très ouvert, et des formes qui dérivent d'un prisme oblique à base rhombe. On en distingue trois espèces principales : la *trémolite*, qui est blanche ou légèrement verdâtre, et que l'on trouve en cristaux prismatiques allongés ou en masses composées de fibres soyeuses; l'*actinote*, qui est d'un vert plus ou moins foncé, en baguettes ou en aiguilles allongées qui vont en rayonnant autour d'un centre; la *hornblende*, qui est d'un vert presque noir ou d'un noir brunâtre, s'offrant fréquemment en masses lamellaires ou en aiguilles reconnaissables à leur clivage éclatant. On rapporte à l'espèce *trémolite* une partie des substances filamenteuses connues vulgairement sous le nom d'*amiante* ou d'*asbeste*.

Le *pyroxène* est un autre genre de substances cristallines isomorphes, dont la composition se rapproche beaucoup de celle des amphiboles. On les distingue de ceux-ci par leur éclat en général moins vif, leur aspect plus vitreux, et surtout par leur clivage qui a lieu parallèlement aux faces d'un prisme oblique à base rhombe, dont les pans font entre eux un angle aigu, au lieu de l'angle très ouvert des amphiboles. On distingue plusieurs espèces de pyroxène : le *diopside* qui est blanc ou grisâtre; la *sahlite*, qui est verte, et l'*augite*, qui est d'un vert noirâtre. La *diallage* peut encore être rapportée au même genre.

Les substances précédentes font partie essentielle des grandes masses cristallines; les suivantes au contraire ne s'y montrent que disséminées, ou implantées sur les fissures des cavités qui les traversent. Le *corindon*, minéral infusible, est le plus dur après le diamant ; c'est de l'alumine pure, cristallisée en rhomboèdres, en prismes et doubles pyramides hexaèdres. A cette espèce appartiennent les pierres dites *rubis*, *saphir et topaze d'Orient*, et la substance vulgairement appelée *émeri*. Celle-ci est un corindon grenu, mêlé de fer. — Le *spinelle*, minéral d'une dureté très grande, presque égale à celle du corindon ; il est composé essentiellement d'alumine et de magnésie; il cristallise en octaèdre régulier. Ses cristaux, ordinairement fort petits, fournissent à la joaillerie les pierres appelées rubis spinelle et rubis balais. Le rubis spinelle est d'un rouge ponceau : il doit sa couleur à quelques parties d'acide chromique.— La *topaze* : c'est une substance vitreuse, assez dure pour rayer le quarz, cristallisant en prismes droits à base rhombe, et se clivant avec une facilité et une netteté remarquables dans une seule direction perpendiculaire à l'axe des cristaux. Il y a des topazes incolores, des topazes jaunes (au Brésil), des topazes blanchâtres ou jaune paille (en Saxe), des topazes d'un bleu céleste (en Sibérie). — L'*émeraude*, substance vitreuse, cristalline, plus dure que le quarz, et fusible en verre blanc au chalumeau. Elle est composée de silice, d'alumine et de glucine, et cristallise en prismes

hexaèdres réguliers. Elle est tantôt d'un vert pur, couleur due à l'oxide de chrôme (émeraudes du Pérou, et d'Égypte), tantôt d'un bleu verdâtre ressemblant à la teinte de l'eau de mer (aigue-marines de Sibérie), tantôt jaune ou incolore (Béril). — La *tourmaline*, substance à cassure vitreuse, fusible, d'une dureté à peine supérieure à celle du quarz, très électrique par la chaleur, et cristallisée en prismes ou en aiguilles cylindroïdes, très allongées, dérivant d'un rhomboèdre. C'est un silicate double, qui renferme toujours une petite quantité d'acide borique. Il y a des tourmalines brunes ou noirâtres, des tourmalines d'un vert sombre, d'un bleu indigo, d'un rouge violet, etc. — Le *grenat :* on nomme ainsi des pierres composées de silice, d'alumine, et d'une autre base qui varie dans les grenats de couleur différente ; elles ont toutes l'aspect vitreux, et sont toujours cristallisées en dodécaèdres rhomboïdaux, ou en solides à 24 faces trapézoïdales ; ils sont tous fusibles en émail, et assez durs pour rayer le verre. Il y a des grenats verts, des grenats rouges, des grenats bruns et opaques, et des grenats noirs. — Le *fluor :* c'est un fluorure de calcium. Il est vitreux, plus tendre que le quarz, et plus dur que le calcaire, cristallise ordinairement en cubes, et se fait remarquer par la diversité des teintes vives, vertes, jaunes, bleues, violettes, dont ses cristaux sont ornés. Il se clive avec la plus grande netteté dans quatre sens différents, parallèles aux faces d'un octaèdre régulier. Il est attaqué par l'acide sulfurique, qui en dégage une vapeur blanche, capable de corroder le verre.

On trouve aussi au milieu des formations cristallines, tantôt en amas, tantôt en veines ou en filons, la plupart des métaux usuels, et leurs principaux minerais. Le fer à l'état natif n'existe point dans les roches qui composent l'écorce terrestre, mais on l'y trouve abondamment à l'état de *fer oxidulé* ou *magnétique*, de *fer oligiste* ou *peroxidé*, de *fer hydroxidé*, et de *fer spathique* ou *carbonaté*. — Le plomb n'existe point non plus à l'état métallique, mais il existe plusieurs minerais de ce métal ; le seul que l'on exploite est le sulfure de plomb ou la *galène*, substance d'un gris métallique, qui se clive facilement en cubes. — Le cuivre se rencontre à l'état métallique, à l'état de cuivre oxidulé, de cuivre sulfuré, de cuivre carbonaté, etc. — L'étain ne se montre qu'à l'état d'oxide ; le zinc à l'état de sulfure ou de *blende* et à l'état de calamine, sorte de pierre qui est formée de silicate et de carbonate de zinc ; le mercure à l'état de cinnabre ou de sulfure ; l'argent à l'état natif, à l'état de sulfure, de chlorure, etc. — L'or se montre seulement à l'état natif et en veines dans les roches cristallines, ou dans les filons qui les traversent, mais indépendammment de ce gisement, on le retrouve encore en paillettes ou en grains disséminés dans les dépôts arénacés des alluvions anciennes, avec le platine, le diamant et un grand nombre de pierres précieuses.

Les principales substances qui se rencontrent dans les formations

sédimentaires sont le calcaire, le gypse, le sel gemme, le diamant et les divers combustibles charbonneux. — Le *calcaire* ou carbonate de chaux rhomboèdrique est l'un des minéraux le plus abondamment répandus dans la nature. On le distingue aisément de tous les autres par la faculté qu'il a de se dissoudre avec effervescence dans les acides, de se réduire en chaux vive par le grillage au feu, et de se laisser rayer profondément par une pointe de fer. Lorsqu'il est cristallisé, il se clive aisément dans trois sens en fragments rhomboïdaux; ces masses clivables, quand elles sont en même temps incolores et d'une transparence parfaite, sont connues sous le nom de *spaths d'Islande;* elles possèdent la double réfraction à un haut degré et doublent les images des objets qui sont vus à travers des faces parallèles. Cette espèce présente de nombreuses formes cristallines (rhomboèdres, prismes hexaèdres réguliers, dodécaèdres à faces triangulaires, etc.); elle est aussi féconde en variétés de formes accidentelles (stalactites, pisolithes, etc.), et en variétés de structure (calcaire fibreux, saccharoïde, oolithique, compacte, terreux, etc). C'est à cette espèce que se rapportent les marbres statuaires, les marbres colorés, la craie, la pierre lithographique, et toutes les pierres calcaires employées dans les constructions ou pour l'extraction de la chaux. — Le *gypse* ou la pierre à plâtre est une substance très tendre, que l'ongle raie facilement, et qui se divise en lames minces dans un seul sens, quand elle est cristallisée. Si l'on chauffe ces lames, elles se divisent d'elles-mêmes en une multitude de feuillets qui décrépitent et blanchissent, ce qui tient à ce que la pierre abandonne alors l'eau qui fait partie de sa constitution; c'est en effet un sulfate de chaux hydraté, que le feu convertit en une matière blanche et terne, qui est le plâtre. Sa cristallisation se rapporte au système des prismes obliques à base rectangle. C'est à cette substance qu'appartient l'albâtre blanc dont on fait des vases et des pendules. — Le *sel gemme* ou sel marin est un chlorure de sodium, soluble, d'une saveur connue de tout le monde, ayant une structure laminaire qui conduit au cube par le clivage et quelquefois une texture grenue ou fibreuse.

Le *diamant* appartient au groupe des minéraux combustibles, car il n'est formé que de carbone pur; mais ses propriétés extérieures le rapprochent des pierres auxquelles on donne le nom de *gemmes* ou de pierres fines; il est le plus dur de tous les minéraux connus, a un éclat très vif et réfracte très fortement la lumière, mais sans doubler les images des objets. Il cristallise et se clive en octaèdre régulier. On le trouve en cristaux isolés, le plus souvent à faces arrondies, disséminés dans des terrains d'alluvion anciens, situés à peu de profondeur au-dessous du sol, et formés d'un sable ou d'un poudingue quarzeux, à ciment ferrugineux. Les diamants sont le plus souvent sans couleur; on en connaît cependant de colorés en jaune, en vert, en rose, etc; tous ceux que l'on trouve dans le commerce viennent de l'Inde ou du Brésil.

Le *graphite* est une substance charboneuse d'un gris de plomb, et d'un éclat métalloïde, qui est douce au toucher et tache les doigts en gris ; c'est du carbone presque pur, mêlé d'une petite quantité de matière ferrugineuse. — L'*anthracite* est une antre substance charboneuse, d'un noir métalloïde, qui brûle difficilement avec une flamme très courte, sans répandre de fumée ni d'odeur ; elle est aussi composée presque entièrement de carbone, sans matière bitumineuse. — La *houille* est une substance charboneusc, d'un noir luisant, qui brûle aisément avec flamme, fumée et odeur bitumineuse et qui donne, lorsque la flamme s'éteint, un charbon léger métalloïde qu'on nomme *coak*, et après la combustion, un résidu de cendres scoriacées ; c'est du carbone mêlé de bitume et de quelques parties terreuses. On en distingue deux variétés principales : la houille grasse et collante, qui est riche en bitume, se gonfle en brûlant, et dont les parties se collent entre elles ; et la houille sèche ou maigre, qui est trop pauvre en bitume pour pouvoir se boursouffler ni se coller. — Le *lignite* est une substance charbonneuse, noire ou brune, provenant de tiges de végétaux ligneux, et présentant fréquemment dans son tissu fibreux, des traces de son origine ; il s'allume et brûle aisément, donne par la distillation le même acide que le bois, et par la combustion, un charbon semblable à la braise, avec une cendre terreuse analogue à celle de nos foyers. (Voyez pour le gisement de ces différentes substances, la partie géologique).

17. Quelles sont les principales applications des minéraux aux besoins de la société ?

Les applications des minéraux aux besoins de la société sont très nombreuses. Il suffit de rappeler ici que l'architecture emprunte au règne minéral la plupart des matériaux qu'elle emploie, soit pour construire, soit pour décorer les édifices (pierres calcaires, meulières, grès, granites, marbres, albâtres, pierre à plâtre, etc.) ; que l'agriculture y puise une partie des matières dont elle se sert pour amender les terres (marnes, plâtre, etc.) ; que les arts mécaniques en tirent tous les métaux avec lesquels se travaillent une multitude d'instruments précieux ; que les arts chimiques et céramiques y trouvent les matières premières qui sont la base d'un grand nombre de fabrications (alun, sel commun, borax, sulfates divers ; terres à briques, à carreaux, à poteries ; sables pour les verreries, etc.). Beaucoup de minéraux sont recherchés comme objet de luxe et de parure (les différentes pierres précieuses) ; d'autres sont employés dans les arts du dessin et de la peinture (blanc d'Espagne, outremer, ocres de diverses espèces, graphite, etc.) ; dans l'art de la lithographie (certains calcaires compactes à grain fin) ; d'autres fournissent des matières propres à dégraisser ou à détacher, des pierres à aiguiser, des substances à polir, etc.



GÉOLOGIE.

1. Quelle est la forme de la terre?

La forme de la terre est celle d'un sphéroïde, c'est-à-dire d'un corps peu différent d'une sphère, et ce sphéroïde est légèrement aplati vers les deux pôles. On sait que l'on nomme ainsi deux points fixes de la surface terrestre, qui sont les extrémités d'un axe autour duquel notre globe tourne sans cesse. La figure de la terre est déterminée par la surface de l'océan, que l'on suppose prolongée uniformément au-dessous des continents et des îles; on fait ainsi abstraction de toutes les inégalités du sol, qui deviennent comme insensibles lorsqu'on les compare à la masse totale du sphéroïde. On a reconnu, tant par les mesures géodésiques, que par les observations du pendule, que la quantité de l'aplatissement du sphéroïde terrestre était d'environ un trois-centième; c'est-à-dire que la différence entre les rayons de l'équateur et du pôle était la trois-centième partie du rayon de l'équateur. Le rayon du pôle est de 1428 lieues, et celui de l'équateur de 1433. La différence est de 5 lieues, d'où il suit que la terre est de 10 lieues moins allongée dans le sens de son axe que dans le sens du diamètre de l'équateur.

2. Quelles conséquences générales peut-on tirer du degré d'aplatissement de la terre à ses pôles?

L'aplatissement de la terre vers ses pôles tend à faire supposer que le globe terrestre a été originairement fluide; car c'est exactement la forme que, dans cette hypothèse, il a dû prendre de lui-même, en vertu de son mouvement de rotation, comme le démontrent les calculs des geomètres. En outre, les astronomes ayant reconnu la même figure dans d'autres planètes tournant sur elles-mêmes, et la quantité de l'aplatissement s'étant toujours trouvée proportionnelle à la rapidité de la rotation, on ne peut guère douter d'après cela que l'aplatissement ne soit dans chaque cas l'effet du mouvement rotatoire, et qu'ainsi la terre et les planètes n'aient été primitivement à l'état fluide. Ce résultat pour la terre est confirmé par un autre fait, qui en donne l'explication; c'est que notre globe jouit dans son intérieur d'une chaleur considérable, qui ne dépend pas de celle qu'il recoit du soleil, mais qui est un reste de sa chaleur d'origine, dont une partie seulement s'est

dissipée à travers sa surface. L'observation démontre qu'à mesure que l'on s'enfonce dans l'intérieur de la terre, la température des couches va en augmentant d'à peu près un degré centésimal pour 25 à 30 mètres de profondeur. Tout porte donc à croire que la fluidité dont elle a joui avant de prendre sa forme sphéroïdale, était due à la chaleur; qu'elle a été d'abord complètement fluide; que, par le refroidissement, ses parties superficielles ont formé une sorte de croûte minérale, et que l'intérieur de la masse possède encore une température capable de tenir en fusion les différentes matières que nous connaissons à l'état solide.

3. Quelle est, à peu près, l'épaisseur de la partie extérieure connue du globe terrestre relativement au diamètre de celui-ci?

L'épaisseur de la partie extérieure connue du globe terrestre ne fait pas la millième partie du rayon de la terre. Aussi l'écorce minérale, objet des recherches du géologue, n'est qu'une mince pellicule, qui, sur une sphère de plus de six pieds de diamètre, n'aurait pas une épaisseur d'un millimètre. Les observations que l'on a faites non seulement à la surface du sol, mais encore dans les escarpements des montagnes, dans les tranchées des canaux ou des chemins de fer, dans les puits et les excavations des mines, ont appris que cette enveloppe superficielle du globe est composée d'un grand nombre de masses minérales de diverses natures, superposées ou adossées les unes aux autres, et qui ont été produites et déposées successivement et par des voies différentes.

4. Qu'entend-on par *roche*, *dépôt*, *stratification*; *superposition*, par *fossiles formation*, *terrain*, *sol*?

On entend par *roches* les minéraux simples, ou les associations constantes de plusieurs minéraux, qui existent en grandes masses dans différentes parties du globe, et toujours avec les mêmes caractères généraux de composition et de structure. Tels sont les calcaires grenus, compactes ou oolithiques; les marnes et argiles; les granites, les schistes, les porphyres. Un *dépôt* est un groupe de roches, dans lequel il y en a une qui est essentielle et dominante, les autres étant accidentelles et subordonnées. Exemple: le dépôt gypseux de Montmartre, avec marnes, etc. Lorsque toutes les masses minérales dont se compose un dépôt ou un terrain composé de plusieurs dépôts se présentent en couches à faces parallèles, placées les unes sur les autres ou superposées entre elles, on donne à cette disposition des parties d'un terrain le nom de *stratification*, et l'on dit du terrain lui-même qu'il est stratifié. Si les couches sont superposées de manière à conserver le parallélisme entre elles, on dit que ces couches sont en stratification concordante; lorsqu'au contraire la direction de deux systèmes de couches, qui sont en

contact l'un avec l'autre, est différente, ces deux systèmes de couches sont en stratification discordante. Dans ce dernier cas, il arrive que les couches du terrain inférieur étant beaucoup plus inclinées que celles du terrain supérieur, celles-ci en se prolongeant vont couper les premières ou passer par-dessus leurs têtes.

On donne le nom de *fossiles*, aux pétrifications, moules et empreintes de différentes sortes que l'on trouve dans les couches du globe, et qui proviennent de corps organisés, soit végétaux, soit animaux qui vivaient à l'époque où se formait le terrain qui les renferme. Tous ces débris ou vestiges organiques servent à caractériser les dépôts de différents âges et à les distinguer les uns des autres. Ils donnent les moyens d'assigner un caractère zoologique à chaque formation. Par ce mot de *formation*, on entend deux choses en géologie. On l'emploie souvent pour désigner un dépôt qui a été produit d'une manière déterminée, comme par les eaux marines, ou par les eaux douces, ou bien par les volcans; c'est ainsi que l'on dit: une formation marine, une formation lacustre, une formation volcanique. Mais souvent aussi on emploie ce mot dans une autre acception, et l'on désigne par là un ensemble de dépôts qui représente une certaine période de temps, pendant laquelle les causes qui les ont produits ont agi d'une manière continue. Dans ce cas, une formation comprend des dépôts qui n'ont pas tous été formés de la même manière, mais qui l'ont été dans le même temps, ce qui fait qu'ils s'accordent, sinon par les caractères minéralogiques ou de composition, du moins par les caractères géologiques ou de superposition, ou bien par les caractères zoologiques. Le mot de *terrain* s'emploie pour désigner des groupes, ou plutôt des sous-groupes établis parmi les formations qui composent la croûte minérale (terrain de granite, terrain de gneiss, terrain de schiste argileux, etc.); enfin on appelle *sol* un certain ensemble de formations ou de terrains, constituant une des grandes divisions établies dans la série des couches dont se compose l'écorce minérale (sol primitif, sol secondaire, sol tertiaire).

5. En comparant les *roches* aux produits actuellement formés par les eaux et par les volcans, peut-on les distinguer en roches de *formation aqueuse* et roches de *formation ignée*?

Si l'on vient à comparer les roches anciennes aux produits actuellement formés par les eaux ou par les volcans, on reconnaît aisément l'analogie qui existe entre les unes et les autres, et l'on arrive à distinguer les premières en roches de formation aqueuse et roches de formation ignée. Il est évident en effet, pour la plupart des masses minérales qui existent en couches, qu'elles ont été formées par l'action sédimentaire des eaux superficielles. Ce sont des dépôts de sédiment, c'est-à-dire que les matériaux qu'ils com-

posent, réduits à l'état de parties plus ou moins grossières, charriés ou tenus en suspension dans les eaux des fleuves, des lacs ou des mers, ont été abandonnés sur leur fond par l'effet de la pesanteur, avec les débris des êtres organiques que ces eaux nourrissaient. Un grand nombre d'autres roches au contraire paraissent avoir été formées par des causes plus ou moins analogues à celles qui agissent dans les volcans, c'est-à-dire que leurs matériaux ont été soulevés et ont fait éruption à travers la croûte du globe, presque toujours avec dégagement de chaleur et de gaz, et le plus souvent avec fusion ignée (trachytes, basaltes, porphyres).

6. Quels sont les caractères particuliers de ces deux modes de formation?

D'après ces deux modes de formation, on distingue donc des roches ou des terrains de sédiment (terrains neptuniens), et des roches ou terrains ignés (terrains plutoniques). Ces deux ordres de terrains ont des caractères particuliers, qui font qu'on ne peut les confondre. Les premiers sont régulièrement stratifiés; ils renferment presque constamment deux sortes de parties accessoires ou de débris caractéristiques, qui rappellent leur origine; d'une part, des parties sableuses ou sédimentaires, ou bien des cailloux roulés, de gros fragments de roches provenant de terrains plus anciens qu'eux; d'une autre part, des fossiles ou débris organiques provenant des plantes ou des animaux qui ont vécu pendant la période de leur formation. Les roches qui les composent sont en général compactes ou meubles: ce sont des calcaires, des argiles, des sables, des grès ou des poudingues. Les terrains de la seconde espèce offrent rarement des indices de stratification. En général, ils sont formés de roches massives ou irrégulièrement fissurées, à texture cristalline ou vitreuse, et composées de quarz ou de silicates (minéraux à base de silice); ils ne contiennent point ou presque jamais de cailloux roulés ni de débris organiques, et se présentent sous la forme de filons ou d'amas, de colonnes, de cloches, de dômes ou de pics, enfin de grandes masses irrégulières, qui semblent avoir été soulevées de dessous les terrains stratifiés, et s'être intercalées entre eux ou même épanchées à leur surface. On observe fréquemment au contact de ces deux ordres de terrains, des dislocations, des dérangements dans la stratification des premiers ou des altérations dans la nature de leurs roches.

7. Comment reconnaît-on l'âge relatif des divers dépôts formés par les eaux?

Les dépôts formés par les eaux, ont un ordre de superposition invariable, qui n'est autre que celui des époques successives auxquelles ils ont été formés; cet ordre ne peut donc jamais être interverti. Jamais on ne voit par exemple le calcaire à bâtir des pari-

siens au-dessous de la craie, ni la houille au-dessus des calcaires du Jura. Jamais on ne rencontre dans un lieu au-dessous d'un certain terrain celui qui, dans un autre, s'est offert au-dessus. Pour concevoir la structure des diverses parties de l'écorce du globe, il faut se représenter la série complète de tous les terrains de sédiment, placés les uns au-dessus des autres suivant leur rang d'âge ou l'ordre chronologique dans lequel ils ont été déposés. Cette série complète n'existe nulle part : beaucoup de couches manqueront dans tel ou tel lieu, et les termes les plus éloignés de la série pourront se trouver rapprochés, mais les termes qui resteront seront toujours placés entre eux dans le même ordre que dans la série idéale. La connaissance de cette série chronologique des terrains est très importante, en ce qu'elle donne les moyens de prévoir, d'après l'état du sol à la superficie, quels sont les dépôts qu'on peut espérer de trouver dans la profondeur, et quels sont ceux au contraire que l'on ne doit pas y rencontrer, par la raison qu'ils ne sont jamais inférieurs aux roches de la surface. L'ordre chronologique des dépôts de sédiment se détermine en suivant chaque couche en divers lieux, jusqu'à ce que l'on ait constaté directement sa superposition sur les roches plus anciennes. Supposons qu'il s'agisse de déterminer l'âge relatif des trois couches A, B, C, qui peuvent n'exister ensemble dans aucun lieu de la terre. On cherchera une localité où l'on puisse observer deux de ces couches, A et B par exemple, placées l'une au-dessus de l'autre. Si c'est A qui recouvre B, on en conclura que la couche A est plus récente que la couche B. On suivra ensuite la couche B dans un autre lieu, où l'on puisse observer son rapport avec C; si C lui est inférieur, on en conclura que C est plus ancienne que B. Puis, combinant les deux observations, on aura pour les trois couches, l'ordre suivant : A, B, C. C'est ainsi que l'on arrive à déterminer la série chronologique complète : il suffit d'observer avec soin la constitution géologique d'un grand nombre de lieux différents, de rapprocher ensuite les diverses superpositions observées, et de les lier ensemble par les dépôts qui leur sont communs, et qui sont inférieurs dans les uns, et supérieurs dans les autres.

8. Les mêmes moyens peuvent-ils servir pour classer dans l'ordre de leur ancienneté les dépôts d'origine ignée?

Les dépôts d'origine ignée ne peuvent être ordonnés entre eux par les mêmes moyens que ceux d'origine aqueuse; leur position relative n'ayant plus un rapport aussi nécessaire avec leur âge. On sent, en effet, que la même roche qui a été soulevée de la profondeur du sol, et qui est venue le plus souvent dans un état pâteux ou fluide s'épancher sur les couches superficielles, a pu s'intercaler entre les dépôts anciens qu'elle a traversés, de manière

à se trouver placée à la fois au-dessous et au-dessus de la même roche de sédiment. Une roche plutonique est d'origine plus récente que tous les dépôts à travers lesquels elle est sortie, et tous ceux qui étaient formés à l'époque de son éruption. Son âge ne saurait donc être apprécié rigoureusement, qu'autant que l'on connaîtrait avec certitude la dernière des couches de sédiment qu'elle a pu traverser et recouvrir. On voit d'après cela combien il est difficile de conclure des positions relatives des roches plutoniques l'ordre de leurs apparitions au milieu des dépôts stratifiés. Le principe de la superposition, si sûr lorsqu'il s'agit de ces derniers dépôts, ne peut être employé à l'égard des roches ignées qu'avec réserve, et il ne donne jamais que des approximations souvent très éloignées de la vérité. On y supplée quelquefois par un autre moyen, qui est tiré de la manière dont les roches plutoniques et neptuniennes se coupent entre elles. En effet, si l'on peut reconnaître avec certitude qu'une roche plutonique est venue de bas en haut traverser et couper en deux parties séparées un autre dépôt quelconque, soit plutonique, soit neptunien, on en conclura qu'elle est plus moderne que ce dépot : c'est le même principe que celui de l'intersection des filons, d'après lequel les mineurs déterminent l'âge relatif de deux filons qui se coupent, le filon coupant étant nécessairement plus nouveau que le filon coupé et séparé en deux.

9. Donner une idée de la composition et de la structure du *terrain* qui renferme la *houille*.

La *houille* proprement dite ne se trouve que dans un seul terrain, qui a une position bien déterminée dans la série générale, à la partie inférieure du sol secondaire. Ce terrain est celui du *grès houiller :* il se compose essentiellement de couches d'un grès quarzeux micacé, de couleur variable, mais le plus souvent grisâtre ou jaunâtre, et renferme souvent des couches subordonnées d'argiles schisteuses. Ces argiles sont noires et présentent fréquemment des empreintes de feuilles de fougère. La houille est en amas ou en bancs plus ou moins étendus et nombreux, alternant avec les couches argileuses. On trouve encore au milieu de ces argiles des rognons d'un carbonate de fer compacte ou terreux. Les couches du terrain houiller forment des bassins circonscrits; elles se présentent fréquemment rompues et repliées sur elles-mêmes. Les fossiles qu'elles contiennent sont des feuilles et des tiges gigantesques de végétaux cryptogames et monocotylédons, tels que les prêles, les fougères et les lycopodes; des coquilles marines le plus souvent, et quelquefois des coquilles d'eau douce. On suppose que les dépôts de houille se sont formés à la manière des tourbières, sur le bord des mers ou des lacs, et que de là ils ont glissé dans l'eau, où ils auront été recouverts par des dépôts de sable et de vase.

9. Indiquer les principales conditions de composition et de structure du sol, favorables à la recherche et à la découverte des sources et des eaux jaillissantes.

L'origine des sources et des eaux qui jaillissent de l'intérieur de la terre est l'infiltration des eaux superficielles à travers les montagnes, les collines, et le sol des hautes plaines. On sait que diverses roches meubles (les sables par exemple) se laissent traverser par l'eau comme des cribles; que d'autres sont pénétrées par ce liquide, à raison de leur grande porosité ou des nombreuses fissures qui les sillonnent (la craie et plusieurs autres calcaires). Les eaux circulent donc dans l'intérieur de la terre; soit dans les interstices des roches, soit dans les fissures naturelles qui séparent leurs couches, soit même dans les canaux qu'elles se sont creusés et où elles coulent librement, après s'être substituées à des parties sableuses ou calcaires qu'elles ont entraînées ou dissoutes. Si les couches perméables qui leur donnent ainsi passage sont contenues entre des couches imperméables (telles que des dépôts d'argile), celles-ci retenant les eaux, il se forme alors des nappes liquides d'une étendue plus ou moins considérable qui suivent toutes les inflexions des couches, et qui se composent les unes d'eaux stagnantes, et les autres d'eaux courantes. Et comme il peut se rencontrer à plusieurs étages de ces alternances de couches perméables et imperméables, il peut y avoir dans un même lieu des nappes à différentes profondeurs, et l'on conçoit qu'en général il y aura autant de nappes liquides que de couches poreuses reposant sur des couches imperméables. On sait que les couches n'ont presque jamais une position horizontale dans toute leur étendue, mais qu'elles forment en général des bassins géologiques, vers les bords desquels elles se redressent; aussi les voit-on se montrer à nu par leurs tranches sur le penchant des collines ou dans des plaines plus élevées que celles où elles se présentent horizontales. Les nappes d'eau, qui les accompagnent, et qui ont quelquefois plus de 20 à à 30 lieues de longueur, se relèvent donc aussi en même temps que les couches; et c'est même dans les parties les plus élevées qu'est leur origine, là où les deux terrains, le perméable et l'imperméable, viennent affleurer à la superficie du sol. A cette ligne d'intersection des couches avec la surface terrestre a lieu l'absorption des eaux qui alimentent les nappes souterraines, et qui ont souvent pour réservoirs les lacs ou les rivières. Lorsque ces nappes, après être descendues plus ou moins profondément dans le sol, se relèvent de nouveau du côté opposé à leur point de départ, si elles rencontrent là une nouvelle issue à un niveau moins élevé que le point d'où elles sont parties, elles donnent naissance à une source ou fontaine naturelle. Dans les parties où ces nappes ne se relèvent point assez pour venir à la surface, on peut faire naître une source *artésienne* ou artificielle en établissant, au moyen de la sonde, une communication entre la surface du sol et la nappe d'eau par un

trou cylindrique, que l'on garnit d'un long tube, pour que l'eau puisse s'y élever, sans se perdre dans le terrain environnant. L'eau se meut ainsi dans une sorte de siphon renversé, dont la longue branche est située du côté du réservoir qui alimente la nappe, et dont la courte branche est représentée par le tube où elle remonte. On voit, d'après cette disposition, que l'eau doit jaillir du puits foré, si la hauteur d'où elle est partie surpasse notablement celle de l'orifice par où elle sort au jour. Telle est l'origine des sources artésiennes et de certaines eaux jaillissantes naturelles.

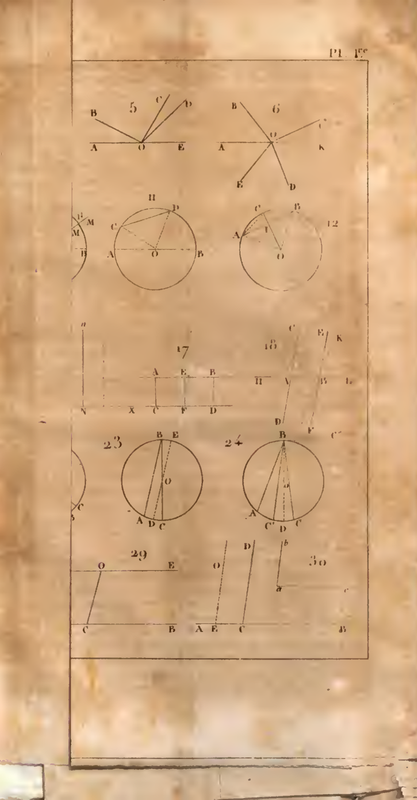
10. Dire dans quelles formations et dans quels terrains se rencontrent les divers minérais métalliques, les dépôts charboneux, les marbres, le sel gemme, le gypse, les pierres lithographiques, les pierres à chaux hydraulique, les argiles à porcelaine et à poterie, les marnes à amender.

Les différents minerais métalliques, c'est-à-dire les combinaisons des métaux avec les principaux éléments minéralisateurs tels que l'oxigène, le soufre, l'arsenic, le chlore, etc., se présentent tantôt en amas puissants ou simplement en veines et en rognons dans les terrains primordiaux (primitifs et de transition) et les terrains secondaires les plus inférieurs; tantôt ils se trouvent dans les filons qui traversent les couches de ces mêmes terrains.

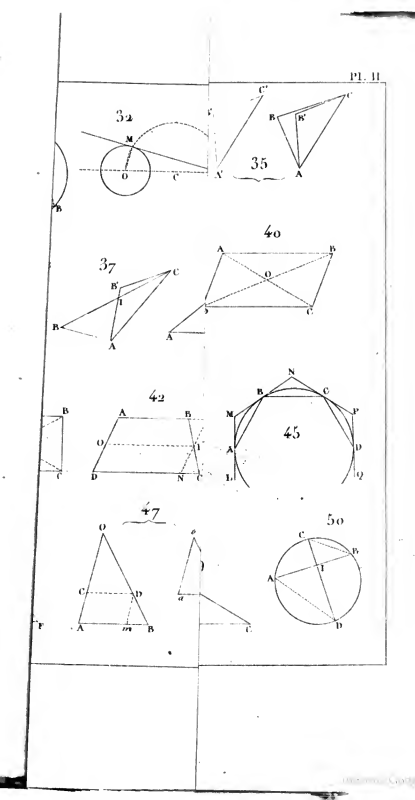
Les principaux dépôts charbonneux sont ceux d'anthracite, qui forment des couches ou des amas dans les terrains de transition; ceux de houille proprement dite, qui appartiennent, comme nous l'avons dit précédemment à la partie inférieure du sol secondaire; ceux de houille sèche ou stipite, que l'on trouve quelquefois dans la partie moyenne de ce même sol; ceux de lignite, qui forment des lits dans les terrains secondaires moyens et surtout dans la partie inférieure des terrains tertiaires; enfin les dépôts de tourbe, qui se rapportent aux terrains modernes et tout-à-fait superficiels.

Les marbres blancs saccharoïdes ou marbres statuaires se rencontrent en bancs dans les terrains primordiaux; les marbres compactes colorés, dans le sol de transition. Le gypse se présente en couches ou amas, à plusieurs étages des terrains secondaires et tertiaires; celui des environs de Paris forme l'étage immédiatement supérieur au calcaire grossier ou à la pierre à bâtir. Le sel gemme se présente aussi en bancs ou amas plus ou moins considérables et à différents étages dans les mêmes terrains. Les pierres à chaux hydraulique appartiennent pour la plupart au terrain de lias, ou aux calcaires jurassiques qui le recouvrent; c'est aussi à ces derniers calcaires que l'on doit rapporter les bonnes pierres lithographiques. Les argiles à porcelaine ou kaolins proviennent de l'altération d'une roche primitive appelée *pegmatite*. Les argiles à poteries sont communes dans les terrains secondaires et surtout dans les terrains tertiaires, et il en est de même des marnes d'amendement.

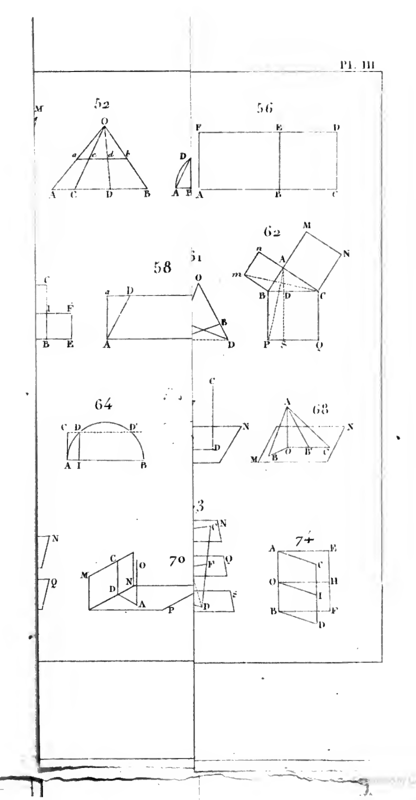
FIN.

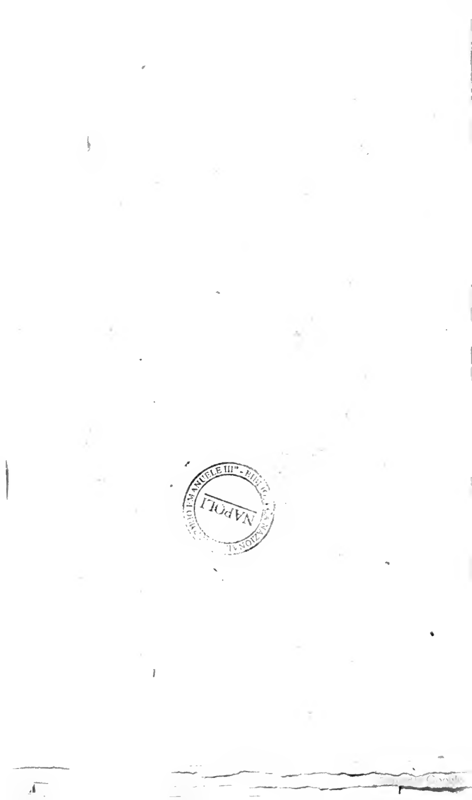

Pl. 1re
5
6
11
12
17
18
23
24
29
30

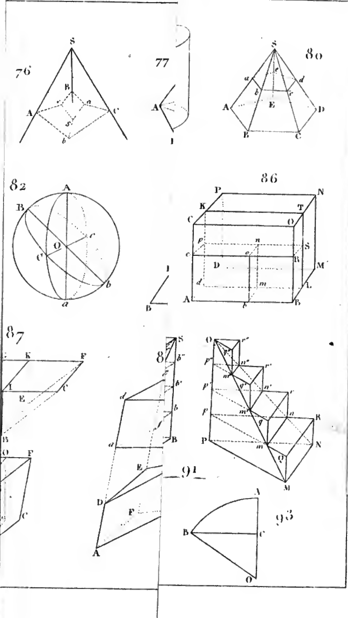

BIBLIOTECA NAZIONALE
VITTORIO EMANUELE III
NAPOLI


32
M
O
C
C'
A'
35
B
B'
C
A
40
A
B
O
D
C
A
37
C
B'
I
B
A
42
A
B
O
I
D
N
C
B
C
45
N
B
C
M
P
A
D
L
Q
47
O
C
D
A
m
B
a
C
50
C
B
I
A
D

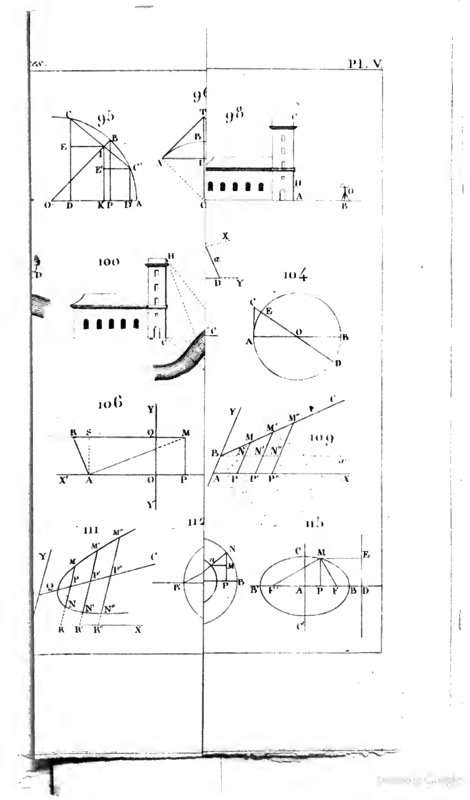



52
O
a
c
d
b
A
C
D
B
D
A
B
56
F
E
D
A
B
C
58
a
D
A
62
M
n
A
N
m
B
D
C
P
S
Q
64
C
D
D'
A
I
B
68
A
X
M
B
O
B'
C
70
C
O
M
D
N
A
P
74
A
E
C
O
H
I
B
F
D

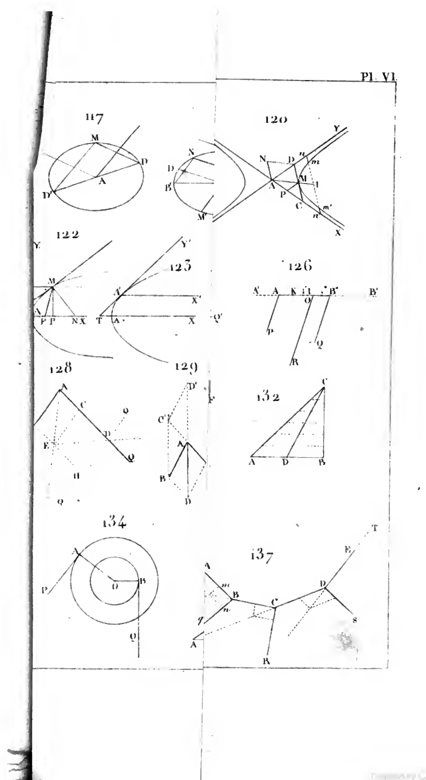



76
77
80
82
86
87
91
93


BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III"
NAPOLI


95
C
B
E
I
E'
C'
O
D
K
P
D'
A
98
T
B
I
A
H
O
B
X
a
D
Y
100
H
104
C
E
O
A
B
D
106
Y
R
S
Q
M
X'
A
O
P
Y'
109
Y
C
M"
M'
M
B
N
N'
N"
A
P
P'
P"
X
111
M"
M'
Y
M
C
P
P'
P"
Q
N
N'
N"
R
R'
R"
X
112
N
M
B'
P
B
115
C
M
E
B'
F'
A
P
F
B
D
C'




117
M
D
A
D'
N
D
B'
M'
120
Y
N
D
n
m
M
A
I
P
C
m'
n'
X
122
M
A
P P N X
Y'
123
A'
X'
T A
X
Q'
126
A' A K H B' B'
O
P
Q
R
128
A
C
D
E
Q
H
129
D'
C'
A
B
D
132
C
A D B
134
A
O B
P
Q
137
T
E
D
A
m
B
n
C
q
A
R
S


NAPOLI

.138

Fig.

Fig. 143

Fig. 145

Fig. 146

Fig. 149

Fig. 14

Fig. 152


NAPOLI

4
S'
S
155
B
R'
R
S
g. 157
A
S'
N
I
O
S
R
F
B
Fig. 158
E
A
D
I'
B
I
C
A
B
S
O
n
A'
B'
m
A"
B
A
Fig
N
A'
B'
N
S
Fig. 16
M
n
S
M
O
Fig. 166
A
B
C



